

ANÁLISIS DE VIBRACIONES EN LA EVALUACIÓN GLOBAL Y LOCAL DE PUENTES COMO INSTRUMENTO PARA SU REFORZAMIENTO ESTRUCTURAL

Fabián A. Consuegra

Ing. Asociado, Ph.D., Ingetec S.A.
fabianconsuegra@ingetec.com.co
Bogotá, D.C., Colombia

Camilo Santos

Ing. Asociado Especial, M.Sc., Ingetec S.A.
csantos@ingetec.com.co
Bogotá, D.C., Colombia

Resumen

Una extensa red de puentes de gran antigüedad es parte esencial del desarrollo económico de una nación, por lo que se requiere de una minuciosa evaluación estructural para establecer su reforzamiento o recomendar su reemplazo a causa de la inviabilidad de dicho reforzamiento. Entre las dificultades que debe enfrentar el Ingeniero Estructural a cargo de dicha decisión, está la limitada información disponible de planos y cantidades de refuerzo de los elementos estructurales, que obliga a la implementación de ensayos destructivos de inspección con alta demanda de tiempo y recursos técnicos y humanos. Un análisis basado en monitoreo dinámico de los puentes de fácil implementación, permite establecer la condición estructural a un nivel global y local sin afectar la estructura como sucede en las metodologías destructivas comúnmente usadas. En aquellas estructuras susceptibles de reforzamiento estructural, dicho monitoreo puede ser usado para precisar y optimizar el grado de afectación de los trabajos de reforzamiento necesarios. Este trabajo presenta un resumen de estudios de vibraciones en diversos puentes así como particularidades que debe conocer el ingeniero estructural para una adecuada interpretación de los resultados.

Abstract

A large infrastructure system of bridges is essential to economical development of a country. Given such importance, a detailed structural inspection and evaluation is required in order to decide whether the bridges may be reinforced or retrofitted to extend their service life or whether they should be replaced by new structures. The structural engineer in charge of such decisions must face the limited amount of information of old structures (drawing and plans, amount of reinforcement, etc.), which leads to implementation of time-expensive destructive methods in order to obtain basic information about the structure. Vibration-based analyses through an easy-to-implement dynamic monitoring tests lead to an understanding of structural condition of structures at global and local levels avoiding affecting the structures as usual for other popular destructive methods. In those structures needing retrofitting, the methodology may be used to determine, locate and optimize the works needed for retrofitting. This work presents several case studies on vibration records used in bridges and also specific topics that the structural engineer need to know for a good interpretation of results.

Palabras Clave: monitoreo dinámico; acelerómetros; vibraciones en puentes; calibración de modelos matemáticos; vibración no-lineal elástica.

Keywords: dynamic monitoring; accelerometers; vibrations in bridges; torsional effects in bridges; mathematical model calibration; non-linear elastic vibrations.

Introducción

El presente trabajo considera la comparación entre mediciones reales de una estructura y su representación matemática mediante modelos de computadora.

Las mediciones reales fueron realizadas a través de monitoreo dinámico en los puentes mediante la colocación de acelerómetros de alta precisión (10.000mV/g) en combinación con un sistema de adquisición de datos de 24-bits para toma de datos al paso de vehículos durante periodos de tiempo de alrededor de un minuto. Bajo la presunción de un comportamiento elástico de los puentes, un Espectro de Fourier de los registros de aceleraciones (Oppenheim, et. al., 2005) permitió identificar las frecuencias principales de vibración de los puentes mediante el método de selección de picos ó “Peak Pick” conocido en la literatura (Allemang, 2002). Adicionalmente, bajo la representación de la estructura con un modelo más complejo que incluya la no-linealidad, es posible tener otras apreciaciones.

El nivel más básico de verificación de las observaciones de monitoreo dinámico de los puentes consiste en la comparación entre las propiedades dinámicas medidas en campo y aquellas estimadas para la misma estructura mediante un modelo idealizado: Calibración del modelo matemático. La frecuencia natural de un sistema dinámico de un grado de libertad (SDOF) con rigidez k y masa m está definida por la ecuación (Clough and Penzien, 1975):

