



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

SEDE MEDELLÍN

FACULTAD DE

Minas

ACTA DE GRADO NÚMERO 1327

El consejo de Facultad en su sesión del día 15 de julio de 2013 - Acta No. 82

CONSIDERANDO QUE

Hernán Darío Salas Parra

C.C. 1.026.131.017 de Caldas

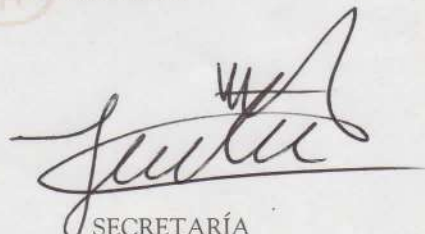
Cumplió satisfactoriamente con los requisitos exigidos por los Acuerdos y Reglamentos de la Universidad, resuelve otorgarle el título de

*Magíster en Ingeniería - Recursos
Hidráulicos*

En nombre y representación de la República de Colombia y de la Universidad Nacional de Colombia se expide el Diploma Número 34823 consignado en el Registro No. 1315, Folio 89 del Libro No. 1

En testimonio de lo anterior se firma la presente Acta de Grado en la ciudad de Medellín, a los 15 días del mes de julio de 2013


PRESIDENCIA
Consejo de Facultad


SECRETARÍA
Consejo de Facultad

REPÚBLICA DE COLOMBIA
MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL

LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA



TENIENDO EN CUENTA QUE

Hernán Darío Salas Parra

C.C. 1.026.131.017 de Caldas

CUMPLIÓ SATISFACTORIAMENTE TODOS LOS REQUISITOS REGLAMENTARIOS
DEL PROGRAMA DE ESTUDIOS DE POSTGRADO LE CONFIERE EL TÍTULO DE

*Magíster en Ingeniería - Recursos
Hidráulicos*

EN LA CIUDAD DE Medellín, a los 13 días del mes de septiembre de 2013

Bullian
DECANATURA DE FACULTAD

Mantel
RECTORÍA

Isabelina
SECRETARÍA GENERAL



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Variabilidad Espacio-Temporal de la Lluvia en los Andes Tropicales y la Amazonia a partir de Conceptos de Escalamiento y Teoría de la Información

Hernán Darío Salas Parra

Universidad Nacional de Colombia

Sede Medellín

Facultad de Minas

Escuela de Geociencias y Medio Ambiente

2013

Variabilidad Espacio-Temporal de la Lluvia en los Andes Tropicales y la Amazonia a partir de Conceptos de Escalamiento y Teoría de la Información

Hernán Darío Salas Parra

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Ingeniería – Recursos hidráulicos

Director:

Ph.D., Germán Poveda Jaramillo

Línea de Investigación:

Hidrología

Grupo de Investigación:

Posgrado en Aprovechamiento de Recursos hidráulicos (PARH)

Universidad Nacional de Colombia

Sede Medellín

Facultad de Minas

Escuela de Geociencias y Medio Ambiente

2013

A mi hija Julieta

Agradecimientos

En primer lugar expreso mi más sincera gratitud al profesor Germán Poveda Jaramillo, quien además de haber inspirado y guiado este trabajo, me ha animado y apoyado en los momentos difíciles. Su inteligencia y experiencia han alimentado mi madurez intelectual y también me han generado grandes motivaciones para no apartarme del camino de la investigación. Finalmente quiero agradecerle por darme la oportunidad de participar en el proyecto AMAZALERT y por ayudarme en la financiación de mis estudios.

Gracias a los profesores Jaime Ignacio Vélez, Oscar Mesa, Luis Fernando Carvajal y Verónica Botero quienes fueron de una u otra forma ejemplo y ayuda en mi proceso como estudiante de maestría.

Gracias a mi familia por su apoyo a la decisión de seguir mis estudios de posgrado y a mi novia Marcela por estar a mi lado y respaldarme constantemente.

Gracias a Liliana Jaramillo por su aporte de información de campos de intensidad de lluvia en Sistemas Convectivos de Mesoescala y su disposición de colaboración. Igualmente agradezco a los demás compañeros del proyecto AMAZALERT, Johanna Yepes y Andrés Duque por sus aportes.

Gracias a Mauro Ramírez por estar dispuesto a las “tertulias científicas” y por sus aportes permanentes a mi trabajo.

Resumen

En este trabajo se examina la sensibilidad a la cantidad de registros disponibles de diversos parámetros de escalamiento temporal en series de precipitación ubicadas en el Valle de Aburrá y San Nicolás. Se observan leyes potenciales asociadas a la entropía de Shannon, $S(T)$, y la cantidad de ceros, $\zeta(T)$, para diferentes intervalos de agregación, T . Se estudian los patrones de escalamiento espacial en tormentas intensas dentro de Sistemas Convectivos de Meso-escala según la *Misión para la Medición de la Lluvia Tropical* (TRMM) durante 2003-2010 mediante métodos como (i) el Espectro de Potencias Isotrópico Fourier 2D, (ii) el Análisis de Escalamiento de Momentos (AEM) y (iii) la Función de q -Entropía Espacial Generalizada, este último, método novedoso en análisis de multi-escala de la lluvia. Los resultados sugieren diferencias en la dinámica de los eventos ocurridos sobre el océano y sobre el continente. Se utiliza la entropía de Shannon, la Función de q -Entropía Generalizada y la relación entropía contra momentos estadísticos con datos de precipitación amazónica obtenida durante la campaña de mediciones WETAMC/LBA. Los resultados sugieren una relación entre la física de los procesos responsables de la lluvia, su dinámica espacial y los estadísticos de la teoría de la información. Finalmente, la relación potencial entre la entropía y los momentos estadísticos de tercer y cuarto orden (asimetría y curtosis) conectan las propiedades espacio-temporales de la lluvia con características de convección, transporte e intermitencia en flujos turbulentos.

Palabras clave: Precipitación, escalamiento, teoría de la información, sistemas convectivos de mesoescala.

Abstract

This work examines the sensitivity to the record lengths available in different temporal scaling parameters in rainfall series in the Aburrá Valley and San Nicolás Plateau. Power laws are observed associated with Shannon's entropy, $S(T)$, and the amount of zeroes, $\zeta(T)$, for different intervals of aggregation, T . We study the spatial scaling patterns in intense storms within convective systems Meso-scale in the Tropical Rainfall Measuring Mission (TRMM) during 2003-2010 using methods such as (i) the isotropic Fourier power spectrum 2D, (ii) the moment-scaling analysis and (iii) Spatial Generalized q -Entropy Function, the latter is one novel method in analysis of multi-scale spatial rainfall. The results suggest differences in the dynamics of the events over the ocean and the continent. It uses the Shannon's entropy, the q -Entropy Function and relationship entropy versus statistical moments to study patterns of spatio-temporal scaling in Amazon precipitation information obtained during the measurement campaign WETAMC/ LBA. The results suggest a relationship between the physics of the processes responsible for the rain, their spatial dynamics and statistical information theory. Finally, are found power laws between Shannon's entropy and statistical moments (Skewness and Kurtosis) connecting the spatio-temporal properties of rainfall with characteristics like convection, transport and intermittency in turbulent flows.

Keywords: Precipitation, scaling, information theory, mesoscale convective systems.

Contenido

	Pág.
Resumen	VIII
Lista de figuras.....	1
1. Introducción	5
1.1. Objetivos.....	5
1.2. Entropía de las Lluvias en los Valles de Aburrá y San Nicolás.....	6
1.3. Propiedades de Escalamiento Espacial en Sistemas Convectivos de Mesoescala (SCM).....	7
1.4. Entropía y Momentos Estadísticos en Campos de Precipitación Amazónica ...	9
1.5. Fundamentos Teóricos de la Entropía de Shannon y las Medidas Entrópicas Generalizadas	9
1.5.1. Entropía de Shannon	10
1.5.2. Medidas Generalizadas de Entropía	11
1.6. Escala de Información	15
2. Entropía de las Lluvias en los Valles de Aburrá y San Nicolás y su Sensibilidad ante la Cantidad de Registros	19
2.1. Información Utilizada y Características de la Región de Estudio.....	19
2.1.1. Valle de Aburrá	20
2.1.2. Altiplano de San Nicolás	20
2.2. Métodos.....	21
2.2.1. Entropía de Shannon	21
2.2.2. Sobre “la ley de conservación de la incertidumbre”	22
2.2.3. La presencia de ceros en las series de lluvia	24
2.2.4. Una Medida estadística de Complejidad	24
2.3. Análisis de Resultados.....	26
2.3.1. Entropía de Shannon en Múltiples Escalas Temporales.....	28
2.3.2. Funciones de Distribución de Probabilidades	33
2.3.3. Ley de conservación de la incertidumbre	35
2.3.4. La presencia de los ceros	41
2.3.5. Una Medida Estadística de Complejidad.....	47
2.3.6. Sobre un método de desagregación temporal basado en la Entropía de Shannon.....	50
2.3.7. Patrones Geográficos.....	54
3. Propiedades de Escalamiento Espacial en Sistemas Convectivos de Mesoescala Según la Misión TRMM Durante 2003-2010.....	55

3.1. Datos y Características de la Región de Estudio	55
3.2. Métodos	58
3.2.1. Espectro de potencias de Fourier para campos 2D	58
3.2.2. Análisis de Escalamiento de Momentos	60
3.2.3. Función de q -Entropía Espacial Generalizada	61
3.3. Resultados y Análisis	62
3.3.1. Espectro de potencias de Fourier para campos 2D	62
3.3.2. Análisis de Escalamiento de Momentos	64
3.3.3. Función de q -Entropía Espacial Generalizada	67
4. Entropía de Shannon, q-Entropía Espacial y Temporal Generalizada, Momentos Estadísticos y Escala de Información en Campos de Lluvia Amazónica	71
4.1. Datos y Características de la Región de Estudio	71
4.1.1. Zona de Estudio	71
4.1.2. Información Utilizada	72
4.1.2. Regímenes Climáticos Predominantes	73
4.2. Métodos	74
4.3. Resultados y Análisis	74
4.3.1. Entropía de Shannon	74
4.3.2. Función de q -Entropía Espacial Generalizada	77
4.3.3. Función de q -Entropía Temporal Generalizada	81
4.3.4. Síntesis Sobre la Función de q -Entropía Espacial y Temporal Generalizada.	84
4.3.5. Momentos Estadísticos y su Relación con la Entropía de Shannon para Series de Tiempo del Radar S-pol	86
4.3.6. Momentos Estadísticos y su Relación con la Entropía para Campos Bi-dimensionales de Intensidad de Lluvia	89
4.3.7. Escala de Información	91
5. Conclusiones y Recomendaciones	93
5.1. Entropía de las Lluvias en los Valles de Aburrá y San Nicolás	93
5.2. Propiedades de Escalamiento Espacial en Sistemas Convectivos de Mesoescala (SCM) Según la misión TRMM durante 2003-2010	95
5.3. Entropía de Shannon, q -Entropía Espacial y Temporal Generalizada, Momentos Estadísticos y Escala de Información en Campos de Lluvia Amazónica ..	97
5.4. Trabajo Futuro	98
A. Anexo: Pruebas de Hipótesis modificadas	101
B. Anexo: Parámetros y Distribución Geográfica	105
Referencias bibliográficas	111

Lista de figuras

Figura 1.2.1. Esquema de la organización en un campo espacial de complejos de meso escala. Se muestra dentro del área sinóptica grandes sistemas (GSM) y pequeños sistemas (PSM). (Figura adaptada de Gupta y Waymire, 1993	8
Figura 2.01. Ubicación de la región de estudio y estaciones pluviométricas en el Valle de Aburrá y Altiplano de San Nicolás. (a) Contexto nacional, (b) Contexto regional y (c) Contexto local, cuenca del río Aburrá.....	20
Figura 2.02. Esquema adaptado de López-Ruiz et al., (1995) para el concepto de complejidad.....	26
Figura 2.03. Sensibilidad de la entropía de Shannon a la cantidad de intervalos de clase utilizados para estimar la función de densidad de probabilidades empírica.....	29
Figura 2.04. Entropía de Shannon para diferentes intervalos de agregación en el Valle de Aburrá. El parámetro β indica la pendiente del ajuste potencial y T_{max} el tiempo de agregación en el cual se alcanza la máxima entropía (S_{max})	30
Figura 2.05. Estimación del exponente de escalamiento β para todas las estaciones pluviométricas del valle de Aburrá (izquierda) y el Altiplano de San Nicolás (Derecha) usando la longitud entera de registros. Se denotan también los promedios usando los periodos comunes entre estaciones.....	30
Figura 2.06. Entropía de Shannon para diferentes intervalos de agregación en el Altiplano de San Nicolás. El parámetro β indica la pendiente del ajuste potencial y T_{max} el tiempo de agregación en el cual se alcanza la máxima entropía (S_{max}).....	31
Figura 2.07. Función de distribución de probabilidades empírica acumulativa para diferentes intervalos de agregación y la función de distribuciones de probabilidades Pareto Generalizada ajustada. (a) Ajuste para el periodo común entre estaciones. (b) Ajuste para el periodo máximo de cada estación.....	35
Figura 2.08. Ley potencial para la función de varianza, $\gamma(T)=cT^\delta$, para las estaciones Astilleros y Ayurá en el Valle de Aburrá. Vasconia y Las palmas en el Altiplano de San Nicolás. (izquierda) periodo común de registros. (derecha) periodo máximo de registros.	37
Figura 2.09. Escala de fluctuación estimada a partir de la función de varianza, en las estaciones Astilleros y Villahermosa del Valle de Aburrá. Vasconia y Las palmas del altiplano de San Nicolás. (izquierda) Periodo común. (derecha) Periodo máximo	39
Figura 2.10. Estimador de la escala de fluctuación θ estimado hasta un intervalo de agregación de 3000min. (azul) Estimado a partir de (T) , periodo máximo. (verde) Estimado a partir de (T) , periodo común. (rojo) Estimado a partir de la función de autocorrelación para rezago $\tau = 3000$ min.....	40
Figura 2.11. Cantidad de ceros $\zeta(T)$ para diferentes intervalos de agregación T en dos estaciones representativas del Valle de Aburrá.....	42
Figura 2.12. Cantidad de ceros $\zeta(T)$ para diferentes intervalos de agregación T dos estaciones representativas del Altiplano de San Nicolás.....	43
Figura 2.13. Exponentes de escalamiento para las leyes potenciales de cantidad de ceros $\zeta(T)$ en diferentes intervalos de agregación T . α_1 indica el exponente de la ley potencial de la forma $\zeta(T)=aT^{\alpha_1}$ y α_2 indica el exponente de la ley potencial de la forma $\zeta(T)=aT^{\alpha_2}+c$	43
Figura 2.14. Valores de estimados de entropía, $S(T)$ (Triángulos) y Cantidad de ceros, $\zeta(T)$ (círculos) como función del intervalo de agregación, T , para todas las estaciones del Valle de Aburrá y el altiplano de San Nicolás.....	44
Figura 2.15. Relación entre las escalas de tiempo al cual desaparecen los ceros (T_{noz}) y se alcanza la máxima entropía (T_{MaxEnt}), usando el periodo común y la longitud entera de registros para las estaciones del Valle de Aburrá y el Altiplano de San Nicolás	45

Figura 2.16. Entropía, S , en función del intervalo de agregación, T , en lluvias de resolución mensual para la estación Ayurá del Valle de Aburrá.....	46
Figura 2.17. Medida estadística de complejidad para dos estaciones representativas del Valle de Aburrá. (a) periodo común de registros. (b) Periodo máximo de registros	48
Figura 2.18. Complejidad promedio para las estaciones del valle de Aburrá utilizando el periodo de registros común entre estaciones	48
Figura 2.19. Relación entre Complejidad normalizada y entropía normalizada para cuatro estaciones representativas en el valle de Aburrá. (a) Periodo común de registros entre estaciones. (b) Periodo máximo de registros de cada estación	49
Figura 2.20. Complejidad máxima e intervalo de agregación donde se alcanza la máxima complejidad para todas las estaciones del valle de Aburrá (VA) y el altiplano de San Nicolás (VSN).	49
Figura 2.21. Parámetros k , σ y μ para la Función de Pareto Generalizada.	52
Figura 2.22. (a) Estación Astillero, periodo 01/01/2004 a 31/12/2005. (b) Serie Simulada	53
Figura 2.23. (izquierda) Entropía S para diferentes intervalos de agregación, T . (derecha) Cantidad de ceros ξ para diferentes intervalos de agregación, T	53
Figura 3.01. Región de estudio y localización de los eventos de lluvia en sistemas convectivos de meso-escala de mayor intensidad-área encontrados para el periodo 2003-2010	56
Figura 3.02. Espectro de potencias isotrópico de Fourier para los eventos de lluvia en SCM y ajuste potencial $E_k = ck\beta$ con los correspondientes valores de c , β y R^2	63
Figura 3.03. Comparación de los espectros isotrópicos de Fourier para los eventos de precipitación en SCM	64
Figura 3.04. Campo de intensidad de lluvia para cada sub-zona de estudio. (a) Ley potencial entre el momento estadístico de orden q y el factor adimensional de escala λ . (b) Relación entre el orden del momento y el exponente de la ley potencial del panel (a).	65
Figura 3.05. Función de estructura para los campos de intensidad de lluvia seleccionados. La línea punteada denota la línea teórica de escalamiento simple.	66
Figura 3.06. (a) Sistema Convectivo 2003/ENE/25 Hora 0000 LTC (b) Dependencia espacial de la función de q -entropía. (c) Proyección de $S(q, k)$ vs. q , para diferentes valores de k . Para valores de $q \approx 0$ se utilizan diferenciales más pequeños. (d) Proyección de $S(q, k)$ vs. k	68
Figura 3.07. Campo de intensidad de lluvia para cada sub-zona de estudio. (a) Ley potencial entre la entropía de orden q y el factor adimensional de escala k . (b) Relación entre el parámetro q y el exponente de la ley potencial del panel (a).	68
Figura 3.08. Función de q -entropía para los eventos de precipitación en sistemas convectivos de meso-escala.....	69
Figura 4.01. Ubicación de la zona de estudio. (a) contexto global. (b) Contexto regional. (c) Contexto local. El círculo indica la cobertura del radar de precipitación (radio 100km).	72
Figura 4.02. Velocidad zonal del viento entre 850 y 700 mb en la región de influencia del radar. (i) Vientos zonales negativos: eventos del Este. (ii) Vientos zonales positivos: eventos del Oeste (Morales & Poveda, 2009).	74
Figura 4.03. Entropía de Shannon para eventos de lluvia amazónica. (a) Eventos del Este. (b) Eventos del Oeste.	75
Figura 4.04. Función de Distribución de Probabilidad Acumulada (cdf) y Función de Distribución de Probabilidad Empírica (pdf) para series de entropía de Shannon. Eventos del Este (E). Eventos del Oeste (W).	76
Figura 4.05. Porcentaje de área con lluvia. (a) Eventos del Este. (b) Eventos del Oeste.	76
Figura 4.06. Scan de radar Febrero 01/1999 19:57:58 (a) Dependencia espacial de la función de q -entropía. (b) Proyección de $S(q, k)$ vs. q , para diferentes valores de k . (c) Proyección de $S(q, k)$ vs. k . Para valores de $q \approx 0$ se utilizaron diferenciales más pequeños.	78
Figura 4.07. Función de q -entropía para todos los campos analizados. (izquierda) Eventos del Este. (derecha) Eventos del Oeste.	79
Figura 4.08. Exponente β promedio para el ajuste potencial entre escalas espaciales y Entropía de Tsallis para diferentes valores de q . Eventos del Este (E). Eventos del Oeste (W).	79
Figura 4.09. Panel (a) alfombra de Sierpinski. Panel (b) Dependencia espacial de la función de q -entropía. Panel (c) Proyección de $S(q, k)$ vs. q , para diferentes valores de k . Panel (d) Proyección de $S(q, k)$ vs. k	80

Figura 4.10. Función de q -entropía espacial generalizada para diferentes campos aleatorios. (Diamantes) FDP Pareto Generalizada con $k=0.5$, $\sigma=0.5$ y $\mu=0.5$. (Círculos) Variable aleatoria con FDP uniforme entre 0 y 1. (Triángulos) Variable aleatoria con FDP con $\mu=0$ y $\sigma=1$.	81
Figura 4.11. (a) Series de tiempo seleccionadas. (b) serie de tiempo para el pixel central C.	81
Figura 4.12. (a) Dependencia espacial de la función de q -entropía. (b) Proyección de $S(q, T)$ vs. q , para diferentes intervalos de agregación temporal, T . (c) Proyección de $S(q, T)$ vs. T . Para valores de $q \approx 0$ se utilizaron diferenciales más pequeños.	83
Figura 4.13. Función de q -entropía temporal generalizada.	83
Figura 4.14. Función de q -entropía temporal generalizada para 400 series de tiempo. La línea roja corresponde a dos desviaciones estándar alrededor de la media.	84
Figura 4.15. Funciones de q -entropía espacial y temporal generalizadas. (diamantes) Series de tiempo del radar S-POL. (cuadrados) Eventos del Este, campos de intensidad de lluvia del radar S-POL. (círculos) Eventos del Oeste, campos de intensidad de lluvia del radar S-POL. (triángulos) Campos de intensidad de lluvia en Sistemas Convectivos de Mesoescala del radar TRMM. (cruces) Series de tiempo de precipitación de resolución 15min del Valle de Aburrá, estación Mazo.	85
Figura 4.16. (a) Promedio contra Entropía de Shannon. (b) Varianza contra Entropía (c) Coeficiente de asimetría contra Entropía. (d) Curtosis contra Entropía.	87
Figura 4.17. (a) Entropía de Shannon [100 bins], S , contra Cantidad de ceros, ξ . (b) Entropía de Shannon contra intensidad máxima.	88
Figura 4.18. Momentos contra Entropía para los regímenes climáticos E y W. (a) Promedio μ contra entropía de Shannon, $S(\text{bits})$. (b) Varianza σ^2 contra entropía de Shannon.	89
Figura 4.19. (a) Coeficiente de asimetría contra Entropía de Shannon eventos del Este. (b) Coeficiente de asimetría contra Entropía de Shannon eventos del Oeste (c) Curtosis contra Entropía para eventos del Este. (d) Curtosis contra Entropía para eventos del Oeste.	90
Figura 4.20. Porcentaje de área con lluvia contra Entropía de Shannon para los scan correspondientes a los eventos el Este y del Oeste.	91
Figura 4.21. (a) Función de auto-información normalizada para el rezago τ , $I^*(\tau)$. (b) Estimador de la escala de información para diferentes tiempos de rezago τ , $\psi(\tau)$.	92

Lista de tablas

Tabla 2.1. Información de estaciones pluviométricas	21
Tabla 2.2. Periodos máximos y comunes de registros continuos sin datos faltantes.	27
Tabla 2.3. (Columna 3 y 4) Intervalo de agregación T en el cual se alcanza la máxima entropía ($T_{\max\text{Ent}}$). (Columnas 5 y 6) Pendiente β del ajuste potencial $ST = cT^\beta$. (Columnas 7 y 8) Exponente δ del ajuste potencial $\gamma T = aT^\delta$ para la función de varianza. (Columnas 8 y 9) Estimador de la Escala de fluctuación.	32
Tabla 2.4. (Columna 3 y 4) Complejidad máxima normalizada, $C_{\max}$. (Columnas 5 y 6) Intervalo de agregación donde se alcanza la Complejidad máxima normalizada, $T_{C_{\max}}$. (Columnas 7, 8 y 9) Parámetros de forma, escala y localización (respectivamente) de la función de distribución de probabilidades generalizada de Pareto para el intervalo de agregación donde se alcanza la máxima entropía.	50

Tabla 2.5. Información de estaciones pluviométricas consideradas en el análisis de periodo común sin datos faltantes.	51
Tabla 3.1. Detalle de la región de estudio. Límites de las sub-zonas.....	57
Tabla 3.2. Información de los SCM de mayor extensión (en km ²) para el periodo 2003-2010.....	57
Tabla 3.3. Valores estimados c , β y R^2 espectro de potencias de Fourier 2D en SCM.....	63
Tabla 4.1. Parámetros los ajustes potenciales $S_y = a\gamma\text{-}\eta$ y $S_\zeta = a\zeta\text{-}\eta$ para Asimetría vs. Entropía y Curtosis vs. Entropía, respectivamente.....	87
Tabla 4.1. Momentos estadísticos de las series de entropía E y W, las series de porcentaje de área con lluvia E y W.....	77

1.Introducción

1.1. Objetivos

Objetivo General

Analizar la variabilidad espacio-temporal y caracterizar la organización de la precipitación en diferentes escalas de la lluvia en la región Andina y la región Amazónica a la luz de los conceptos de escalamiento y la teoría de la información.

Objetivos Específicos

- Examinar las propiedades de escalamiento espacial en sistemas convectivos de mesoescala para la región Andina y la Amazonia utilizando la información del satélite TRMM para el periodo de registros 2003-2010.
- Implementar conceptos de la teoría de la información para campos de precipitación Amazónicos utilizando la información del radar S-POL perteneciente a la campaña de mediciones WETAMC/LBA (Wet Season Atmospheric Meso-scale Campaign), y para la región Andina utilizando series de precipitación del valle de Aburrá y San Nicolás.
- Explorar la implementación de un método de desagregación temporal basado en el concepto de entropía de Shannon.
- Estudiar la sensibilidad de los conceptos de la teoría de la información ante la cantidad de registros disponibles utilizando series de precipitación del valle de Aburrá y San Nicolás.
- Buscar posibles relaciones entre; propiedades estadísticas y conceptos de la teoría de la información en series de precipitación con las condiciones orográficas de la zona de estudio (altura sobre el nivel del mar).

1.2. Entropía de las Lluvias en los Valles de Aburrá y San Nicolás

La teoría de la información puede ser vista como una rama de la teoría de la probabilidad aplicada, que comprende varios métodos y herramientas para tener nociones cuantitativas de la información en variables aleatorias, procesos aleatorios y sistemas dinámicos (Gray, 2009). Para la teoría de la información, el concepto de entropía formulado por Claude E. Shannon (1948) se define como una medida probabilística de la incertidumbre o la ignorancia sobre el resultado de un experimento aleatorio, desde entonces el concepto de entropía ha sido utilizado como una herramienta importante en la teoría de la información y en casi todas las ramas de la ciencia y la ingeniería. Según Singh (2011) las aplicaciones de la entropía de Shannon pueden clasificarse en tres grandes grupos: (i) física, (ii) estadística y (iii) mixta (estadístico-física o viceversa).

En las últimas décadas el estudio de la dinámica temporal de la precipitación ha recibido especial interés a la luz de esta área del conocimiento. Sus conceptos se han implementado en múltiples aplicaciones hidrológicas, entre ellas: cálculo de distribuciones, estimación de parámetros, análisis espectral para predicción de flujos, geomorfología de cuencas, diseño de redes hidrológicas, hidrología subsuperficial, aplicaciones en hidráulica y evaluación de calidad del agua (Singh, 1997; Koutsoyiannis, 2005; Weijs & van de Giesen, 2010; Weijs et al., 2010; Bercher, 2008; Brunsell, 2010; Poveda, 2011) lo cual demuestra que la teoría de la información aplicada al análisis de series de tiempo hidrológicas, puede aportar información significativa para avanzar en el entendimiento de la dinámica espacial y temporal de diversos procesos geofísicos.

Para el caso particular de Colombia existen pocos estudios en los cuales se utilizan conceptos de la teoría de la información para entender la dinámica de la lluvia en diferentes escalas (Hurtado & Poveda, 2009; Poveda, 2009; Poveda, 2011), bajo este enfoque, falta mucho por explorar sobre la lluvia tropical en zonas de alta montaña y su aplicabilidad al modelado hidrológico.

En la última década, la literatura reporta trabajos donde se trata de relacionar la estructura espacial de la lluvia y su evolución temporal con aspectos orográficos en múltiples escalas (Roe, 2005; Deidda et al., 2006; Molini et al., 2009; Ebtehaj, & Foufoula-Georgiou, 2010), estos estudios exponen que las condiciones orográficas se

reflejan en los estadísticos de la lluvia y aunque para dichas investigaciones se utilizó información de radar, para nuestro caso (Colombia) es importante explorar los vínculos entre estadísticos de la dinámica temporal de la precipitación y el relieve, sin olvidar las limitaciones de utilizar información pluviométrica (puntual) en vez de información de radar (distribuida). Es válido resaltar que no se conoce si existe una relación entre los conceptos de teoría de la información aplicados al estudio de la lluvia tropical y características del relieve (ej, altura sobre el nivel del mar).

1.3. Propiedades de Escalamiento Espacial en Sistemas Convectivos de Mesoescala (SCM)

La correcta descripción, predicción y simulación de la dinámica espacio-temporal de la lluvia tropical es uno de los grandes retos de las geo-ciencias actuales debido a su alta variabilidad en todas las escalas. Cuantificar de manera adecuada esa variabilidad espacial es fundamental por sus múltiples aplicaciones en estimación de flujos hídricos y de energía mediante las ecuaciones balance, implementar modelos adecuados para simular la respuesta hidrológica de las cuencas, y para el modelado de procesos de interacción suelo-atmósfera, entre otras (Poveda & Mejía, 2004). Dentro de la escala sinóptica (típicamente áreas mayores a 10^4 km²), múltiples trabajos reportan que los campos de precipitación exhiben una estructura espacial jerárquica que consta de pequeñas regiones de alta intensidad de lluvia embebidas dentro de regiones de más baja intensidad de lluvia conocidos como “pequeños sistemas de meso-escala”, PSM, los cuales a su vez están embebidos dentro de regiones aún más grandes de menor intensidad de lluvia, denominadas “grandes sistemas de meso-escala”, GSM (Gupta & Waymire, 1993). En particular, el trabajo de Houze (1989) plantea el pronóstico de los sistemas convectivos de meso-escala (MCS) como un problema significativo debido a que sus características en múltiples escalas espacio-temporales dificultan su entendimiento, seguimiento y predicción. Adicionalmente, dicho estudio también expone que las escalas espaciales y temporales asociadas de estos sistemas de meso-escala están acopladas, lo cual se evidencia en que las estructuras más pequeñas de alta intensidad, también llamadas “celdas convectivas”, tienen ciclos de vida entre media hora y una hora, periodo en el cual pasan por un proceso de crecimiento, maximización y disipación en la intensidad de la lluvia. Así mismo, se estima que los PSM tienen ciclos de vida entre 2 y 4 horas mientras los GSM tienen una duración entre 6 y 12 horas. En la

Figura 2.1, se muestra una representación de la estructura espacial horizontal bidimensional de lluvia.

Desde el punto de vista estadístico, la dinámica espacial de la precipitación puede considerarse como un proceso auto-semejante, como se ilustra en la Figura 2.1., la disposición espacial parece repetirse con el cambio de escala lo que ha dado origen a gran variedad de investigaciones en las cuales se vincula al escalamiento estadístico de los campos de lluvia con el escalamiento observado en turbulencia (Lovejoy & Schertzer, 1987; Gupta & Waymire, 1990; Frish, 1995), encontrando posteriormente que la variabilidad de lluvia exhibe escalamiento múltiple, lo que puede entenderse estadísticamente como una tendencia no lineal entre los exponentes de escalamiento y el orden del momento estadístico (Gupta & Waymire, 1993; Deidda et al, 1999; Jothityangkoon, 2000; Mejía & Poveda, 2004; Morales & Poveda, 2009). Al respecto, Olsson & Niemczynowicz (1996) relacionan las propiedades de escalamiento espacial simple con los sistemas de lluvia frontales y el escalamiento espacial múltiple con campos de lluvia producto de la convección profunda.

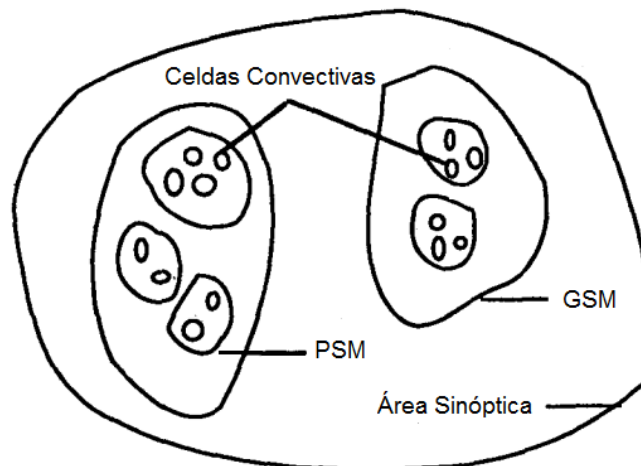


Figura 1.2.1. Esquema de la organización en un campo espacial de complejos de meso escala. Se muestra dentro del área sinóptica grandes sistemas (GSM) y pequeños sistemas (PSM). (Figura adaptada de Gupta y Waymire, 1993)

Para estudiar las propiedades de escalamiento en SCM se utiliza información del satélite TRMM (*Tropical Rainfall Measuring Misión*) para el periodo 2003-2010 y se examina la estructura espacial de la lluvia en sistemas convectivos en múltiples escalas mediante (i) la función de escalamiento de momentos, (ii) el espectro isotrópico de Fourier y (iii) la función de q -entropía espacial generalizada, enfoque novedoso para el estudio de las

propiedades de escalamiento espacial de la lluvia, introducido por Poveda (2011) en el análisis de series de tiempo de precipitación, y que no ha sido incorporado a la caracterización de campos de lluvia bi-dimensionales.

1.4. Entropía y Momentos Estadísticos en Campos de Precipitación Amazónica

En general, el coeficiente de Asimetría y Curtosis son estimadores de gran interés en el estudio de procesos que presentan funciones de distribución de probabilidad no-gaussianas y de los cuales no se conoce su distribución de probabilidades a priori, en procesos geofísicos y en el caso particular de la precipitación estos momentos estadísticos han sido utilizados en múltiples investigaciones (Burgers & Stephenson, 1999; Petersen-Øverleir, 2005; Kunstmann & Kastens, 2006; Endreny & Pashiardis, 2006), sin embargo, se ha profundizado muy poco sobre el vínculo momentos estadísticos-entropía de Shannon, su relación con la dinámica de los procesos y su utilidad como una herramienta potencial de modelado. En este trabajo se exploran relaciones entre la entropía de Shannon y los momentos de tercer y cuarto orden debido a que estas están fuertemente ligadas a la caracterización de la dinámica de flujos turbulentos. Según se argumenta en el trabajo de Quan et. al., (2012), en un flujo turbulento la entropía se maximiza cuando hay estructuras no-organizadas y el flujo es completamente aleatorio. Por el contrario, la entropía es 0 cuando el flujo se vuelve laminar. Por su parte la *Asimetría* y la *Curtosis* son usadas para caracterizar la función de distribución de probabilidades de una variable, la primera está relacionada con efectos asimétricos en flujos turbulentos tales como convección y transporte no-local generado por estructuras turbulentas, la segunda indica el peso de las colas de la distribución de probabilidades las cuales se asocian al fenómeno de intermitencia.

1.5. Fundamentos Teóricos de la Entropía de Shannon y las Medidas Entrópicas Generalizadas

La entropía en termodinámica es definida como una medida para cuantificar el desorden. Este concepto es el resultado de exitosos avances desde los trabajos pioneros del físico francés Nicolas Léonard Sadi Carnot en 1824 sobre los fundamentos de las máquinas de vapor y por el físico alemán Rudolf Clausius entre 1851 y 1865 quien desarrolló el

concepto de entropía como una variable de estado termodinámico. Posteriormente, Ludwig Boltzmann (1896/1898), Max Planck (1901), Josiah Willard Gibbs (1902) y otros descubrieron el significado estadístico de la entropía (Gaspard, 2005). Boltzmann y Gibbs introducen los conceptos de probabilidad y estadística en el contexto de mecánica, logrando proporcionar una profunda interpretación y concluyendo que la entropía de un sistema aislado está ligada a la probabilidad del estado actual (Pérez, 2007). Sea P_α la probabilidad (que satisface $0 \leq P_\alpha \leq 1$ y $\sum_\alpha P_\alpha = 1$) de que un sistema se encuentre en el estado α , determinado por un conjunto de observables tales como energía, momento lineal o momento angular, la entropía termodinámica esta dada por:

$$S = -k_B \sum_\alpha P_\alpha \ln P_\alpha \quad [1.1]$$

Donde $k_B = 1.38065 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ es también llamada constante de Boltzmann aunque fue originalmente introducida por Planck (Sommerfeld, 1956).

En general, el concepto de entropía ha sido utilizado para el entendimiento de diferentes procesos en diversas áreas del conocimiento, entre ellas termodinámica, química, mecánica estadística y teoría de la información. En esta última, Shannon (1948) utiliza el concepto de la entropía como una medida estadística para cuantificar el grado de incertidumbre o desorden de una variable aleatoria con base en su distribución de probabilidades (en mecánica estadística la entropía de Shannon es llamada entropía de Gibbs). Con respecto a la interpretación de la entropía, Pardo (1993) explica que la entropía de Shannon es independiente de la entropía clásica, aunque existe una relación de naturaleza diferente ya que no es posible obtener, transmitir o incluso almacenar información de cualquier clase sin un aumento de la entropía total del sistema aislado en el cual se actúa.