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1)$$

En la mayoría de aplicaciones en Ingeniería Estructural la masa del sistema se reconoce como una constante mientras que para el caso de concreto reforzado el parámetro de rigidez está sujeto a variación dependiendo de su estado de fisuración. La inercia de una sección de concreto reforzado disminuirá una vez se fisure en mayor o menor grado en función de su contenido de acero de refuerzo (Ferguson et. al., 1988). Alternativamente a un método simplificado de un grado de libertad como el de la ecuación 1, es una práctica generalizada el uso de un modelo tridimensional de elementos finitos para obtener las frecuencias de vibración de un sistema, el cual tendrá tantos grados de libertad como precisión se requiera. En la creación del modelo idealizado de la estructura real por cualquiera de las dos alternativas mencionadas, el Ingeniero debe conocer o en su defecto asumir, la geometría (secciones y luces), pesos o cargas muertas, la elasticidad del sistema (módulo de elasticidad), condiciones de borde, etc. Producto de una inspección minuciosa realizada en los puentes es posible determinar con adecuada precisión las variables mencionadas anteriormente. Sin embargo, el módulo de elasticidad (E) estimado según la ecuación 2 (Código Colombiano de Diseño Sísmico de Puentes, 1994), es el parámetro de mayor incertidumbre por el alto grado de dispersión observado en las

resistencias f'_c de diferentes núcleos de una misma estructura. Estándares internacionales tienen formulaciones similares a la ecuación 2 (AASHTO 2013).

$$E = 12500 \sqrt{f'_c} \quad [\text{kg-f/cm}^2] \quad (2)$$

En función de lo anterior la calibración del modelo matemático sirve como instrumento para obtener un valor de la resistencia del concreto de una estructura dada mediante el uso de la ecuación 2. Dicha calibración se establece al determinar el valor de módulo de elasticidad (ó resistencia a la compresión a través de la ecuación 2), que permite obtener una frecuencia natural del modelo igual a la observada en campo. A diferencia de los métodos estandarizados para estimar la resistencia del concreto (ASTM, 2004) que miden sobre puntos específicos de la estructura de dónde son extraídas las muestras, esta metodología evalúa la estructura a nivel global puesto que la frecuencia natural es un parámetro que responde a la elasticidad de todo el sistema en conjunto.

Comparación entre un modelo simplificado (SDOF) y modelo tridimensional

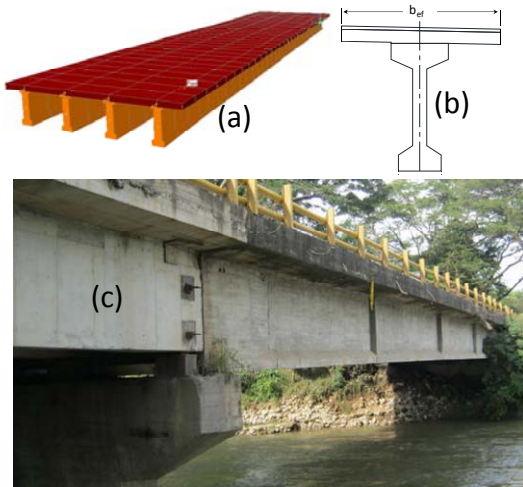
La Figura 1 muestra el modelo tridimensional construido en el programa Sap2000 (a) (Computers and Structures, 2003) y la sección utilizada para la conformación del modelo de un grado de libertad SDOF (b), usados para la estimación de la frecuencia natural de los puentes.

La conformación del modelo tridimensional fue hecha usando elementos tipo “frame” y “shell” para las vigas y la losa respectivamente (Sap2000). La condición compuesta de la sección de viga-T se garantizó imponiendo condiciones de “constraints” a cada par de nudos de viga y losa ubicados en la misma sección a lo largo del puente. La conformación de este modelo tridimensional permite todo tipo de irregularidades que pudiera tener la estructura real como espaciamiento de vigas y diferentes tipos de secciones para las vigas del puente. El modelo simplificado (SDOF) permite el cálculo de la frecuencia fundamental de la estructura bajo la consideración de un sistema continuo con inclusión de sólo deformaciones por flexión. La ecuación 3 permite el cálculo de la frecuencia fundamental bajo dicha modelación para los parámetros de longitud del puente L , módulo de elasticidad del material E , densidad del material ρ , área de la sección A y momento de inercia de la sección I . En la conformación de la sección se usó el ancho de ala especificado por la normativa (Código Colombiano de Puentes, 1994) como el ancho efectivo de la losa (ver en la Figura 1b) para cálculo de las propiedades de área e inercia.

$$f = \frac{\pi}{2L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (3)$$



Figura 1. Modelos y estructural real. (a) Modelo tridimensional; (b) Modelo simplificado SDOF; (c) Vista general estructura.