1.5.1. Entropía de Shannon

Antes de precisar la definición de entropía en el ámbito de la teoría de la información (tema de interés en este trabajo), conviene definir la *cantidad de información* o *información contenida en un mensaje* (ver Shannon, 1948; Seibt, 2006; Gray, 2009):

Sea $p_1, p_2, \dots, p_i$ la función de densidad de probabilidades que satisface que $\sum_{i=1}^W p_i = 1$. Se desea tener una función $I(x)$ tal que satisfaga las siguientes condiciones:

- a) $I(x)$ es inversamente proporcional a la probabilidad $p(x)$. En otras palabras; el evento menos frecuente es más interesante.
- b) $I(a_{j1}a_{j2} \cdots a_{jn}) = I(a_{j1}) + I(a_{j2}) + \cdots + I(a_{jn})$. Esto significa que el contenido de la información de una palabra es la suma de los contenidos de información de sus letras, esto se deriva de la hipótesis de la independencia estadística.

Sintetizando a y b se tiene que; $I(x) = F(1/p(x))$ donde la función F debe ser estrictamente monótona creciente y $F(x \cdot y) = F(x) + F(y)$ así como $F(1) = 0$. Entonces, el *logaritmo* es la función F que satisface los requerimientos y la *cantidad de información* se define como:

$$I(x) = \log \left(\frac{1}{p(x)} \right) = -\log p(x) \quad [1.2]$$

Donde $I(x)$ es la cantidad de información para un evento x y $p(x)$ es el valor de la función de densidad de probabilidad asociada con x . La expresión [1.2] es válida para cualquier base logarítmica, sin embargo la unidad de cantidad de información es el bit cuando el logaritmo utilizado es en base 2.

Como se muestra en la definición [1.2], Shannon considera una variable aleatoria X y a partir de ella define una nueva variable $I(x)$ llamada cantidad de información, posteriormente define la entropía como el valor esperado de la cantidad de información, es decir:

$$S(x) = E[I(x)] = - \sum_{i=1}^n p_i \log p_i \quad [1.3]$$

En hidrología, los conceptos de la teoría de la información han sido implementados para fines como cálculo de distribuciones, estimación de parámetros, análisis espectral para predicción de flujos, geomorfología de cuencas, diseño de redes hidrológicas, hidrología subsuperficial, aplicaciones en hidráulica y evaluación de calidad del agua (Singh, 1997; Koutsoyiannis, 2005; Weijs & van de Giesen, 2010; Weijs et al., 2010).

1.5.2. Medidas Generalizadas de Entropía

Se conocen como medidas generalizadas de entropía a todas las expresiones de entropía dependientes de parámetros y tales que a partir de ellas, sea para un valor particular o por su paso al límite se obtiene la entropía de Shannon (Pardo, 1993). El matemático

húngaro Alfréd Renyi (1955) fue el primero en intentar generalizar el concepto de entropía de una distribución de probabilidad introduciendo la expresión [1.4] basado en los momentos de orden q de las probabilidades p_i :

$$S_q = \frac{1}{1-q} \log \sum_{i=1}^N p_i^q \quad (q \in \mathbb{R}) \quad [1.4]$$

Donde q no necesariamente es un entero y para $q \rightarrow 1$ en la ecuación [1.4] lleva a la conocida expresión de entropía de Shannon:

$$S_1 = - \sum_{i=1}^N p_i \log p_i \quad \text{donde} \quad \sum_{i=1}^N p_i = 1, p_i \log p_i = 0 \text{ si } p_i = 0 \quad [1.5]$$

En el estudio de fractales, la entropía generalizada de Renyi [1.4] permite definir las dimensiones generalizadas D_q , expresión que provee una potente herramienta para la descripción de multifractales y es acorde con el concepto de Dimensión de Hausdorff (Schroeder, 1990).

Otras expresiones para la generalización de la entropía fueron propuestas, Havrda & Charvat (1967), introducen la entropía de grado s , $H^s(X)$, (ecuación [1.6]) que contiene como caso limite ($s \rightarrow 1$) la entropía de Shannon, posteriormente Daróczy (1970) establece una caracterización de la entropía de grado s mediante una ecuación funcional (ecuación [1.7]).

$$H^s(X) = \frac{1}{1-s} \left[\int_x f(x)^s d\mu(x) - 1 \right], \quad (s \neq 1, s > 0) \quad [1.6]$$

$$H_\beta(X) = \frac{\sum_x (p(x)^\beta - p(x))}{2^{1-\beta} - 1}, \quad (\beta \neq 1, \beta > 0) \quad [1.7]$$

1.5.2.1. Entropía de Tsallis

La propuesta de Tsallis consiste en remplazar la entropía extensiva de Gibbs (Entropía de Shannon en teoría de la información) con su entropía no-extensiva y maximizarla sujeta a algunas restricciones (Rathie & Da Silva, 2008).

$$S_q \equiv k \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i^q}{q-1} \quad (q \in \mathbb{R}) \quad [1.8]$$

Donde k es una constante positiva y $\sum_{i=1}^W p_i = 1$. Se puede verificar que:

$$S_1 \equiv \lim_{q \rightarrow 1} S_q = k \lim_{q \rightarrow 1} \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i \exp[(q-1) \ln p_i]}{q-1} = -k \sum_{i=1}^W p_i \ln p_i \quad [1.9]$$

Adicionalmente, la entropía de Tsallis para una distribución de probabilidad $p(x) \equiv p(X = x)$ de una variable aleatoria X , también puede ser definida como:

$$S_q(X) = - \sum_x p(x)^q \ln_q p(x), \quad (q \neq 1) \quad [1.10]$$

Con q como una extensión de la entropía de Shannon, donde la función q -logaritmo es definida en la ecuación [1.11] para cualquier número real no-negativo x y q .

$$\ln_q \equiv \frac{x^{1-q} - 1}{1-q} \quad [1.11]$$

Algunas características importantes de la entropía de Tsallis se describen a continuación:

- a) Una diferencia significativa es que mientras la entropía de Shannon (Entropía de Gibbs) genera distribuciones exponenciales, la entropía no-extensiva genera “distribuciones estables generalizadas Lévy” con propiedades de colas pesadas que siguen leyes potenciales (Rathie & Da Silva, 2008). Otra diferencia crucial de las propiedades fundamentales entre la Entropía de Shannon y la Entropía de Tsallis es que para dos variables aleatorias independientes X y Y , la entropía de Shannon, $S_I(X)$, es aditiva (ecuación [1.12]) mientras la Entropía de Tsallis, S_q con $(q \neq 1)$, presenta una pseudo-aditividad (ecuación [1.13]), es decir:

$$S_1(X \times Y) = S_1(X) + S_1(Y) \quad [1.12]$$

$$S_q(X \times Y) = S_q(X) + S_q(Y) + (1-q)S_q(X)S_q(Y) \quad [1.13]$$

Desde el punto de vista físico, la independencia entre X y Y debe interpretarse como no-interacción entre los dos sistemas X y Y .

- b) Una característica muy importante de la entropía de Tsallis es su relación con la entropía generalizada de Rényi:

$$R_q(X) = \frac{1}{1-q} \log\{1 + (1-q) S_q(X)\}, \quad (q \neq 1) \quad [1.14]$$

Mientras la entropía de Rényi tiene la propiedad de aditividad para dos variables aleatorias independientes X y Y ,

$$R_q(X \times Y) = R_q(X) + R_q(Y) \quad [1.15]$$

la entropía de Tsallis y Entropía de Rényi, tienen una estructura diferente respecto a sus aditividades (Furuichi, 2010).

- c) La generalización del teorema del límite central (TCL) también se relaciona con la q -entropía. Con relación al principal interés de este estudio, Poveda (2011) argumenta que la estimación de la entropía para diferentes niveles de agregación está relacionada con la convergencia de la suma de variables aleatorias. Por lo tanto, el teorema del límite central (TCL) aplica para variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d) que exhiben varianza finita, las cuales al ser sumadas tienden a una distribución gaussiana, característica no que aplica para variables aleatorias i.i.d de colas pesadas caso en el cual Tsallis (2005) sugiere la posibilidad de q -versiones del teorema del límite central estándar (ver también Umarov et al., 2008; Tsallis & Tirnakli, 2010).

Esta última consideración hace de la generalización del teorema del límite central un tema de especial interés en diferentes áreas de las geociencias y en particular en recursos hidráulicos e hidrología, Poveda, (2011) detalla los vínculos entre la función de distribución de probabilidades de Pareto Generalizada y la q -entropía en el análisis de la precipitación en múltiples escalas temporales.

En la última década la entropía de Tsallis ha encontrado aplicaciones en astrofísica, fractales, turbulencia, finanzas, medicina, biología, química, ciencias sociales, sistemas con correlaciones de gran escala y análisis de sistemas complejos (Tsallis, 2004; Tsallis, 2011). Sin embargo, aunque este concepto ha revolucionado la manera de afrontar diferentes cuestionamientos científicos, el debate sobre su correcta interpretación y aplicación en diversas áreas del conocimiento permanece vigente y por tanto no carece de críticas (Nauenberg, 2004; Parvan, 2010; Oikonomou, 2010).

Este estudio enfatizará en la expresión de entropía generalizada [1.8] propuesta por Constantino Tsallis (1988), conocida en el campo de la mecánica estadística como Entropía de Tsallis, q -entropía, Entropía no-aditiva o Entropía no-extensiva. Aunque más adelante se definirá aditividad y no-aditividad es importante mencionar que en el campo de la mecánica estadística, cantidades como energía son variables “extensivas”, lo que significa que la energía total de un sistema es proporcional a su tamaño. Similarmente, la entropía también se asume extensiva.

1.6. Escala de Información

Poveda (2011) define la escala de información como un análogo no-lineal de la escala de fluctuación. Para fijar con claridad el nuevo concepto se explica previamente la información mutua (IM) de dos variables como una medida estadística de la dependencia global entre ellas o lo que es equivalente, cuanta información de una variable puede ser deducida del conocimiento de la segunda variable o viceversa. Para dos variables aleatorias discretas X y Y la IM se calcula como:

$$I(X, Y) = \sum_{i,j} P_{X,Y}(i, j) \log_a \frac{P_{X,Y}(i, j)}{P_X(i)P_Y(j)} \quad [1.16]$$

Donde $P_X(i)$, $P_Y(j)$ y $P_{X,Y}(i, j)$ son las masas de probabilidad marginales y conjuntas, respectivamente. A partir de la información mutua, se define la función de auto-información como $I(\tau) = I(X_t, X_{t-\tau})$ donde τ es el tiempo de rezago, resultando la entropía de Shannon para $\tau = 0$.

Se define la escala de información como:

$$\psi^* = \int_{-\infty}^{\infty} I(\tau) d\tau \quad [1.17]$$

Para procesos discretos muestreados cada tiempo τ ,

$$\psi^*(k) = \left[S + 2 \sum_{\tau=1}^k I_{\tau} \right] \tau, k \rightarrow \infty \quad [1.18]$$

Donde S representa la entropía y I_{τ} representa el valor de auto-información para un rezago τ . Para el caso general de dos series de tiempo $\{X_t\}_{t=1}^n$ y $\{Y_t\}_{t=1}^n$ muestreadas cada τ , su información mutua está definida como $I_{X,Y}(\tau) = I(X_t, Y_{t-\tau})$ a partir de la que se define la información mutua normalizada que toma valores entre 0 y 1:

$$I_{X,Y}^*(\tau) = \frac{I_{X,Y}(\tau)}{\sqrt{S(X)}\sqrt{S(Y)}} \quad [1.19]$$

Para $X=Y$, $I_{X,X}(\tau = 0) = S(X)$ por tanto se define:

$$I_{X,X}^*(\tau) = \frac{I_{X,X}(\tau)}{S(X)} \quad [1.20]$$

Finalmente, a partir de lo anterior Poveda (2011) introduce la escala de información para el caso continuo como:

$$\psi = \int_{-\infty}^{\infty} I_{X,X}^*(\tau) d\tau \quad [1.21]$$

Para el caso discreto:

$$\psi(k) = \left[1 + 2 \sum_{\tau=1}^k I_{\tau}^* \right] \tau, k \rightarrow \infty \quad [1.22]$$

Por definición, la escala de la información constituye una característica en la escala de tiempo para los procesos no lineales. Como tal, puede pensarse como una definición alternativa del tiempo de rezago requerido para la correcta reconstrucción de las trayectorias en el espacio de fase para sistemas dinámicos y atractores extraños.

2.Entropía de las Lluvias en los Valles de Aburrá y San Nicolás y su Sensibilidad ante la Cantidad de Registros

Este capítulo tiene por objetivo estudiar la entropía de Shannon en diferentes intervalos de agregación y examinar su sensibilidad ante la cantidad de registros disponibles utilizando series de precipitación en los valles de Aburrá y San Nicolás. Adicionalmente, se estudia la relación entre las propiedades estadísticas y los conceptos de la teoría de la información con las condiciones orográficas de la zona de estudio. Entre las propiedades de la lluvia que se estudian en múltiples intervalos de agregación se encuentran: (i) La ley de conservación de la incertidumbre, (ii) la función de varianza, (iii) la escala de fluctuación, (iv) la presencia de los ceros en las series de lluvia y (v) una medida de complejidad estadística. Este capítulo se distribuye de la siguiente manera. En la sección 2.1 se describe la información utilizada y las características de la región de estudio. En la sección 2.2 se exponen los métodos de análisis, la sección 2.3 contiene el análisis de resultados, las conclusiones están consignadas en el capítulo 5 (sección 5.1.)

2.1. Información Utilizada y Características de la Región de Estudio

La información de precipitación utilizada para el desarrollo de este capítulo consiste en 24 estaciones pluviométricas con resolución temporal de 15 min, pertenecientes a Empresas Públicas de Medellín, 16 de estas estaciones están distribuidas sobre el Valle de Aburrá y 8 sobre la zona occidental del altiplano de San Nicolás. La Figura 2.1., muestra la ubicación de la zona de estudio a nivel nacional, regional y local. De igual manera, la Tabla 2.1. Muestra la información de las estaciones utilizadas para este estudio.

2.1.1. Valle de Aburrá

En la región occidental de Colombia, sobre la cordillera central se localiza el Valle de Aburrá. Tiene una extensión aproximada de 1326 km² y sus límites se encuentran dentro del departamento de Antioquia. En coordenadas geográficas este valle se encuentra entre las latitudes 6°0'0"N - 6°35'0"N y las longitudes 75°10'0"W - 75°40'0"W. Su topografía es irregular con pendientes variables y cuenta con altitudes que oscilan entre los 1.500 y los 2.500 m.s.n.m.

2.1.2. Altiplano de San Nicolás

El altiplano de oriente, también conocido como Valle de San Nicolás, se encuentra ubicado en la cordillera central de Colombia al este del valle de Aburrá. Consta de un área aproximada de 1830km². La zona de estudio perteneciente a este Altiplano se encuentra entre las latitudes 6°0'0"N - 6°20'0"N y las longitudes 75°15'0"W - 75°35'0"W. Sus altitudes que varían entre los 1.900 y los 2.600 m.s.n.m.

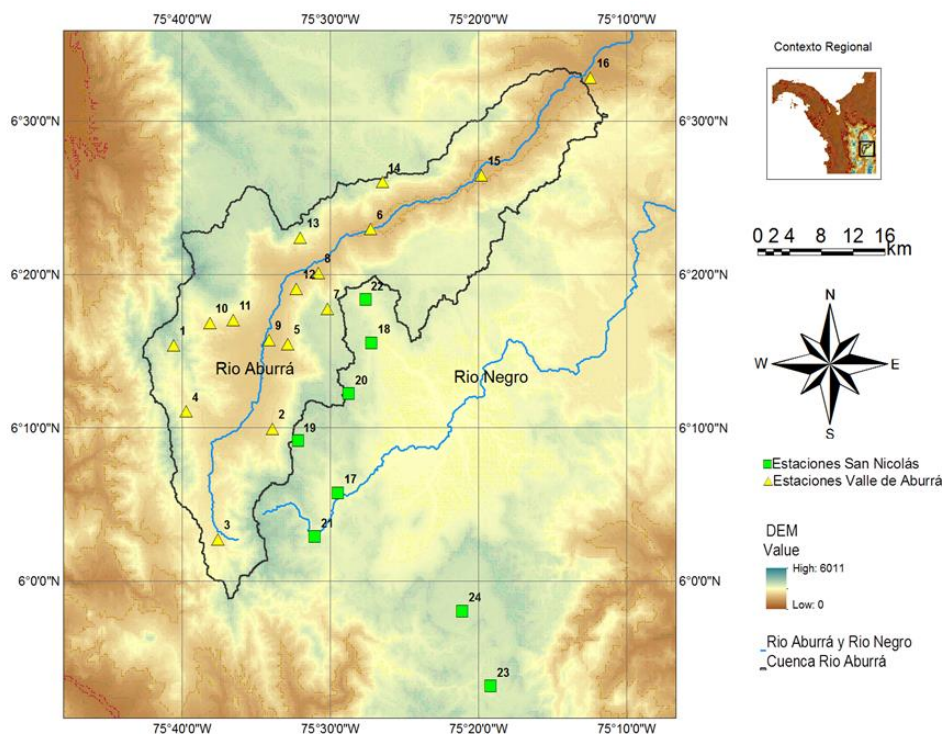


Figura 2.01. Ubicación de la región de estudio y estaciones pluviométricas en el Valle de Aburrá y Altiplano de San Nicolás. (a) Contexto nacional, (b) Contexto regional y (c) Contexto local, cuenca del río Aburrá

Tabla 2.1. Información de estaciones pluviométricas

Zona	Número de Estación	Código	Nombre	Coordenadas		Elevación (msnm)	Municipio
				Longitud	Latitud		
Valle de Aburrá	1	2701115	El Astillero	-75,68	6,26	2420	Medellín
	2	2701093	Ayurá	-75,56	6,16	1750	Envigado
	3	2701036	Caldas	-75,63	6,04	1930	Caldas
	4	2701038	San Antonio de Prado	-75,66	6,19	2000	Medellín
	5	2701045	Planta Villa Hermosa	-75,54	6,25	1690	Medellín
	6	2701056	Girardota	-75,45	6,38	1350	Girardota
	7	2701035	Chorrillos	-75,50	6,29	2370	Medellín
	8	2701122	El Convento	-75,51	6,34	1580	Copacabana
	9	2701047	Miguel de Aguinaga	-75,57	6,26	1549	Medellín
	10	2701046	San Cristóbal	-75,63	6,28	1890	Medellín
	11	2701114	Cucaracho	-75,61	6,28	1830	Medellín
	12	2701950	Manantiales	-75,53	6,31	2043	Bello
	13	2701076	Niquía	-75,53	6,37	2150	Bello
	14	2701053	Alto de San Andrés	-75,44	6,43	2240	Girardota
	15	2701057	Barbosa	-75,33	6,44	1290	Barbosa
	16	2701066	Gabino	-75,20	6,54	1080	Barbosa
San Nicolás	17	2308021	La Fe	-75,49	6,10	2150	El Retiro
	18	2308022	La Severa	-75,45	6,26	2170	Guarne
	19	2308023	Las Palmas	-75,54	6,15	2495	Envigado
	20	2308024	Vasconia	-75,48	6,20	2510	Rio Negro
	21	2308025	El Retiro	-75,52	6,05	2190	El Retiro
	22	2308026	La Mosca	-75,46	6,31	2155	Guarne
	23	2618008	Mesopotamia	-75,32	5,88	2410	La Unión
	24	2618010	La Unión	-75,35	5,97	2500	La Unión

2.2. Métodos

2.2.1. Entropía de Shannon

En el capítulo 1 (sección 1.5.1) se hace una breve revisión sobre el concepto de entropía, su historia y su interpretación en el análisis de datos. En este capítulo la definición de entropía de Shannon es el fundamento principal alrededor del cual se desarrollan todos los análisis. Se recomienda al lector remitirse a las definiciones para la correcta comprensión del presente capítulo.

2.2.2. Sobre “la ley de conservación de la incertidumbre”

Según Vanmarcke (1988) existen dos leyes que parecen gobernar el comportamiento de los sistemas distribuidos “desordenados” promediados localmente o más generalmente sobre transformaciones lineales. A continuación se hará una corta discusión sobre la primera ley del desorden (conservación de la incertidumbre).

Conservación de la Incertidumbre

La primera ley del desorden expuesta por Vanmarcke (1988), medida por el producto $\sigma^2\theta$ para procesos 1-D, y por $\sigma^2\eta$, $\sigma^2\theta(i)$, etc., para campos aleatorios. Estas cantidades permanecen invariantes sobre cualquier transformación lineal que preserve la media, si la media es m (no es cero), la declaración general es que bajo dichas condiciones el estimador $\sigma^2\theta/m^2$, $\sigma^2\eta/m^2$, $\sigma^2\theta(i)/m^2$, etc., permanece invariante sobre transformaciones lineales.

Para estudiar la ley de conservación de la incertidumbre en las series de precipitación se requiere definir los conceptos de (a) función de varianza y (b) escala de fluctuación para posteriormente cuantificar el estimador $\sigma^2\theta/m^2$. En este capítulo se estudiará la ley de conservación de la incertidumbre a partir de la función de varianza y la escala de fluctuación.

2.2.2.1. Función de Varianza

Sea $X_T(t)$ proceso aleatorio resultante del promedio local de $X(t)$ sobre el intervalo T . La función de varianza $Y(T)$ se define como [2.1] la relación de la varianza del proceso $X_T(t)$ y la varianza del proceso original $X(t)$. La función $Y(T)$ decrece monótonicamente con T , su valor máximo es $Y(0)=1$ y para procesos ergódicos en la media, $Y(\infty)=0$. La función $Y(T)$ caracteriza por completo la estructura de correlación de $X(t)$ y contiene la misma información que la función de auto-correlación o el espectro de potencias de Fourier. Para un segmento finito de longitud T_0 , la función de varianza $Y(T)$ debe ser corregida a

partir de una estimación directa de $\hat{\gamma}(T)$ más una estimación a priori $\hat{\gamma}(T_o)$. La expresión corregida de la función de varianza $\hat{\gamma}_c(T)$ se muestra en la ecuación [2.2], la cual suministra las bases de un procedimiento directo para estimar la escala de fluctuación debido a que $\hat{\gamma}_c(T)$ será (aproximadamente) insesgado [2.3] (VanMarcke, 1988) de tal manera que,

$$\hat{\gamma}(T) = \frac{\hat{\sigma}_T^2}{\hat{\sigma}^2} \quad [2.1]$$

$$\hat{\gamma}_c(T) = \gamma(T_o) + \hat{\gamma}(T)[1 - \gamma(T_o)] \quad [2.2]$$

$$E[\hat{\gamma}_c] \simeq \gamma(T) \quad [2.3]$$

En este capítulo se estimará la función de varianza y se analizará su sensibilidad ante la cantidad de registros. Los resultados serán utilizados con el fin de investigar la posible relación entre la ley de conservación de la incertidumbre y la entropía de Shannon en múltiples intervalos de agregación.

2.2.2.2. Escala de Fluctuación

Si un proceso aleatorio es ergódico en la media, su escala de fluctuación θ puede ser expresada alternativamente en términos de la función de varianza $\gamma(T)$, la función de correlación $\rho(\tau)$, o la (área-unitaria) función de densidad espectral $g(\omega)$. Por definición la función de varianza $\gamma(T)$ converge a la expresión θ/T cuando la ventana de promediado T tiende a infinito. También, θ es igual al área bajo la función de auto-correlación (desde $-\infty$ hasta $+\infty$) y es proporcional a la ordenada de frecuencia cero de la función de densidad espectral normalizada (VanMarcke ,1988). La escala de fluctuación puede ser estimada como;

$$\theta = \begin{cases} T\gamma(T) & \text{cuando } T \rightarrow \infty \\ 2 \int_0^\infty \rho(\tau) d\tau & \\ \pi g(\omega) & \text{en } \omega = 0 \end{cases} \quad [2.4]$$

En este capítulo se estimará la escala de fluctuación y se analizará su sensibilidad ante la cantidad de registros. Los resultados serán utilizados para estudiar la entropía en múltiples intervalos de agregación y su posible relación con la escala de fluctuación.

2.2.3. La presencia de ceros en las series de lluvia

La presencia de los ceros en información de precipitación, especialmente de alta resolución, es un tema vigente y de gran importancia en el ámbito hidrológico debido a sus importantes repercusiones en el adecuado entendimiento, diagnóstico y pronóstico de la lluvia. En el trabajo reciente de Veneziano & Lepore (2012) se expone que los análisis de escalamiento temporal de la lluvia producen resultados muy diferentes si se usa toda la información de las series incluyendo tormentas y periodos secos o si se utiliza solamente los periodos secos entre tormentas. En ese trabajo se argumenta que muchas características multifractales y de intermitencia encontradas en las series de precipitación son sesgadas y espurias, debido a análisis de escalamiento continuos (incluyendo ceros) que es el método de análisis más popular. De igual manera Gires et al., (2012) evalúan la influencia de los valores de lluvia-cero en la estimación de parámetros multifractales, encontrando que la inclusión de los ceros conduce a una subestimación en los índices de multifractalidad. Los dos trabajos referidos concluyen que los análisis continuos (incluyendo ceros) conducen a errores de estimación y simulación debido a que muchos modelos están basados en características multifractales de la lluvia en escalas espaciales y temporales, algunos ejemplos son los trabajos de Lovejoy & Schertzer (2007), Nykanen (2008), Schertzer (2010) y Gires et al. (2012).

En este capítulo se evalúa la influencia de los ceros en los estimadores de entropía en múltiples intervalos de agregación. Se estudia el intervalo de agregación a partir del cual desaparecen los ceros, la tasa de cambio de la cantidad de ceros con el intervalo de agregación para diferentes longitudes de registros y el vínculo existente entre el intervalo de agregación en el cual se alcanza la máxima entropía T_{maxent} y el intervalo de agregación a partir del cual desaparecen los valores de no-lluvia.

2.2.4. Una Medida estadística de Complejidad

La medida de complejidad de la presente sección está basada en la descripción probabilística de un sistema físico, en nuestro caso la precipitación. El concepto de complejidad propuesto por López-Ruiz et al. (1995) permite cuantificar y caracterizar un sistema dado, razón por la cual este concepto ha encontrado interesantes extensiones a

sistemas continuos (Catalán, et al., 2002) y recientemente a la generalización del concepto con la llamada ‘*q*-complejidad’ (Kowalski & Plastino, 2012). La idea inicial propuesta por López-Ruiz, et al. (1995) está en función de los conceptos de ‘orden o información’ y ‘desequilibrio’, para facilitar el entendimiento de la noción de complejidad se propone considerar: (i) *Un cristal perfecto (perfecta simetría)* y (ii) *un gas ideal aislado*. Para el primero la distribución de probabilidad de los estados accesibles al cristal perfecto se centra en un estado predominante. Un pequeño trozo de cristal es suficiente para describir su totalidad por lo tanto la información almacenada en este sistema es mínima. De otro lado, para el gas ideal es completamente desordenado, el sistema se puede encontrar en cualquiera de sus estados accesibles con la misma probabilidad, por lo tanto tiene el máximo de información. De estos dos ejemplos se deduce que la definición de ‘complejidad’ no debe hacerse únicamente en función del ‘orden’ o ‘información’, razón por la cual se incorpora el concepto de ‘desequilibrio’ noción que sugiere que algún tipo de distancia a partir de una distribución equiprobable debe ser adoptada. La Figura 2.2., ilustra los conceptos de información, desequilibrio y complejidad.

La noción de complejidad C en un N -sistema se deduce de la interacción entre la información almacenada en el sistema, S y su desequilibrio, D . Nótese que S es la entropía de Shannon y D es la diferencia cuadrática entre la función de distribución de densidad de probabilidad del sistema y una función equiprobable.

$$C = SD = -\left(\sum_{i=1}^N p_i \log p_i\right) \left(\sum_{i=1}^N \left(p_i - \frac{1}{N}\right)^2\right) \quad [2.5]$$

Se llama complejidad normalizada $\bar{C}$ cuando en la ecuación [2.5] la entropía S es normalizada en el intervalo $[0,1]$ de la forma:

$$\bar{S} = -\frac{(\sum_{i=1}^N p_i \log p_i)}{\log N} \quad [2.6]$$

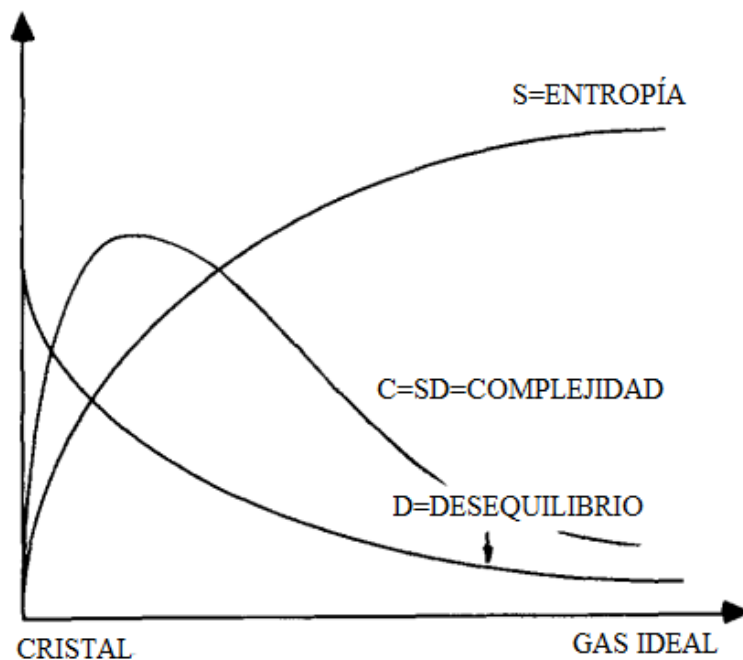


Figura 2.02. Esquema adaptado de López-Ruiz et al., (1995) para el concepto de complejidad

2.3. Análisis de Resultados

Previo al análisis de los resultados es indispensable hacer algunas precisiones sobre la zona de estudio y la información utilizada:

- a. Sobre la Zona de Estudio:** El análisis se realiza considerando las estaciones pluviométricas del Valle de Aburrá y las estaciones del Altiplano de San Nicolás por separado, esto se debe a que las características orográficas de estos sitios es diferente y por tanto los procesos hidrológicos que suceden en estas zonas presentan características distintas.
- b. Periodo máximo de registros sin datos faltantes:** Este numeral tiene por objeto cuantificar la sensibilidad de los resultados obtenidos por Poveda (2011) al usar series de registros de lluvias más extensos, en relación con las leyes potenciales existentes entre la entropía, S , y el intervalo de agregación, T de la forma $S(T) \sim T^\beta$. Para el análisis de entropía y su sensibilidad ante la cantidad de registros requiere fundamentalmente de (i) periodos máximos de registro de precipitación sin datos faltantes y también de la detección de los (ii) periodos con datos comunes entre

estaciones. Para el Valle de Aburrá se detectan periodos comunes entre las estaciones con datos entre 01/Abr/2005-31/Dic/2006, periodo de información utilizado por Poveda (2011) trabajo fundamental para el desarrollo del presente estudio. La Tabla 2.2 detalla los periodos máximos y comunes de registros continuos sin datos faltantes para cada estación.

Tabla 2.2. Periodos máximos y comunes de registros continuos sin datos faltantes

ID		Periodo Común			Periodo Máximo		
		Fecha Inicio	Fecha Final	Meses	Fecha Inicio	Fecha Final	Meses
1	El Astillero	01/04/2005	31/12/2006	21	01/08/2001	30/11/2007	76
2	Ayurá	01/04/2005	31/12/2006	21	01/03/2001	31/08/2008	90
3	Caldas	01/04/2005	31/12/2006	21	01/03/2001	31/10/2003	32
4	San Antonio de Prado	01/04/2005	31/12/2006	21	01/12/2004	31/12/2008	49
5	Planta Villa Hermosa	01/04/2005	31/12/2006	21	01/02/2001	31/12/2007	83
6	Girardota	01/04/2005	31/12/2006	21	01/11/2001	30/04/2007	66
7	Chorrillos	01/04/2005	31/12/2006	21	01/09/2003	30/04/2007	44
8	El Convento	01/04/2005	31/12/2006	21	01/10/2005	31/12/2008	39
9	Miguel de Aguinaga	01/04/2005	31/12/2006	21	01/10/2004	31/12/2006	27
10	San Cristóbal	01/04/2005	31/12/2006	21	01/01/2004	31/12/2008	60
11	Cucaracho	N.D	N.D	N.D	01/04/2001	31/12/2005	57
12	Manantiales	01/04/2005	31/12/2006	21	01/08/2005	12/31/2008	41
13	Niquía	N.D	N.D	N.D	01/03/2001	30/06/2003	28
14	Alto de San Andrés	01/04/2005	31/12/2006	21	01/01/2004	31/12/2008	60
15	Barbosa	01/04/2005	31/12/2006	21	01/07/2003	31/12/2005	30
16	Gabino	N.D	N.D	N.D	01/01/2002	30/09/2003	21
17	La Fe	01/12/2003	31/07/2006	32	01/12/2003	31/10/2007	47
18	La Severa	01/12/2003	31/07/2006	32	01/03/2003	30/09/2008	67
19	Las Palmas	01/09/2001	31/08/2003	24	01/05/2001	30/11/2006	67
20	Vasconia	01/09/2001	31/08/2003	24	01/06/2001	31/07/2006	62
21	El Retiro	01/09/2001	31/08/2003	24	01/09/2001	30/06/2004	34
22	La Mosca	01/09/2001	31/08/2003	24	01/05/2001	31/08/2003	28
23	Mesopotamia	01/12/2003	31/07/2006	32	01/02/2004	31/11/2006	34
24	La Unión	01/12/2003	31/07/2006	32	01/12/2003	31/08/2006	33

*N.D: No disponible

2.3.1. Entropía de Shannon en Múltiples Escalas Temporales

Los análisis de escalamiento presentados en esta sección se realizan con series de tiempo de precipitación incluyendo ceros. Se hace esta claridad debido a que en la literatura se pueden encontrar dos enfoques que han sido producto de fuertes discusiones científicas sobre la manera correcta de realizar los análisis hidrológicos y en particular los relacionados con la precipitación: (i) un enfoque considera que en los análisis de precipitación es necesario incluir los ceros debido a que los cambios energéticos en los periodos de no-lluvia son estrictamente necesarios para la aparición de los periodos de lluvia. (ii) El otro enfoque considera que hay un error al incluir los ceros en los análisis de precipitación debido a que esto lleva a conclusiones erróneas sobre las características de intermitencia y rasgos fractales de las series (ver Veneziano & Lepore, 2012; Gires, 2012).

Para la construcción de la función de densidad de probabilidades los métodos empíricos clásicos sugieren que un número entre 5-20 intervalos de clase es adecuado para la construcción de un histograma de frecuencias, no obstante dichos métodos funcionan bien para distribuciones ‘simétricas’ y este no es el caso para los histogramas de frecuencia de la lluvia. Para la construcción de las distribuciones de probabilidad empíricas (histogramas de frecuencia) se utilizó el método de estimación de la cantidad óptima de intervalos de clase propuesta por Knuth (2006). Dicho método utiliza un método de máxima verosimilitud para estimar el número de intervalos de clase adecuado para distribuciones de densidad de probabilidad no simétricas (asimétricas). La Figura 2.3., muestra la sensibilidad de la entropía a la cantidad de intervalos de clase utilizados para su cuantificación para dos estaciones de la zona de estudio. En el presente trabajo la entropía se estima con 100 intervalos de clase con el fin que los valores obtenidos sean comparables con los reportados por Poveda (2011). La Figura 2.4. Muestra el cambio de la entropía de Shannon para diferentes intervalos de agregación y confronta los resultados entre un periodo común de registro de 21 meses con los resultados del periodo máximo sin datos faltantes en dos estaciones del valle de Aburrá.

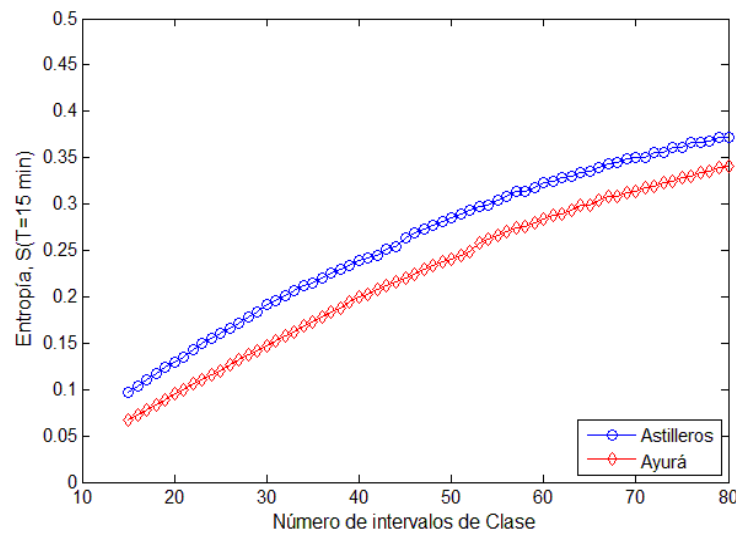


Figura 2.03. Sensibilidad de la entropía de Shannon a la cantidad de intervalos de clase utilizados para estimar la función de densidad de probabilidades empírica

El exponente de escalamiento β es levemente menor cuando se utiliza el periodo máximo de registros. Adicionalmente, se puede notar que el coeficiente de determinación baja al aumentar el periodo de registros en todas las estaciones. Para todas las estaciones del valle $\beta \approx 0.51$ en promedio y presenta una desviación estándar de $\sigma \approx 0.02$. La figura 2.6 muestra el comportamiento general de la entropía S para diferentes intervalos de agregación T en el altiplano de San Nicolás, el parámetro $\beta \approx 0.46$ en promedio y desviación estándar $\sigma \approx 0.01$ para los periodos de registros comunes. Los periodos máximos exhiben $\beta \approx 0.45$ en promedio con desviación estándar $\sigma \approx 0.03$. La Figura 2.5 ilustra el comportamiento del parámetro β para todas las estaciones del valle de Aburrá y el altiplano de San Nicolás, adicionalmente se muestran los periodos de registro utilizados para su estimación.