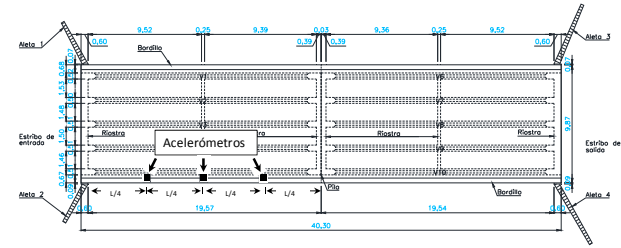


Los dos tipos de modelos mencionados fueron usados para el la representación del puente mostrado en la Figura 1 (c). Dicho puente tiene dos luces de 34m, cuatro vigas tipo I, espesor de losa de 20cm, carpeta asfáltica de 5cm y barandas metálicas con bordillo. La diferencia en frecuencias estimadas mediante el uso del modelo tridimensional y el modelo simplificado (al establecer la comparación para la luz mostrada en la Figura 1 c), está alrededor de 1%, lo cual indica que para puentes con geometría regular (espaciamiento uniforme de vigas, espesores constantes de losas, idéntico tipo de vigas), el modelo simplificado (ecuación 3) puede ofrecer suficiente precisión sin la necesidad de la conformación de un modelo más complejo. La máxima diferencia observada para los otros puentes en que se comparó el resultado de frecuencias de los dos modelos fue del 10%. En vista de la buena correlación obtenida el modelo simplificado será usado para el estudio presentado en este artículo, con la claridad de que pudiera haber diferencias mayores a la mencionada para aquellos puentes que exhiben una geometría menos regular y que no han sido evaluadas hasta el momento del estudio. Secciones brutas fueron consideradas para todos los modelos en el cálculo de momento de inercia.

Identificación de frecuencia fundamental de vibración

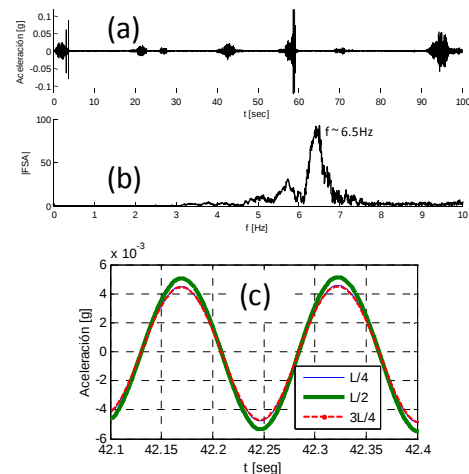
La Figura 2 muestra la localización de los acelerómetros para un puente de 40m de luz aproximadamente. Tres acelerómetros (representados por cuadrados en la Figura 2) espaciados a un cuarto de la luz libre fueron instalados sobre uno de los costados para toma de datos al paso de los vehículos. El experimento fue repetido con los acelerómetros instalados sobre el otro costado del puente para verificación y comparación. Los datos fueron digitalizados a una tasa de 2000 muestras por segundo.

Figura 2. Ubicación acelerómetros para monitoreo dinámico



La Figura 3 muestra un registro de aceleraciones tomado al paso de los vehículos (a), su correspondiente espectro de Fourier (b) y la comparación de aceleraciones medidas en los tres puntos de la Figura 2 para una ventana de tiempo corta (c). Puede observarse que las vibraciones de mayor importancia se registran en los instantes que los vehículos pasan sobre el puente, los cuales son evidenciados por cambios repentinos en la magnitud de las aceleraciones. El Espectro de Fourier ("Fourier Spectrum Amplitude" por su nombre en inglés) muestra un pico de importancia alrededor de 6.5Hz que corresponde a la frecuencia fundamental del puente (Allemang, 2002), versus 6.2Hz estimado con el modelo matemático de la estructura. Esta frecuencia también es evidenciada en la Figura 3c por el tiempo transcurrido entre dos picos consecutivos de aceleraciones. La comparación de dichas aceleraciones muestra que la magnitud máxima está a $L/2$ mientras que magnitudes menores registradas a $L/4$ y $3L/4$ son similares, lo cual puede ser entendido como la deformada del modo fundamental de una viga simplemente apoyada.

Figura 3. Registro de aceleraciones en un puente y Espectro de Fourier al paso de vehículos. (a) Registro de aceleración en $L/2$, (b) Espectro de Fourier, (c) Comparación de aceleraciones.