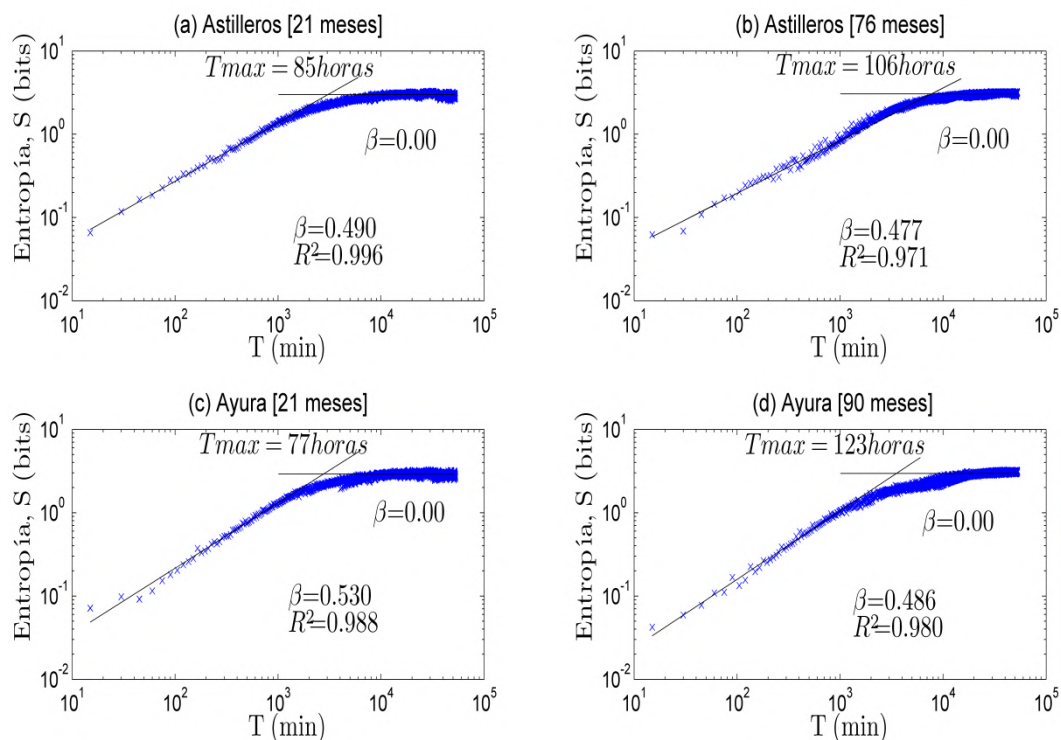


Figura 2.04. Entropía de Shannon para diferentes intervalos de agregación en el Valle de Aburrá. El parámetro β indica la pendiente del ajuste potencial y T_{max} el tiempo de agregación en el cual se alcanza la máxima entropía (S_{max})

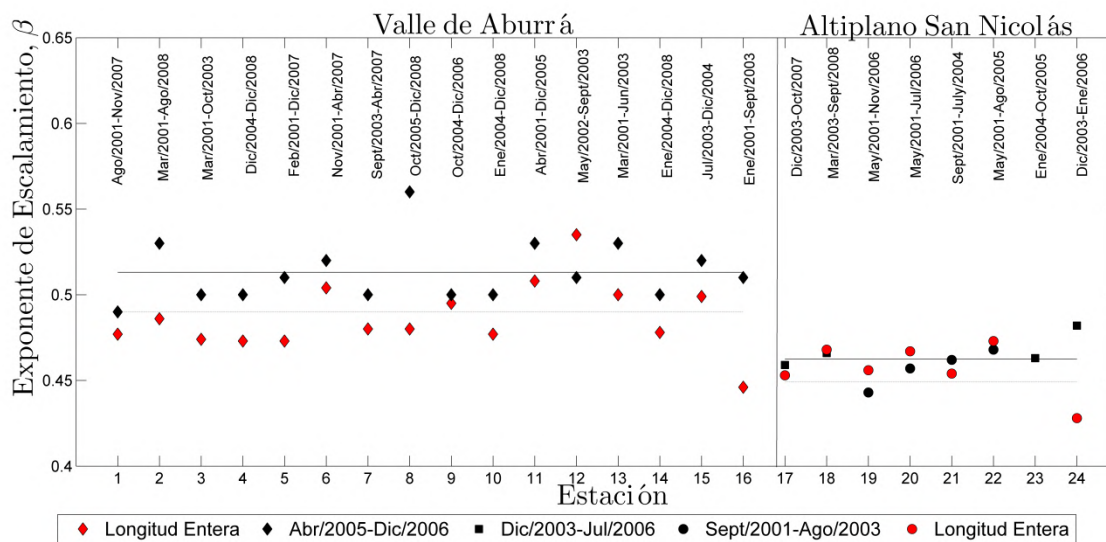


Figura 2.05. Estimación del exponente de escalamiento β para todas las estaciones pluviométricas del valle de Aburrá (izquierda) y el Altiplano de San Nicolás (Derecha) usando la longitud entera de registros. Se denotan también los promedios usando los periodos comunes entre estaciones

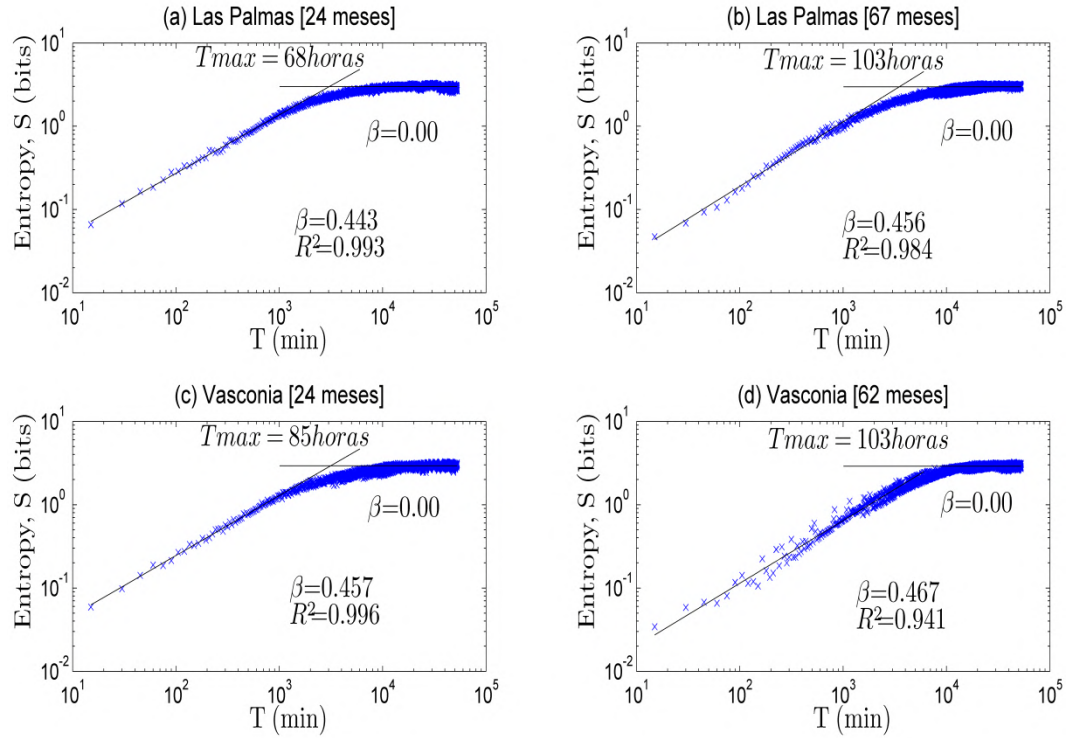


Figura 2.06. Entropía de Shannon para diferentes intervalos de agregación en el Altiplano de San Nicolás. El parámetro β indica la pendiente del ajuste potencial y T_{max} el tiempo de agregación en el cual se alcanza la máxima entropía (S_{max}).

La Figura 2.5., evidencia que existe una baja sensibilidad del exponente de escalamiento β para la entropía de Shannon en diferentes escalas temporales en el espacio log-log (ley potencial). Como se mencionó anteriormente, los resultados obtenidos muestran que β está alrededor de 0.50 para el valle de Aburrá y 0.46 para las estaciones de San Nicolás. Se realizó un test de significancia con el fin de verificar si los exponentes β son estadísticamente iguales a $\beta=0.50$ (Rawlings, 1988). La prueba de hipótesis realizada indica que los exponentes estimados son estadísticamente iguales a $\beta=0.50$ con una significancia $\alpha=0.05$ para todas las estaciones del valle de Aburrá y el Altiplano de San Nicolás. De igual manera se realizó una prueba de hipótesis con el fin de evaluar si los exponentes β estimados para el periodo común son estadísticamente iguales a los exponentes β del periodo máximo de cada estación (longitud entera de registros), el test indica que son estadísticamente iguales con una significancia $\alpha=0.05$.

Tabla 2.3. (Columna 3 y 4) Intervalo de agregación T en el cual se alcanza la máxima entropía ($T_{\max Ent}$). (Columnas 5 y 6) Pendiente β del ajuste potencial $S(T) = cT^\beta$. (Columnas 7 y 8) Exponente δ del ajuste potencial $\gamma(T) = aT^\delta$ para la función de varianza. (Columnas 8 y 9) Estimador de la Escala de fluctuación, θ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
**		Máximo	Común	Máximo	Común	Máximo	Común	Máximo	Común
ID	Estación	$T_{\max ent}(h)$	$T_{\max ent}(h)$	β_m	β_c	δ_m	δ_c	$\theta_m (min)$	$\theta_c (min)$
1	El Astillero	106	85	0,477	0,490	0.605	0.595	246	279
2	Ayurá	123	77	0,486	0,530	0.598	0.596	268	281
3	Caldas	82	66	0,474	0,500	0.651	0.620	190	236
4	San Antonio	85	70	0,473	0,500	0.628	0.639	214	203
5	Villahermosa	135	75	0,473	0,510	0.608	0.611	250	263
6	Girardota	134	87	0,504	0,520	0.576	0.577	299	307
7	Chorrillos	88	90	0,480	0,500	0.582	0.575	289	298
8	El Convento	97	81	0,480	0,560	0.603	0.593	264	270
9	Aguinaga	102	83	0,495	0,500	0.601	0.595	258	299
10	San Cristóbal	106	92	0,477	0,500	0.604	0.601	245	261
11	Cucaracho	160	93	0,508	0,530	0.606	-----	238	-----
12	Manantiales	131	87	0,535	0,510	0.573	0.588	316	283
13	Niquía	134	79	0,500	0,530	0.633	-----	211	-----
14	San Andrés	91	87	0,478	0,500	0.579	0.573	287	307
15	Barbosa	72	81	0,499	0,520	0.587	0.589	277	283
16	Gabino	89	77	0,446	0,510	0.579	-----	279	-----
17	La Fe	97	97	0,453	0,459	0.597	0.558	259	237
18	La Severa	86	72	0,468	0,466	0.595	0.564	268	278
19	Las Palmas	103	68	0,456	0,443	0.607	0.609	264	268
20	Vasconia	103	85	0,467	0,457	0.591	0.585	280	305
21	El Retiro	91	89	0,454	0,462	0.615	0.621	225	220
22	La Mosca	85	87	0,473	0,468	0.604	0.611	281	263
23	Mesopotamia	48	91	0,394	0,463	0.571	0.595	269	298
24	La Unión	68	96	0,428	0,482	0.564	0.583	307	269

Fila ** Máximo: Periodo máximo de registros continuos sin datos faltantes para cada estación (incluyendo ceros).
Común: Periodo común de registros continuos sin datos faltantes para todas las estaciones (incluyendo ceros).

Las características encontradas de la entropía de Shannon para diferentes intervalos de agregación permiten abrir una serie de preguntas relevantes que pueden contribuir a un mejor entendimiento de la dinámica de la precipitación. En el trabajo de Poveda (2011) se discute en detalle cómo y porque se alcanza la máxima entropía, su relación con el proceso de ‘erosión’ de la función de densidad de probabilidades a medida que aumenta el intervalo de agregación y las funciones de distribución de probabilidades que mejor se ajustan a los datos en las múltiples escalas temporales. En la sección 4.3.2., se confirman los resultados encontrados por Poveda (2011), se evalúan las funciones de

distribución de probabilidades que mejor ajustan según la cantidad de datos y se implementan nuevas pruebas de hipótesis propuestas por Zhang y Wu (2006) para los resultados obtenidos.

Adicionalmente, se pueden plantear nuevas preguntas para determinar posibles relaciones del exponente β con la escala de fluctuación del proceso y la influencia de los ceros en las estimaciones de entropía:

- a. ¿La ‘ley de conservación de la incertidumbre’ propuesta por Vanmarcke puede vincularse a la ‘estabilización’ de la entropía máxima?
- b. ¿La memoria temporal de proceso se puede vincular con el exponente β de la relación potencial Entropía versus Intervalo de agregación?
- c. ¿Existe un vínculo entre la presencia de ceros y la saturación de la entropía para $T > T_{\text{maxent}}$?

En los numerales 2.3.3 y 2.3.4., se estudiará la ley de conservación de la incertidumbre y la presencia de ceros en series de precipitación y sus vínculos con la maximización de la entropía de Shannon.

2.3.2. Funciones de Distribución de Probabilidades

La función de distribución de probabilidades (FDP) que presenta una serie de precipitación agregada a un intervalo T es un factor determinante en la explicación de cómo y porqué se incrementa la entropía hasta un máximo para un determinado intervalo de agregación. Poveda (2011) encuentra que la FDP que mejor ajusta para las series de precipitación en el valle de Aburrá desde la escala de minutos hasta la escala mensual es la función de distribución de probabilidades Generalizada de Pareto (FGP) y hace un análisis detallado de las características matemáticas de dicha FDP como una distribución que maximiza la entropía.

En la presente sección se detallan las (i) funciones de distribución de probabilidades que mejor ajustan a los datos de lluvia para diferentes intervalos de agregación, para esto se utiliza el software easyfit el cual tiene un conjunto de más de 50 funciones de distribución de probabilidades y utiliza las pruebas de bondad de ajuste clásicas Kolmogorov-

Smirnov, Anderson-Darling y Chi-cuadrado (ii) se verifican los ajustes mediante pruebas de bondad de ajuste más potentes basadas en máxima verosimilitud y análogas a las tradicionales Kolmogorov-Smirnov (KS), Cramér-von Mises (W^2) y Anderson-Darling (A^2) (Zhang (2001); Zhang y Wu (2006) y (iii) se comparan los resultados para el periodo de registros común y máximo de las estaciones.

La Figura 2.7., muestra la función de distribución empírica acumulativa para tres estaciones representativas en el valle de Aburrá y el ajuste de la función de Pareto Generalizada desde la escala horaria (1h) hasta la escala diaria (96h). La función de distribución de probabilidades generalizada de Pareto está definida como:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} \left(1 + k \frac{(x-\mu)}{\sigma} \right)^{-1-1/k} & \text{cuando } k \neq 0 \\ \frac{1}{\sigma} \exp \left(-\frac{(x-\mu)}{\sigma} \right) & \text{cuando } k = 0 \end{cases} \quad [2.7]$$

Donde μ , σ y k son los parámetros de localización, escala y forma respectivamente. En la Tabla 2.4., se muestran los parámetros de ajuste para la distribución generalizada de Pareto estimado para el periodo de datos máximo de cada estación. En el Anexo B se muestran los parámetros ajustados para las series en el periodo de datos común entre estaciones y máximo para cada estación. Adicionalmente la tabla muestra los parámetros del ajuste de la distribución FDP para el intervalo de agregación en el cual se alcanza la máxima entropía Tmaxent. Se realizó un experimento tipo montecarlo con 10000 repeticiones para cada estación con el fin de evaluar si una variable aleatoria con FDP Pareto Generalizada con κ , σ y μ del periodo común es estadísticamente igual a una FDP Pareto Generalizada con κ , σ y μ del periodo entero. En cada repetición se utilizó un test Kolmogorov-Smirnov con el fin de comparar las FDP de cada repetición. Los resultados obtenidos indican que en la mayoría de los casos los parámetros κ , σ y μ no cambian con un nivel de significancia $\alpha=0.01$. Para las estaciones del Valle de Aburrá, Caldas, Manantiales y Barbosa el test sugiere que los parámetros cambian. De igual manera para las estaciones Las Palmas y Mesopotamia del Altiplano San Nicolás.

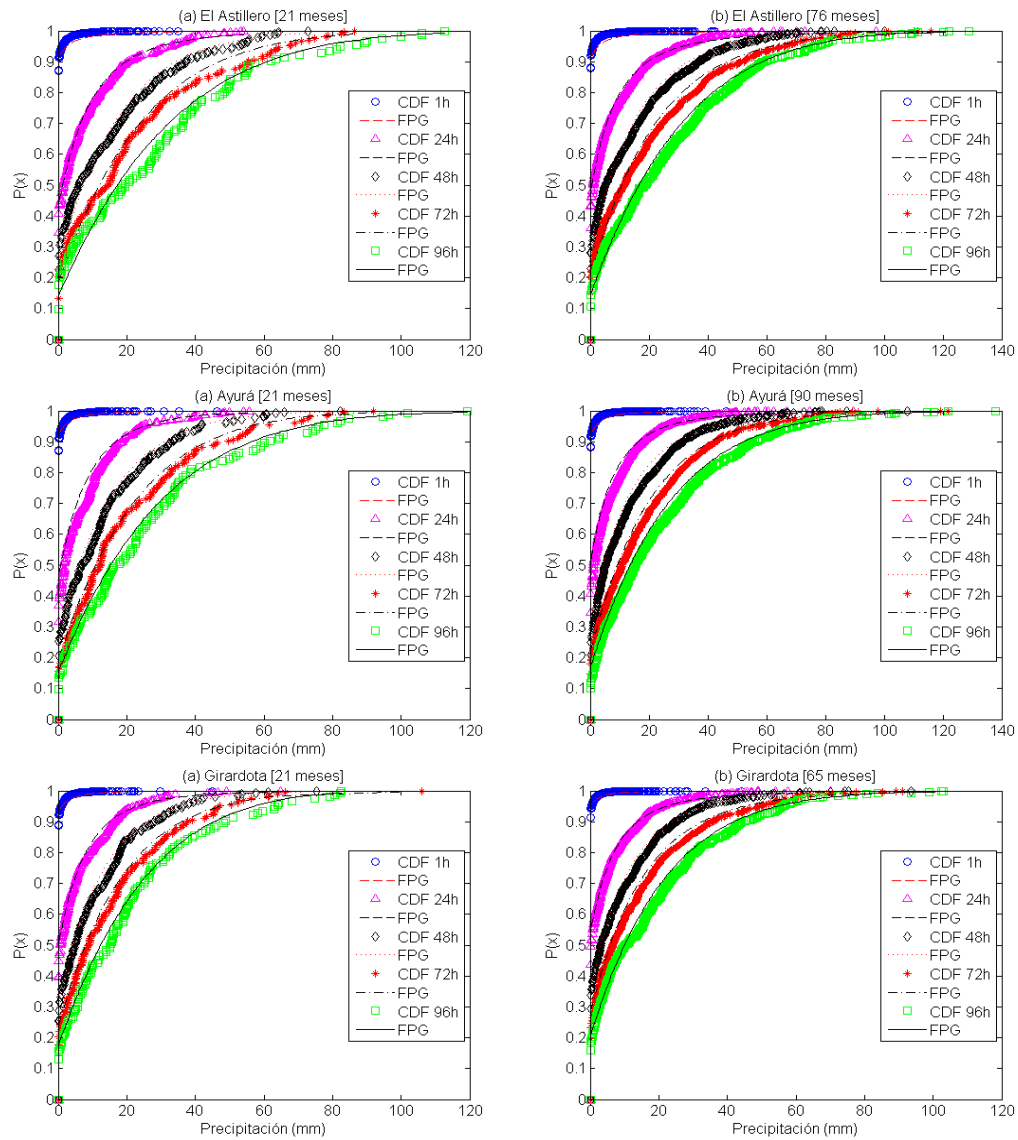


Figura 2.07. Función de distribución de probabilidades empírica acumulativa para diferentes intervalos de agregación y la función de distribuciones de probabilidades Pareto Generalizada ajustada. (a) Ajuste para el periodo común entre estaciones. (b) Ajuste para el periodo máximo de cada estación

2.3.3. Ley de conservación de la incertidumbre

Previo a la presentación de los resultados del estimador de ley de conservación de la incertidumbre $\sigma^2\theta/m^2$, se discutirán los resultados obtenidos respecto a la función de varianza y la escala de fluctuación.

2.3.3.1. Función de Varianza

Se construye la función de varianza para diferentes estaciones del valle de Aburrá y el Altiplano de San Nicolás, para lo cual se utiliza el periodo común de registros sin datos faltantes en todas las estaciones y se replica el proceso utilizando el máximo periodo de registros sin datos faltantes para cada estación. La función de varianza se muestra alrededor de un ajuste potencial de la forma $\gamma(T) = cT^{-\delta}$ con coeficiente de determinación $R^2 > 0.95$ y exponente δ promedio de 0.596 y 0.601 para el periodo de registros común y máximo, respectivamente (ver figura 2.8).

Los valores δ para ajuste potencial $\gamma(T) = cT^{-\delta}$ en todas las estaciones pluviométricas del valle de Aburrá son similares para periodos de registros común ($\delta_{común}$) y máximo ($\delta_{máximo}$), ver Tabla 2.3. Para verificar si la media de $\delta_{común}$ y $\delta_{máximo}$ puede considerarse iguales se utiliza la prueba-t y se evalúa la hipótesis nula que los datos en la diferencia $\delta_{común} - \delta_{máximo}$ son una muestra aleatoria que se distribuye normalmente con media 0 y varianza desconocida, frente a la hipótesis alternativa que la media no es cero. Los resultados del test paramétrico antes descrito sugieren no rechazar la hipótesis nula con un nivel de significancia de 5%. Adicionalmente se realiza un test de significancia para verificar si los exponentes estimados con el periodo común de datos es estadísticamente igual a los exponentes estimados con el periodo entero, los resultados indican que los exponentes δ son estadísticamente iguales con una significancia $\alpha=0.05$.

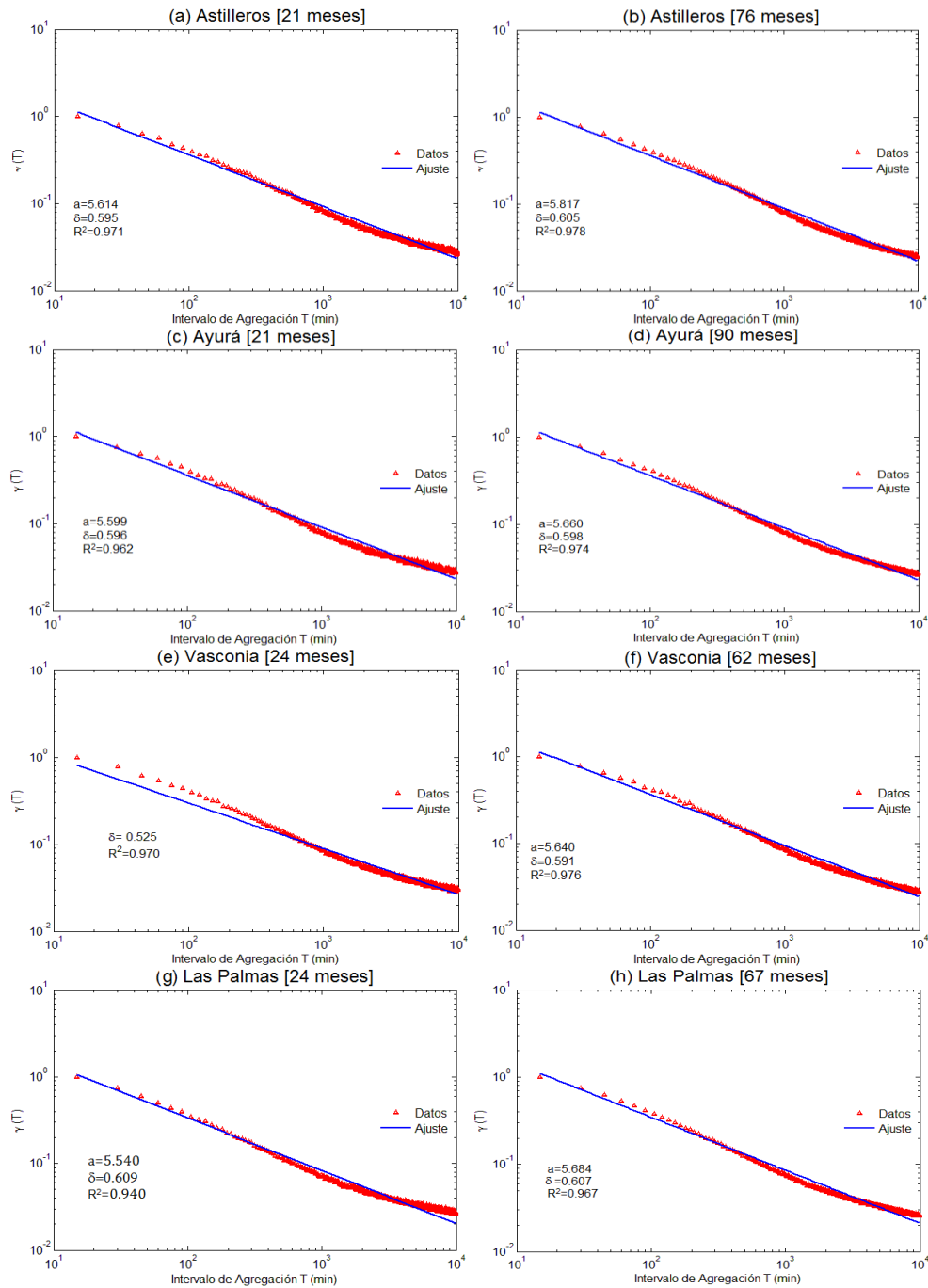


Figura 2.08. Ley potencial para la función de varianza, $Y(T)=cT^\delta$, para las estaciones Astilleros y Ayurá en el Valle de Aburrá. Vasconia y Las palmas en el Altiplano de San Nicolás. (izquierda) periodo común de registros. (derecha) periodo máximo de registros.

2.3.3.2. Escala de Fluctuación

Se cuantifica la escala de fluctuación θ por medio de la función de varianza $Y(T)$ para las estaciones del valle de Aburrá. Para su estimación se utilizaron ventanas de agregación desde $T=30$ minutos hasta $T=9900$ minutos (aproximadamente 7 días). Se puede apreciar mayor dispersión en la estimación de θ para el caso de menor periodo de registros. Para los valores estimados de θ para el periodo común ($\theta_{común}$) y el periodo máximo ($\theta_{máximo}$) de registros, se realiza una prueba-t para evaluar la hipótesis nula que los datos en los vectores $\theta_{común}$ y $\theta_{máximo}$ son variables aleatorias con distribución normal de igual media pero varianza desconocida, frente a la hipótesis alternativa que las medias no son iguales. El resultado de la prueba-t sugiere que no se rechaza la hipótesis nula con un nivel de significancia de 5%. De igual forma el test de Mann-Whitney para “localización” sugiere no rechazar la hipótesis nula. La Figuras 2.9 muestra que la escala de fluctuación no se estabiliza a medida que el intervalo de agregación aumenta, lo que confirma lo encontrado por Poveda (2011) quien estima la escala de fluctuación para estaciones en el valle de Aburrá a partir de la función de auto-correlación encontrando una mezcla de memorias, corta para rezagos menores y larga para rezagos mayores, como resultado un autocorrelograma no-convergente lo que sugiere un proceso de memoria larga. En la Figura 2.10., se presentan los resultados obtenidos para el estimador de la escala de fluctuación y el auto-correlograma evaluado en 3000 min.

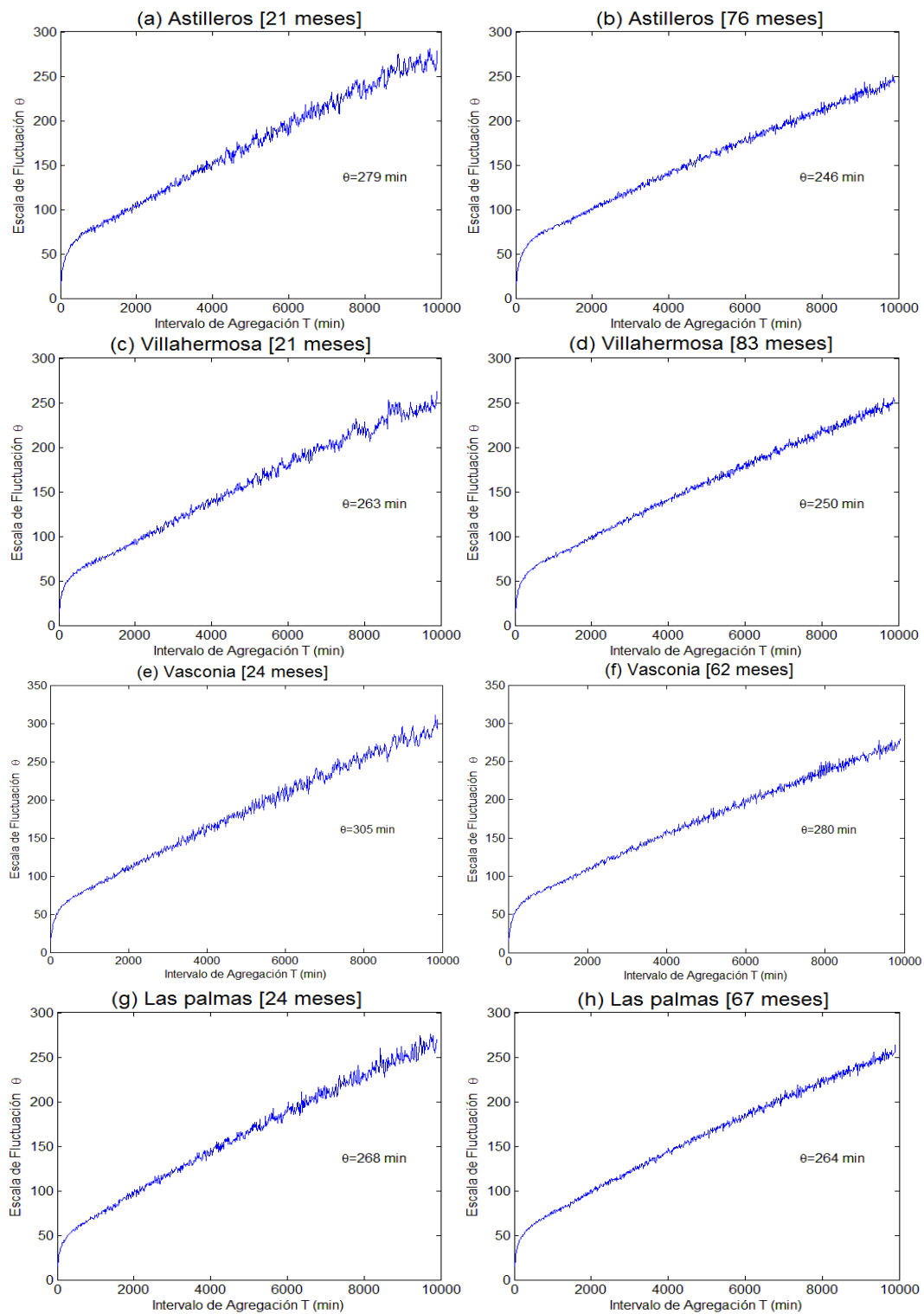


Figura 2.09. Escala de fluctuación estimada a partir de la función de varianza, en las estaciones Astilleros y Villahermosa del Valle de Aburrá. Vasconia y Las palmas del altiplano de San Nicolás. (izquierda) Periodo común. (derecha) Periodo máximo

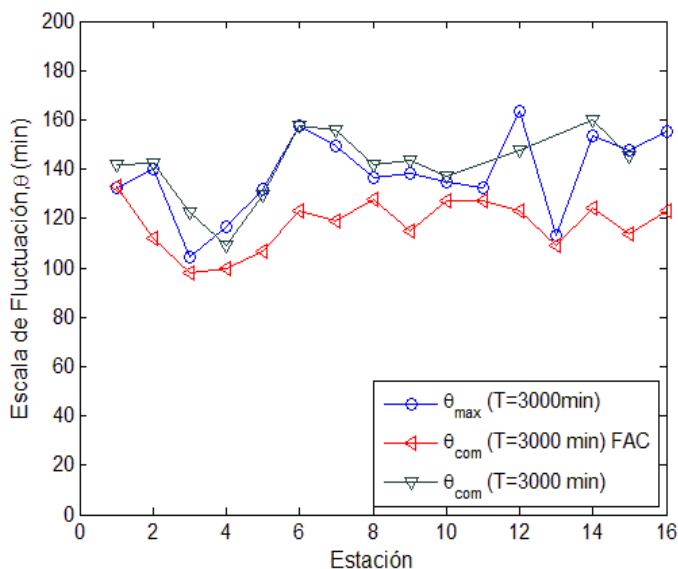


Figura 2.10. Estimador de la escala de fluctuación $\hat{\theta}$ estimado hasta un intervalo de agregación de 3000min. (azul) Estimado a partir de (T) , periodo máximo. (verde) Estimado a partir de (T) , periodo común. (rojo) Estimado a partir de la función de autocorrelación para rezago $\tau = 3000\text{ min}$

2.3.3.3. Sobre el estimador $\sigma^2\theta/m^2$, su invarianza sobre transformaciones lineales y la máxima entropía.

La no convergencia del autocorrelograma conduce a pensar en la lluvia como un proceso de memoria larga. Poveda (2011) sugiere la lluvia como un proceso de memoria mixta debido a que para tiempos de rezago $\tau < 30\text{min}$ se puede considerar un decaimiento exponencial del autocorrelograma mientras que para $\tau > 30\text{min}$ el autocorrelograma decae potencialmente. Para el caso general, la lluvia puede pensarse como un proceso de memoria larga. En otras palabras, el área bajo el autocorrelograma aumentará a medida que se incremente el intervalo de agregación. Por tal razón, no se puede establecer una escala de fluctuación específica para el proceso. Como se mencionó anteriormente, la función de varianza contiene la misma información que la función de autocorrelación, que el espectro de potencias de Fourier normalizado por tanto, la escala de fluctuación no converge y debido a esto no se puede establecer un $\sigma^2\theta/m^2$ que sea invariante a partir de determinado intervalo de agregación. Es decir, como la escala de fluctuación no converge no puede esperarse un estimador invariante $\sigma^2\theta/m^2$. Finalmente, la ley de conservación de la incertidumbre expuesta por Vanmarcke(1988) no puede

relacionarse con la maximización de la entropía y su estabilización a partir de un intervalo de agregación T_{MaxEnt} .

2.3.4. La presencia de los ceros

En esta sección se estudia la “dinámica” de los ceros para diferentes intervalos de agregación y se estudia su comportamiento para los periodos máximos de registro y para los periodos comunes entre estaciones. Se determina el intervalo de agregación a partir del cual desaparecen los ceros en series de lluvia (T_{noz}) y se estudian posibles relaciones entre dicho intervalo de agregación y el intervalo de agregación en el cual se alcanza la máxima entropía (T_{MaxEnt}).

Las Figuras 2.11 y 2.12 muestran el cambio de la cantidad de ceros $\zeta(T)$ para diferentes intervalos de agregación T . Se realizaron ajustes potenciales por tramos los cuales presentan un coeficiente de determinación mayor a 0.95 para todos los ajustes. Como modelos de ajuste se utilizan el Ajuste I y el Ajuste II de la forma,

$$\zeta(T) = aT^\alpha \quad [2.8]$$

$$\zeta(T) = aT^\alpha + c \quad [2.9]$$

para análisis posteriores se llamará α_I y α_{II} a los exponentes para los ajustes referidos, respectivamente. Se realiza una prueba U para evaluar la hipótesis nula que los exponentes α de los ajustes para periodos de registro máximos y comunes tienen la misma media H_0 (Gibbons, 1988; Hollander, 1999). La prueba de hipótesis permite determinar si el cambio del exponente es estadísticamente significativo en la zona de estudio. En la Figura 2.12 panel (a) Las palmas para un periodo común entre estaciones de 24 meses (01/09/2001 a 31/08/2003) se muestra un caso particular. La dinámica de los ceros exhibe dos leyes potenciales de la forma $\zeta(T)=aT^\alpha$ con coeficientes de determinación mayores a 0.98 para todos los intervalos de agregación. Las demás estaciones analizadas exhiben una ley potencial del tipo [2.8] hasta un punto de quiebre que fue detectado aplicando un test U de cambio de la media para pendientes con nivel

de significancia de 5%. A partir del punto de quiebre de pendientes se utiliza el ajuste tipo II.