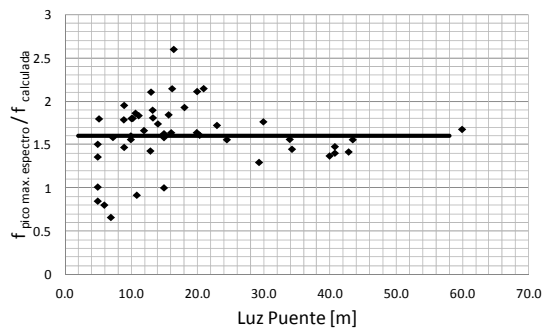


Comparación entre frecuencias medidas y calculadas para diversos puentes

La Figura 4 muestra una comparación entre la frecuencia natural indicada por el pico máximo del espectro de Fourier (similar al de la Figura 3 b) y la frecuencia natural estimada por un modelo matemático usando el módulo de elasticidad según

la ecuación 2 para más de 40 puentes de concreto reforzado y concreto post-tensado y de una y varias luces simplemente apoyadas. La comparación indica que la selección directa del pico máximo del espectro de Fourier ("Pick Peak", Allemang 2012) puede llevar a observaciones imprecisas de la frecuencia fundamental de vibración de los puentes. Esta observación sesgada puede estar asociada a imprecisiones en el modelo en torno a las condiciones de borde y la configuración geométrica del puente que permite la excitación de modos superiores por encima del modo fundamental al paso de los vehículos e incluso la participación del módulo de elasticidad dinámico podría tener algún efecto (Popovic et. al. 2008).

Figura 4. Comparación entre frecuencia indicada por pico máximo del espectro y frecuencia calculada



Respuesta dinámica de flexión y torsión combinadas

El modelo simplificado de los puentes corresponde a una formulación sencilla para estimar la frecuencia fundamental de flexión de una viga simplemente apoyada. Aunque una formulación simplista también pudiera ser usada para estimar frecuencias superiores asociadas a la flexión (Timoshenko, 1937), el cálculo de la frecuencia torsional por medio de expresiones analíticas requeriría de una formulación más compleja. Alternativamente, el modelo tridimensional serviría para el cálculo de dicha frecuencia a cambio de un mayor tiempo y esfuerzo en la modelación rigurosa de todo el puente. En la práctica, el acceso a diferentes zonas del puente hizo que la instrumentación fuera siempre ubicada sobre la zona de voladizos de la losa para facilitar la instalación y lectura en tiempos razonables. Dada la configuración de los puentes, las vibraciones medidas en los voladizos son propensas a tener una participación importante del efecto torsional comparable con el efecto de flexión. Por lo anterior es indispensable distinguir entre los modos y frecuencias correspondientes (flexión y torsión), a fin de obtener una calibración confiable de los modelos matemáticos. La dificultad en distinguir entre dichos modos se acentúa para algunas luces de puentes en que las frecuencias principales de flexión y torsión son similares.

La Figura 5 muestra la respuesta de aceleración en los dominios de tiempo y frecuencia medida en el punto central (L/2) sobre la zona del voladizo de un puente monitoreado dinámicamente y con los sensores localizados de manera parecida a la ilustrada en la Figura 2. Los dos picos de la Figura 5 c muestran la

participación importante de frecuencias de 2.6Hz y 3.4Hz. El espectrograma de la Figura 5 b muestra la participación de cada frecuencia durante una ventana de tiempo de 10 segundos idéntica a la de las aceleraciones mostradas en la Figura 5 a. El espectrograma muestra la importancia de las frecuencias mediante la intensidad de colores. Se observa que la frecuencia de 3.4Hz tiene participación durante los instantes iniciales de la respuesta al paso de los vehículos y la estructura vibra principalmente en la frecuencia de 2.6Hz para instantes posteriores. A diferencia de la Figura 3 b donde solo se tenía una frecuencia dominante en la respuesta de vibración del puente, en este caso es necesario investigación adicional para asociar cada una de las frecuencias importantes (picos del espectro) a flexión y/o torsión de la estructura.

La Figura 6 muestra una configuración de acelerómetros distinta de aquella de la Figura 2, instalada sobre el mismo puente de la Figura 5. Esta nueva configuración consiste en localizar acelerómetros en una misma sección a lo largo del puente a lado y lado del punto medio o eje longitudinal, es decir ubicando un acelerómetro sobre cada una de las vigas centrales del puente. Bajo el esquema idealizado de deformaciones de los modos mostrados en la Figura 6 a, las aceleraciones a_1 y a_2 son iguales en magnitud y sentido para el modo de flexión e iguales en magnitud y contrarias en sentido para el modo de torsión. De esta manera al sumar (Figura 6 b) y restar las aceleraciones (Figura 6 d) se obtienen nuevos registros con contenidos principalmente de flexión y torsión respectivamente. Los espectros de Fourier asociados a la suma (Figura 6 c) y resta (Figura 6 e) identifican que las frecuencias de flexión y torsión son respectivamente 2.6Hz y 3.4Hz, que son las mismas frecuencias mostradas en la Figura 5 c. Esta manipulación de los registros originales o filtro espacial, permite asignar cada frecuencia principal a los efectos de torsión y flexión. Sin embargo, dadas las condiciones de dificultad de los ensayos no es siempre posible disponer de esta configuración especial de los sensores para mejorar la identificación de las frecuencias medidas, lo cual puede generar interpretaciones erróneas como la mostrada en la Figura 4.

Figura 5. Respuesta medida para punto medio (L/2) de un puente al paso de vehículos. (a) Aceleraciones, (b) Gráfico de Tiempo-frecuencia, (c) Espectro de Fourier.

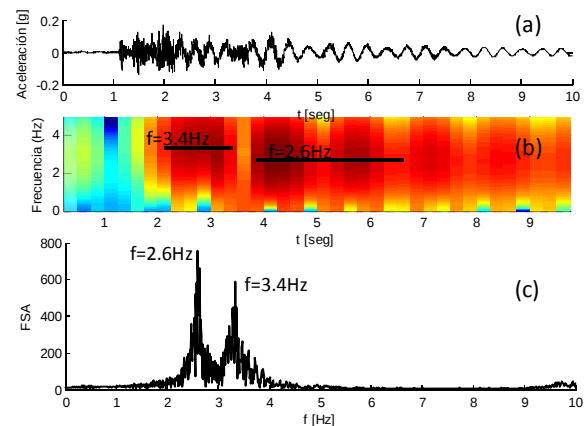
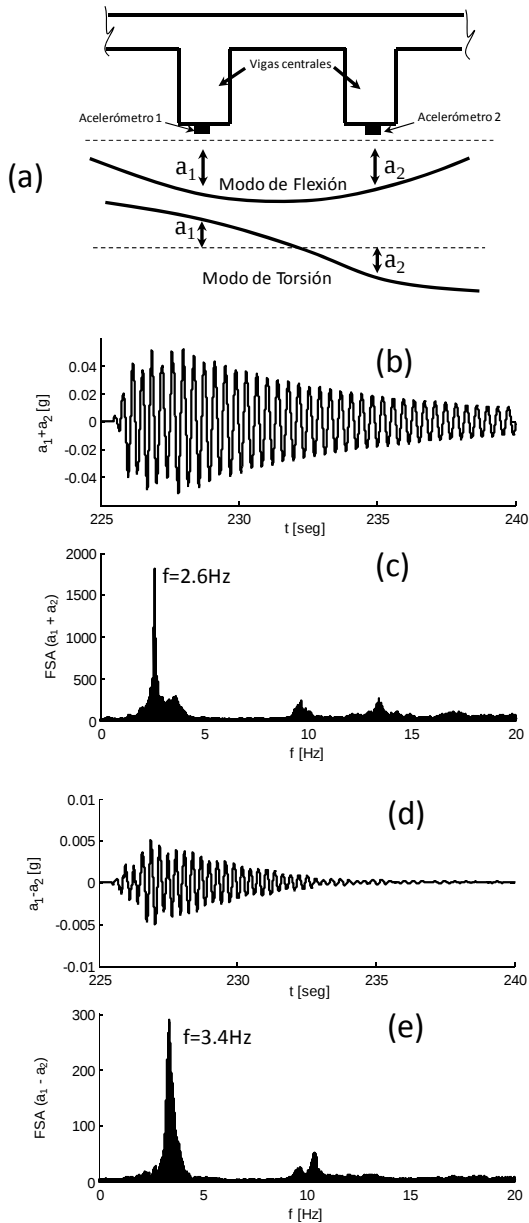




Figura 6. Desacople de vibraciones asociadas a flexión y torsión usando un filtro espacial. (a) Esquema de ubicación de acelerómetros para medir aceleraciones a_1 y a_2 , (b) Suma de aceleraciones, $a_1 + a_2$, (c) Espectro de suma de aceleraciones, (d) Resta de aceleraciones, $a_1 - a_2$, (e) Espectro de resta de aceleraciones.