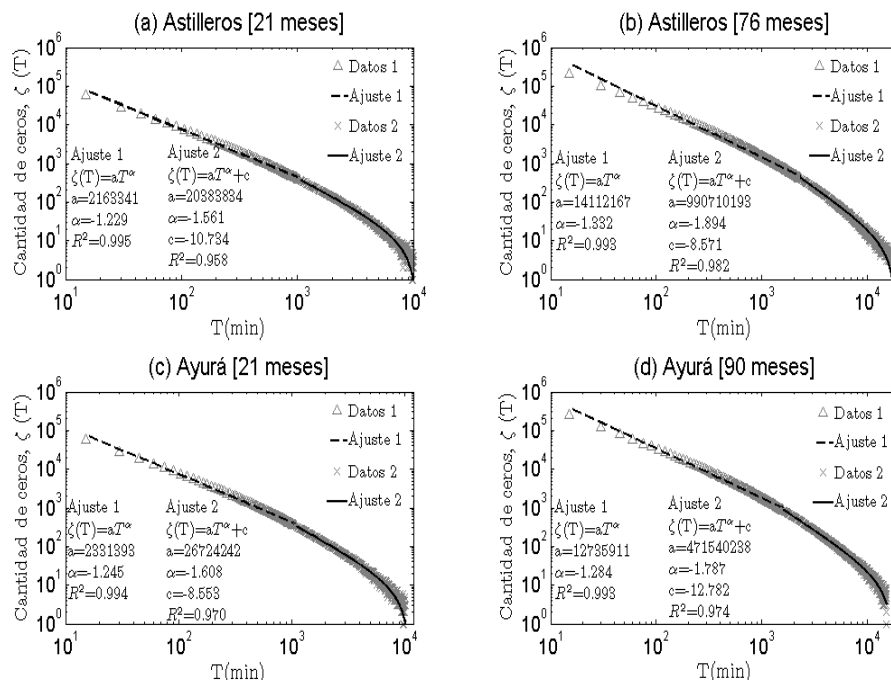


Figura 2.11. Cantidad de ceros $\zeta(T)$ para diferentes intervalos de agregación T en dos estaciones representativas del Valle de Aburrá

Se realizó un test de significancia con el fin de comparar si α_I estimado con el periodo común es estadísticamente igual al α_I estimado para el periodo máximo de registros (Rawlings, 1988). Un test similar fue realizado para los exponentes α_{II} . Los resultados de la prueba de hipótesis indican que los exponentes de escalamiento α no son sensibles a la cantidad de registros. La Figura 2.13 muestra los exponentes de escalamiento para los ajustes tipo I (α_I) y los exponentes de los ajustes tipo II (α_{II}). Se muestran simultáneamente los exponentes de escalamiento para los periodos comunes entre estaciones y los periodos enteros de registros, adicionalmente se indica el valor promedio de los valores estimados. Al lado derecho se indican las estaciones del Altiplano de San Nicolás y al lado izquierdo de la figura se muestran las estaciones del Valle de Aburrá.

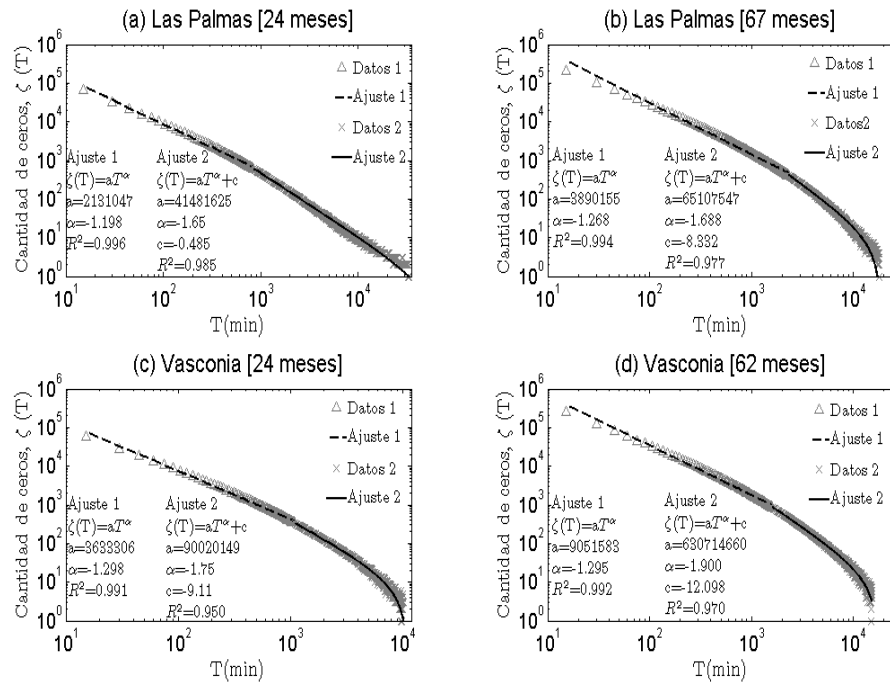


Figura 2.12. Cantidad de ceros $\zeta(T)$ para diferentes intervalos de agregación T dos estaciones representativas del Altiplano de San Nicolás

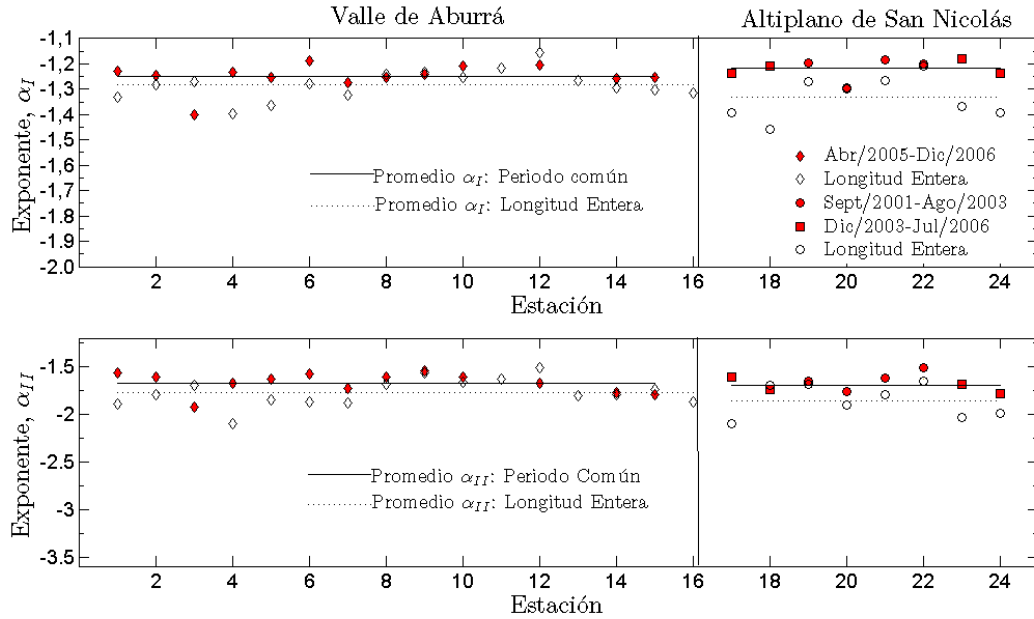


Figura 2.13. Exponentes de escalamiento para las leyes potenciales de cantidad de ceros $\zeta(T)$ en diferentes intervalos de agregación T . α_I indica el exponente de la ley potencial de la forma $\zeta(T)=aT^\alpha$ y α_{II} indica el exponente de la ley potencial de la forma $\zeta(T)=aT^\alpha+c$

Con el fin de evaluar la influencia de los ceros en las estimaciones de entropía de Shannon la Figura 2.14 muestra la simultáneamente la cantidad de ceros $\zeta(T)$ y la entropía de Shannon $S(T)$ en múltiples intervalos de agregación T . La figura sugiere una posible relación entre el intervalo de agregación donde desaparecen los ceros (T_{noz}) y el intervalo de agregación donde la entropía se maximiza (T_{MaxEnt}).

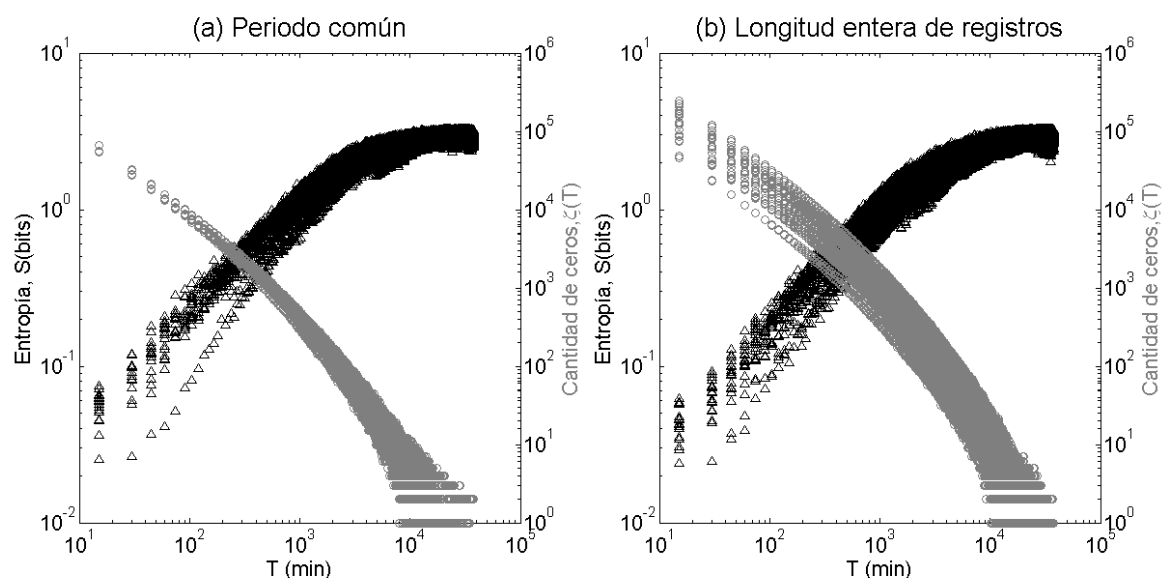


Figura 2.14. Valores de estimados de entropía, $S(T)$ (Triángulos) y Cantidad de ceros, $\zeta(T)$ (círculos) como función del intervalo de agregación, T , para todas las estaciones del Valle de Aburrá y el altiplano de San Nicolás

La figura 2.15 muestra la relación entre el intervalo de agregación donde desaparecen los ceros, T_{noz} , y el intervalo de agregación donde se alcanza la máxima entropía, T_{MaxEnt} . Se encuentra una relación de tipo potencial con coeficiente de determinación, $R^2 > 0.52$ de la forma $T_{MaxEnt}(T_{noz}) = aT_{noz}^n$. En la figura se evidencia que al utilizar los periodos máximos de registros sin datos faltantes de las series de precipitación el intervalo de agregación donde desaparecen los ceros, T_{noz} , y el intervalo de agregación donde se alcanza la máxima entropía, T_{MaxEnt} son mayores a los estimados para el periodo común entre estaciones. Considerando que los periodos comunes entre estaciones son más cortos que los periodos enteros de registros. Que la entropía de Shannon alcance el máximo más rápidamente con el periodo común de registros puede ser explicado por la presencia de ceros, en relación con la variabilidad interanual asociada con las fases del El Niño/Oscilación del sur (ENSO): El Niño (Fase Cálida), y La Niña (Fase Fría) (Poveda

& Mesa, 1997; Poveda, 2011). En general, Colombia experimenta anomalías negativas en la lluvia anual, semi-anual, mensual y horaria durante El Niño, y anomalías positivas durante La Niña. Por lo tanto, es de esperar que la estimación de la entropía y la cantidad de ceros para diferentes intervalos de agregación dependa del número e intensidad de los eventos El Niño y La Niña de la longitud entera de registros continuos sin datos faltantes. La disminución de los ceros durante el proceso de agregación ocurre más lento durante El Niño que durante La Niña debido a los largos periodos secos, es decir, $T_{noz}(\text{El Niño}) > T_{noz}(\text{La Niña})$. La Figura 2.16 confirma lo dicho para la estación Ayurá en el evento El Niño 01/Junio/2006-31/Mayo/2007 y el evento La Niña 01/Junio/2007-31/Mayo/2008.

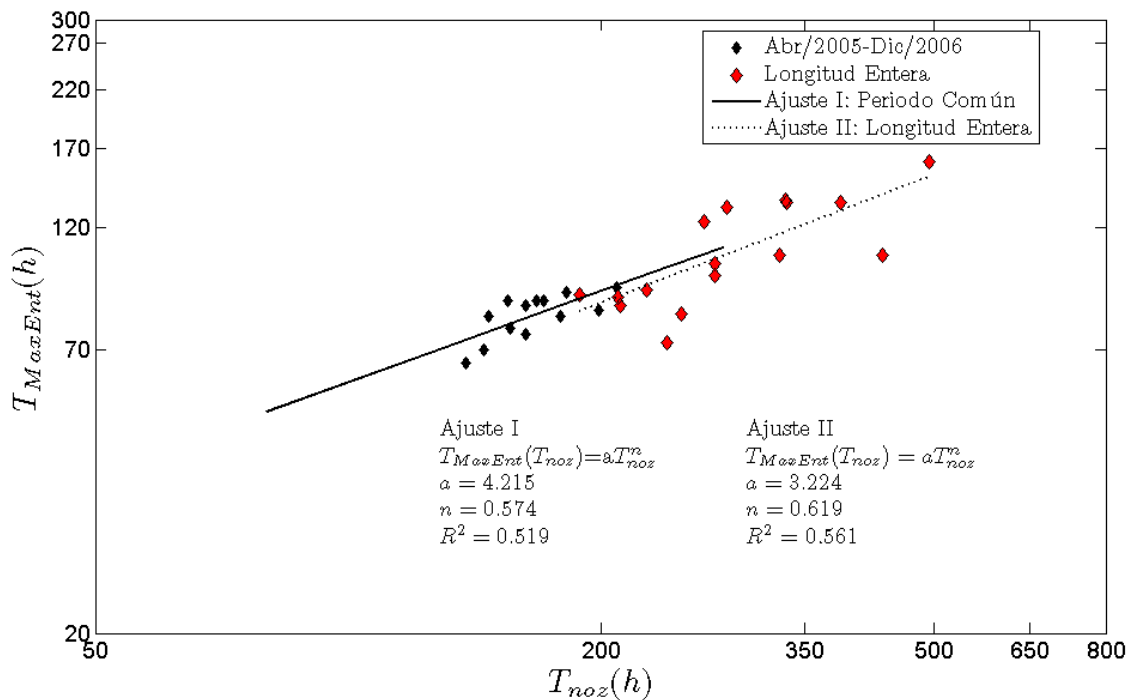


Figura 2.15. Relación entre las escalas de tiempo al cual desaparecen los ceros (T_{noz}) y se alcanza la máxima entropía (T_{MaxEnt}), usando el periodo común y la longitud entera de registros para las estaciones del Valle de Aburrá y el Altiplano de San Nicolás

Según lo estudiado en esta sección se concluye que la presencia de los ceros en series de lluvia de alta resolución es fundamental para explicar la maximización de la entropía de Shannon a partir del intervalo de agregación T_{MaxEnt} . Recurriendo

a la definición de entropía (sección 1.5.1.), series de alta resolución (series en las que la mayoría de los datos son ceros) producen estimativos de entropía bajos y a medida que se aumenta la ventana de agregación, T , los ceros empiezan a desaparecer causando como resultado el aumento de la entropía. La Figura 2.16 muestra la estimación entropía en múltiples intervalos de agregación para la estación Ayurá en una serie de resolución mensual. Nótese que el exponente de escalamiento $\beta \approx 0$.

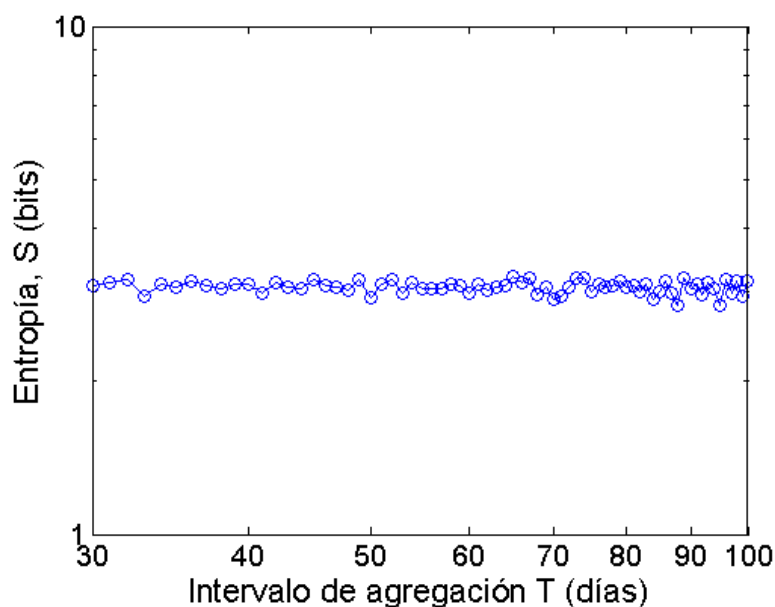


Figura 2.16. Entropía, S , en función del intervalo de agregación, T , en lluvias de resolución mensual para la estación Ayurá del Valle de Aburrá

Sobre la cantidad de ceros en múltiples en intervalos de agregación se encuentran características estadísticamente invariantes ante variabilidad climática (particularmente ENSO) y la cantidad de información disponible para su estimación. La cantidad de ceros $\zeta(T)$ en diferentes intervalos de agregación, T , exhibe dos regímenes de escalamiento separados alrededor de $T_c=17$ h para los periodos comunes y $T_c=28$ h para los periodos enteros. Los regímenes de escalamiento fueron caracterizados por dos leyes potenciales (ecuaciones [2.8] y [2.9]), el exponente estimado de cada ley potencial se muestran estadísticamente invariante ante la cantidad de registros.

2.3.5. Una Medida Estadística de Complejidad

A continuación se muestra la implementación de la medida estadística de complejidad basada en la entropía de Shannon y el concepto de desequilibrio (López-Ruiz, et al., 1995) en series de precipitación. La Figura 2.17 muestra el comportamiento de la complejidad para diferentes intervalos de agregación T así como la entropía normalizada y desequilibrio. Ecuaciones [2.5] y [2.6]

La Figura 2.18 muestra el comportamiento promedio en el espacio log-log de la complejidad para todas las estaciones del Valle de Aburrá con periodo de registro común. Para un intervalo de agregación T_{Cmax} la complejidad es máxima (C_{max}), sin embargo, puede notarse en la Figura 2.19 que la complejidad máxima (C_{max}) es similar en todas las estaciones y es levemente sensible al periodo de registros utilizado para el cálculo mientras el intervalo de agregación en el cual se obtiene la máxima complejidad cambia notoriamente.

Una característica relevante de la medida estadística de complejidad estudiada en esta sección es que para un mismo valor de entropía se pueden obtener diferentes valores de complejidad en una misma serie, esta particularidad de la medida de complejidad dificulta los análisis. Sin embargo, para las estaciones de precipitación en las cuales se implementó esta manera de cuantificación de la complejidad se utiliza siempre como punto de referencia la complejidad máxima estimada.