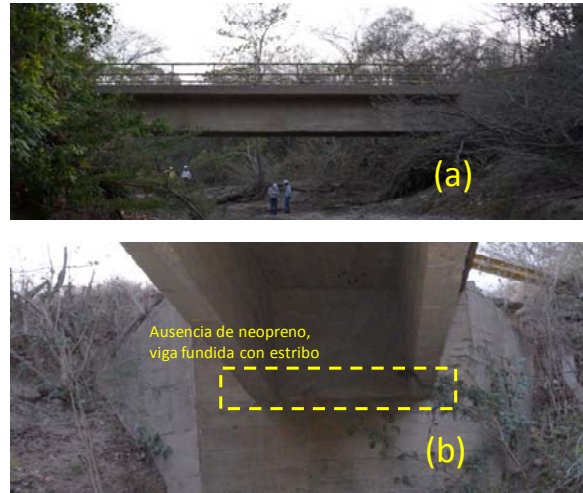


Condiciones de borde reales de la estructura

Una adecuada representación de las condiciones de borde de la estructural real en el modelo matemático preparado para predecir su comportamiento dinámico es esencial. Muy a menudo el ingeniero diseñador prescribe una condición de simplemente apoyada para las vigas de la superestructura sobre los estribos o pilas intermedias. Sin embargo, el proceso constructivo puede generar condiciones de apoyo diferentes que cambien la rigidez del sistema y con ello las condiciones de borde que afectan el comportamiento dinámico del puente observado con el monitoreo dinámico.

La Figura 7 muestra un puente de concreto reforzado con 24m de luz entre estribos (a) en que la viga ha sido fundida monolíticamente con el estribo (b). Esta condición de apoyo en el estribo provee una restricción parcial al giro de la superestructura, que genera condiciones estructurales diferentes de la viga simplemente apoyada del diseño original concebido por el diseñador, la cual puede ser determinada a través del monitoreo dinámico para representar de manera más adecuada la superestructura como una viga simplemente apoyada con resortes rotacionales en sus apoyos como se muestra en la Figura 7 c.

Figura 7. Puente con estribo integral con la superestructura. (a) Vista general. (b) estribo. (c) Modelo estructural.



La interpretación adecuada de las observaciones de vibración para el presente caso depende de la estimación del resorte rotacional (k_t) de la Figura 7 c. Dado que la rigidez total puede ser aumentada hasta por un factor de 5 con respecto a la condición de viga simplemente apoyada sin restricción al giro: el desplazamiento es $qL^4/384EI$ para condición doblemente empotrada versus $5qL^4/384EI$ par la condición simplemente apoyada de la viga. De esta manera la frecuencia estimada con el modelo simplemente apoyado comúnmente usado, podría estar incorrecta por un factor de más de 2 (la frecuencia es función de la raíz cuadrada de la rigidez, ecuación 1), lo cual explicaría parte de la dispersión observada en la Figura 4. La rigidez del resorte torsional en los apoyos de la viga puede ser calculada con la ecuación 4:

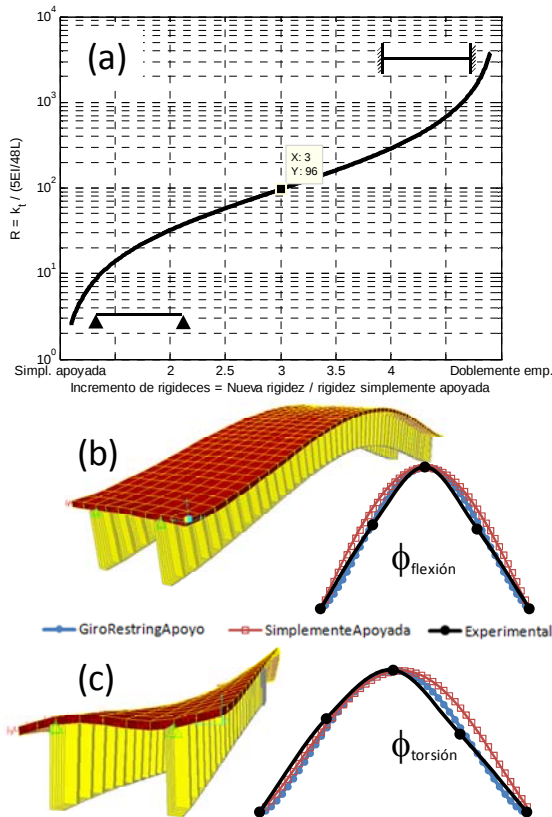
$$k_t = \frac{5EI}{48L} \left[\frac{1 - \frac{1}{factor}}{\frac{1}{24} - \frac{5}{96} \left(1 - \frac{1}{factor} \right)} \right] \quad (4)$$

Donde "E", "I", "L" y "factor" son respectivamente el módulo de elasticidad, el momento de inercia, la luz del puente y la



relación de rigidez observada en la estructura y la que tendría el sistema simplemente apoyado. El modelo de la viga simplemente apoyada ha sido corregido mediante la inclusión de resortes rotacionales según muestra la Figura 8 a. Con base en el modelo calibrado se identificaron los modos principales del puente como se muestra en la comparación de formas modales de la Figura 8 b (flexión) y c (torsión), donde se observa que el modelo con inclusión de resorte rotacional representa de manera más adecuada el comportamiento real medido de la estructura (CSI Bridge 2013).

Figura 8. Calibración modelo matemático mediante la inclusión de restricción parcial al giro en el apoyo. (a) Variación de rigidez con resorte rotacional. (b) modo principal de flexión. (c) modo principal de torsión.



No-linealidad como instrumento de detección de daño estructural

El modelo matemático comúnmente usado para el análisis de las vibraciones de los sistemas elásticos es aquel de rigidez constante, es decir el modelo lineal elástico. Sin embargo, en el sentido más general la rigidez de un sistema mecánico puede guardar alguna dependencia de la amplitud del desplazamiento al que se somete (Consuegra et. al., 2012). De esta manera, la frecuencia observada en algún instante de la vibración también será función de la magnitud del desplazamiento y por tanto el enfoque lineal elástico de rigidez constante será más o menos preciso según la menor o mayor presencia de no-linealidad en el sistema. Un sistema lineal elástico (rigidez constante) tendrá

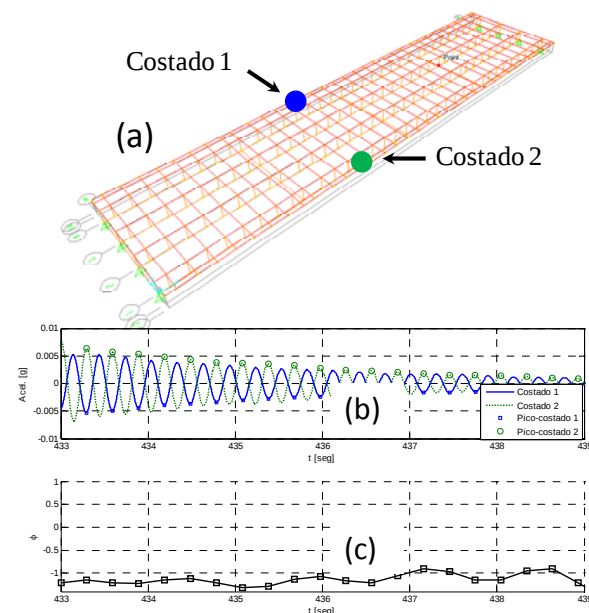
por consiguiente modos de vibración invariables asociados a matrices de rigidez (y masa) constantes.

Con base en lo anterior, la no-linealidad de una estructura puede ser evidenciada por la variación de un modo de vibración específico durante su respuesta dinámica, como puede observarse en la ecuación (5) que permite calcular la frecuencia natural asociada al modo "i" como función del modo de vibración respectivo (ϕ_i) y las matrices de rigidez y masa.

$$\omega_i^2 = \frac{\phi_i^T [K] \phi_i}{\phi_i^T [M] \phi_i} \quad (5)$$

La Figura 9 muestra el comportamiento registrado en un puente con comportamiento lineal, es decir, con ausencia de no-linealidad en la respuesta observada. Los sensores fueron posicionados a cada costado sobre el punto central (a) y las vibraciones verticales mostradas (b) son el registro original filtrado para mostrar el comportamiento torsional, cuyo modo fue obtenido (c) normalizando las magnitudes de aceleración en los instantes de máxima aceleración. Puede notarse que el valor del modo torsional es un valor constante de -1.0, como es de esperarse para un puente simétrico, es decir las aceleraciones en los costados 1 y 2 son de idéntica magnitud y sentido contrario. El puente de la Figura 9 fue sometido a un estudio estructural de análisis de capacidad con extracción de núcleos para la resistencia de concreto, extracción de barras de refuerzo para analizar su resistencia, ensayos de carbonatación y potencial de corrosión, encontrando que se encontraba en condiciones adecuadas para su funcionamiento.

Figura 9. Vibraciones medidas en un puente con comportamiento lineal. (a) posición de sensores. (b) aceleraciones medidas. (c) modo normalizado.





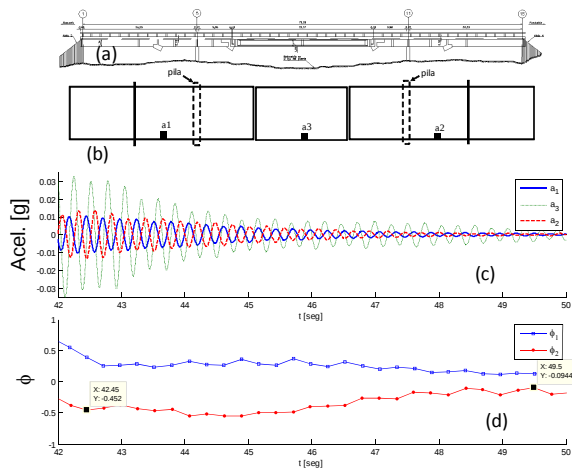
En contraste con el puente de la Figura 9, otro de los casos estudiados consistió en una estructura con avanzado deterioro y nivel de fisuración extenso como se muestra en la Figura 10. La grieta mostrada en (a) corresponde a una grieta en toda la altura de una viga de concreto post-tensado que representa el daño severo del puente. Los estudios especializados con extracción de muestras y análisis de capacidad descritos anteriormente, arrojaron que el puente tenía una capacidad muy inferior a la solicitación asociada al del tráfico actual.

Figura 10. Condición estructural observada para un puente deteriorado. (a) Perfil general puente. (b) Planta y localización de sensores. (c) Aceleraciones medidas en a_1 , a_2 y a_3 . (d) Modo normalizado con respecto a aceleración a_2 .



Un análisis similar al de la Figura 9 es mostrado en la Figura 11 para el puente deteriorado de la Figura 10. El modo mostrado en (d) fue obtenido normalizando las aceleraciones a_1 y a_2 con respecto a a_3 (centro de la luz). La variación del modo principal de flexión presentado a medida que disminuyen las amplitudes de las vibraciones es de alrededor del 80% (el valor modal para ϕ_2 varía entre -0.45 y -0.09). La comparación de los casos de puentes presentados en la Figura 9 y la Figura 11 demuestra que el grado de comportamiento no-lineal de las vibraciones observadas podría estar asociado al nivel de daño de la estructura.

Figura 11. Vibraciones medidas en un puente con comportamiento no-lineal. (a) Perfil general del puente. (b) posición de sensores. (c) aceleraciones medidas. (d) modo normalizado.



Conclusiones y recomendaciones

El análisis de vibraciones mediante el monitoreo dinámico permite establecer la condición estructural de los puentes. Para una adecuada interpretación el ingeniero estructural deberá hacer uso adecuado de los métodos de identificación modal, ser consciente de la participación de flexión y torsión en la respuesta medida y representar de manera adecuada las condiciones de borde de la estructura. En la toma de decisiones de reparaciones y reforzamientos, el ingeniero podrá contar con la observación del comportamiento dinámico no-lineal como instrumento en la identificación de deterioro o daño del puente.



Referencias

AASHTO (2003), "Standard Specifications for Highway Bridges", American Association of State Highway and Transportation Officials".

AIS (1995). Asociación Colombiana de Ingeniería Sísmica. Código Colombiano de Diseño Sísmico de Puentes, Ministerio de Transportes, Instituto Nacional de Vías.

Allemang R. (2002), "Modal Parameter Estimation, Overview / Review", University of Cincinnati, Structural Dynamics Research Laboratory.

ASTM Committee C09 (2004), "Standard Test Method for Compressive Strength of Cylindrical Concrete Specimens".

ASTM E1875-08 (2008), "Standard Test Method for Dynamic Young's Modulus, Shear Modulus and Poisson's Ratio by Sonic Resonance".

Clough R. and Penzien J. (1975), "Dynamics of Structures", McGraw-Hill.

Consuegra F., Irfanoglu A. (2012). "Variation of small amplitude vibration dynamic properties with displacement in reinforced concrete structures". Experimental Mechanics, DOI 10.1007/s11340-011-9590-0.

CSI BRIDGE (2013). Integrated 3-D Bridge Analysis, Design and Rating.

Ferguson P., Breen J. and Jirsa J. (1988), "Reinforced Concrete Fundamentals", Fifth Edition, Wiley.

Ministerio de Transporte, Instituto Nacional de Vías (1994), "Código Colombiano de Diseño Sísmico de Puentes", Asociación Colombiana de Ingeniería Sísmica (AIS).

Oppenheim A., Schafer R. and Buck J. (2006), "Discrete-Time Signal Processing", Second Edition, Pearson Prentice Hall.

Popovics J., Zemajtis J. y Shkolnik I. (2008), "A Study of Static and Dynamic Modulus of Elasticity of Concrete", ACI-CRC Final Report, Civil and Environmental Engineering, University of Illinois, Urbana IL.

SAP 2000 (2014), Computer and Structures.

Timoshenko, S. (1937), "Vibration Problems in Engineering", Second Edition, D. Van Nostrand Company, Inc.