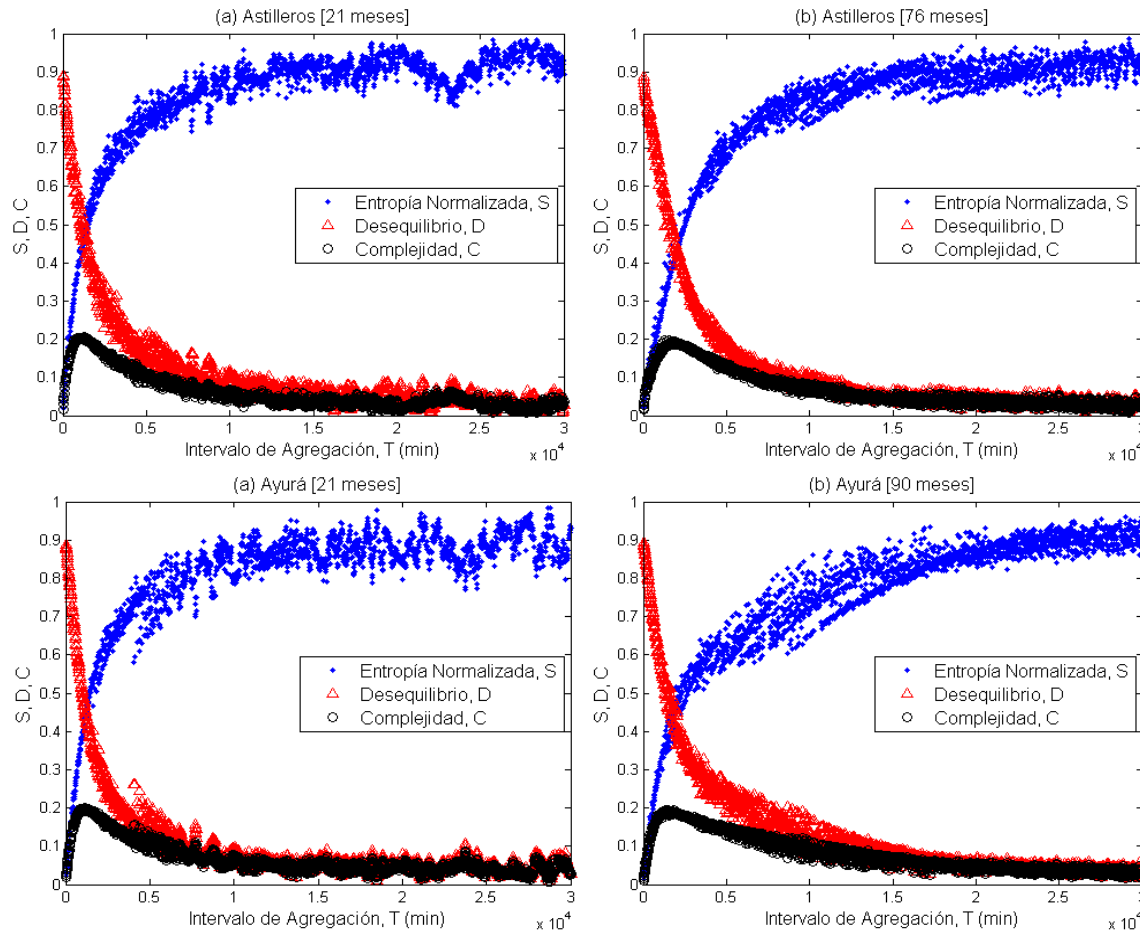


Figura 2.17. Medida estadística de complejidad para dos estaciones representativas del Valle de Aburrá. (a) periodo común de registros. (b) Periodo máximo de registros

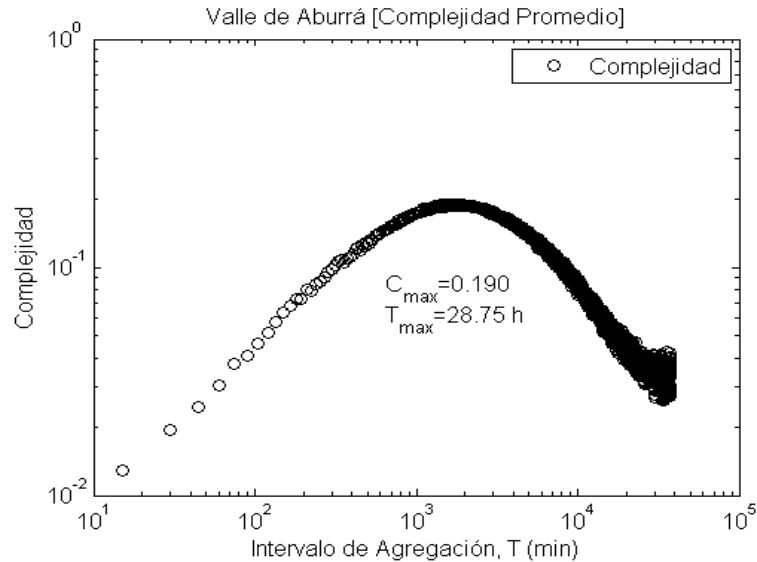


Figura 2.18. Complejidad promedio para las estaciones del valle de Aburrá utilizando el periodo de registros común entre estaciones

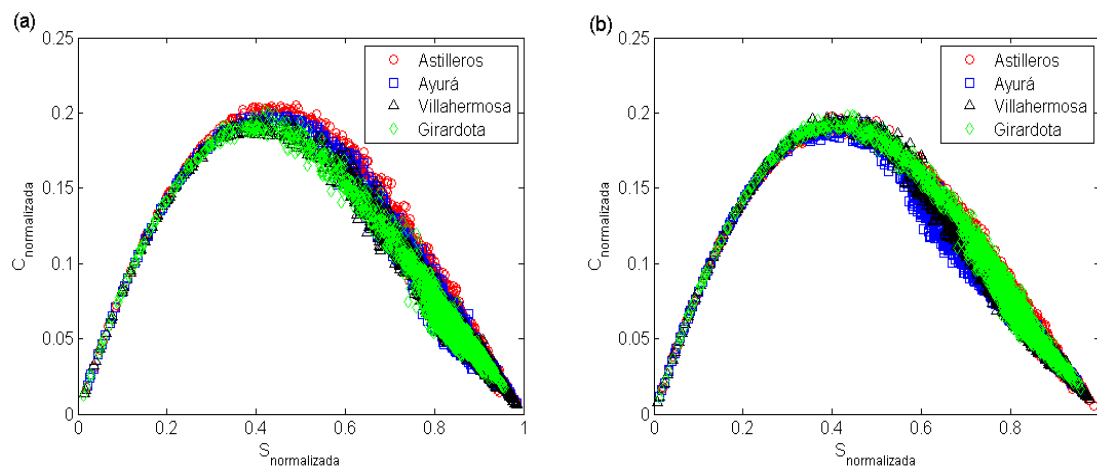


Figura 2.19. Relación entre Complejidad normalizada y entropía normalizada para cuatro estaciones representativas en el valle de Aburrá. (a) Periodo común de registros entre estaciones. (b) Periodo máximo de registros de cada estación

Para las estaciones del Valle de Aburrá, la evaluación de la hipótesis nula de igualdad en la media de los valores de Complejidad máxima promedio del periodo común y el periodo máximo de registros mediante el test de Mann-Whitney indica no rechazar la hipótesis nula con un nivel de significancia de 5% (valor $p=0.379$).

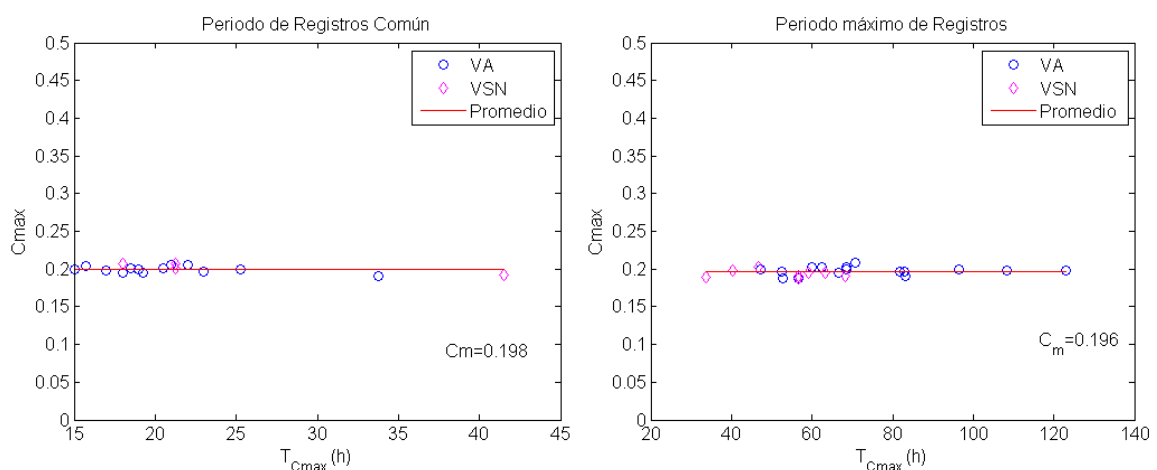


Figura 2.20. Complejidad máxima e intervalo de agregación donde se alcanza la máxima complejidad para todas las estaciones del valle de Aburrá (VA) y el altiplano de San Nicolás (VSN).

Tabla 2.4. (Columna 3 y 4) Complejidad máxima normalizada, C_{max} . (Columnas 5 y 6) Intervalo de agregación donde se alcanza la Complejidad máxima normalizada, T_{Cmax} . (Columnas 7, 8 y 9) Parámetros de forma, escala y localización (respectivamente) de la función de distribución de probabilidades generalizada de Pareto para el intervalo de agregación donde se alcanza la máxima entropía

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Fila **		Máximo	Común	Máximo	Común		Máximo	
ID	Estación	C_{max}	C_{max}	T_{Cmax}	T_{Cmax}	k	σ	μ
1	El Astillero	0,198	0,205	22	21	-0,209	38,930	-3,115
2	Ayurá	0,195	0,199	25	19	-0,252	39,753	-1,631
3	Caldas	0,203	0,194	18	18	-0,208	28,472	-1,150
4	San Antonio	0,188	0,200	20	15	-0,213	33,006	-0,478
5	Villahermosa	0,197	0,195	24	19	-0,261	36,018	-1,575
6	Girardota	0,199	0,202	33	21	-0,099	29,858	-1,416
7	Chorrillos	0,196	0,204	25	16	-0,126	25,868	-1,686
8	El Convento	0,202	0,206	18	22	-0,290	30,564	-1,658
9	Aguinaga	0,200	0,201	22	19	-0,021	21,858	-0,058
10	San Cristóbal	0,197	0,200	29	25	-0,200	34,920	-1,742
11	Cucaracho	0,198	-----	31	-----	-0,182	37,949	-1,918
12	Manantiales	0,208	0,196	29	23	0,038	19,044	-2,078
13	Niquía	0,191	-----	34	-----	-0,206	29,020	-1,791
14	San Andrés	0,188	0,191	26	34	-0,141	27,955	-0,884
15	Barbosa	0,202	0,199	19	17	-0,010	22,569	-0,738
16	Gabino	0,200	-----	20	-----	-0,077	40,651	-3,867
17	La Fe	0,195	0,203	22	35	-0,217	34,694	-2,652
18	La Severa	0,191	0,190	26	25	-0,151	28,683	-1,572
19	Las Palmas	0,195	0,207	27	21	-0,208	35,810	-1,994
20	Vasconia	0,188	0,207	30	18	-0,107	32,040	-2,144
21	El Retiro	0,202	0,201	22	21	-0,167	27,030	-1,315
22	La Mosca	0,190	0,191	38	42	-0,105	23,743	-1,918
23	Mesopotamia	0,189	0,189	16	38	-0,110	25,559	-0,554
24	La Unión	0,198	0,205	13	27	-0,335	28,364	-1,222

Fila ** Máximo: Periodo máximo de registros continuos sin datos faltantes para cada estación (incluyendo ceros).
Común: Periodo común de registros continuos sin datos faltantes para todas las estaciones (incluyendo ceros).

2.3.6. Sobre un método de desagregación temporal basado en la Entropía de Shannon

Con el fin de *explorar la implementación de un método de desagregación temporal basado en el concepto de entropía de Shannon* se analizan características de escala horaria de la lluvia en el Valle de Aburrá, las funciones de distribución de probabilidades

que mejor se ajustan a los datos, la entropía de Shannon en diversos intervalos de agregación y la distribución de Pareto Generalizada. Aunque no se logra plantear un método de desagregación consistente con las características de entropía en múltiples intervalos de agregación. Los resultados planteados a continuación ponen en evidencia las dificultades que se presentan al tratar de modelar la alta variabilidad de lluvia en la escala horaria.

Depuración de Bases de Datos: Se analizan 16 estaciones pluviométricas ubicadas en el valle de Aburrá con resolución temporal de 60 min. Con el fin de obtener el mayor periodo común de registros sin datos faltantes, no se consideran las estaciones; Manantiales, Barbosa y Gabino, pues de considerarse el periodo común es de 14 meses (2004-08-01 hasta 2005-09-30), mientras que sin tener en cuenta dichas estaciones el periodo común sin datos faltantes para las 13 estaciones es de 24 meses (2004-01-01 hasta 2005-12-31).

Tabla 2.5. Información de estaciones pluviométricas consideradas en el análisis de periodo común sin datos faltantes.

Zona	Número de Estación	Código	Nombre	Coordenadas		Elevación (msnm)	Municipio
				Este	Norte		
Valle de Aburrá	1	2701115	El Astillero	823,149	1,183,900	2420	Medellín
	2	2701093	Ayurá	835,380	1,173,830	1750	Envigado
	3	2701036	Caldas	828,568	1,160,480	1930	Caldas
	4	2701038	San Antonio de Prado	824,660	1,175,940	2000	Medellín
	5	2701045	Planta Villa Hermosa	837,340	1,183,990	1690	Medellín
	6	2701056	Girardota	847,680	1,197,760	1350	Girardota
	7	2701035	Chorrillos	842,280	1,188,220	2370	Medellín
	8	2701122	El Convento	841,160	1,192,500	1580	Copacabana
	9	2701047	Miguel de Aguinaga	834,980	1,184,470	1549	Medellín
	10	2701046	San Cristóbal	827,560	1,186,550	1890	Medellín
	11	2701114	Cucaracho	830,566	1,186,900	1830	Medellín
	12	2701076	Niquía	838,960	1,196,780	2150	Bello
	13	2701053	Alto de San Andrés	849,139	1,203,400	2240	Girardota

Características generales:

- Desagregación de la escala temporal diaria (24 h) a escala horaria (1h).
- Se utilizan 13 estaciones en el Valle de Aburrá (Periodo común 2 años)
- Se examinan las PDFs que mejor se ajustan desde 1h hasta 24h.
- Se plantean las preguntas de investigación: ¿Se pueden estimar los parámetros de la PDF de resolución 1h conociendo los parámetros de la PDF de resolución 24h?, ¿Es posible construir una serie sintética de resolución 1h tal que S ($1h \leq T \leq 24h$) presente características comparables con las series de lluvia?

Funciones de distribución de probabilidades

Con el periodo común sin datos faltantes citado anteriormente y haciendo uso del software **easyfit** se obtiene la función de distribución de probabilidades que mejor se ajusta al conjunto de datos, se analizan los registros de lluvia agregados desde 1 hora hasta 24 horas. Para series agregadas a resolución de 2 horas hasta 24 horas la función de distribución de probabilidad que mejor ajusta al conjunto de datos es la **Función de Pareto Generalizada (FGP)**. La Figura 2.21 muestra el valor de los parámetros k , σ y μ de la FGP para diferentes intervalos de agregación, T .

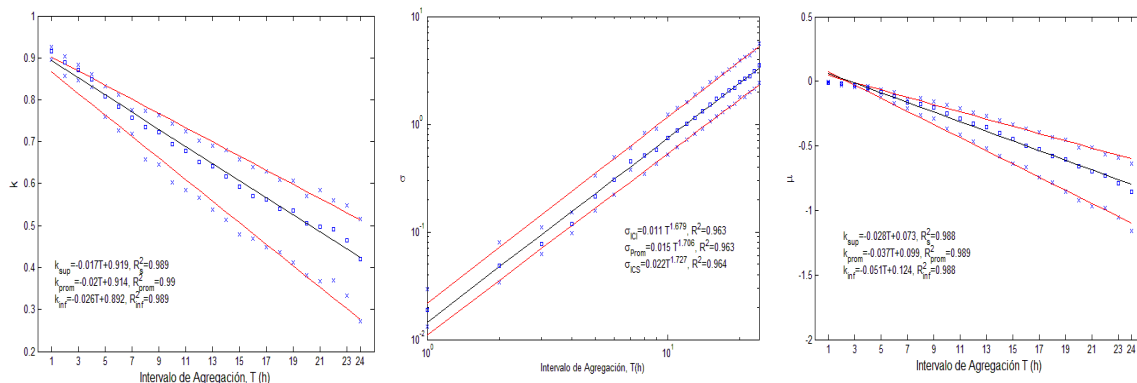


Figura 2.21. Parámetros k , σ y μ para la Función de Pareto Generalizada.

Se utiliza un proceso de llegada tipo Poisson para simular los eventos de lluvia. Para cada evento (Poisson) se genera una variable aleatoria con Función de Pareto Generalizada y parámetros k , σ y μ de resolución 1h. La Figura 2.22 muestra dos series de lluvia, una simulada de la manera mencionada y una real.

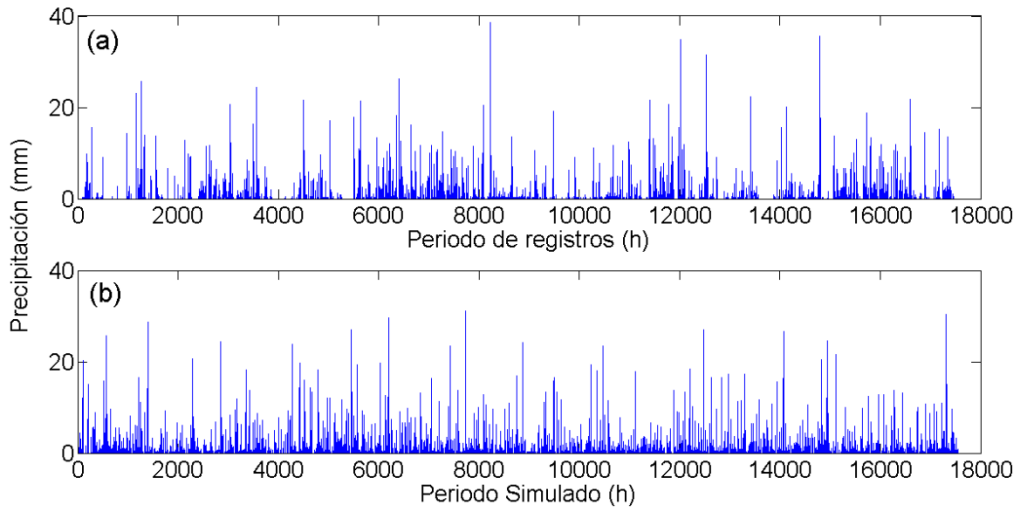


Figura 2.22. (a) Estación Astillero, periodo 01/01/2004 a 31/12/2005. (b) Serie Simulada. El cálculo de la cantidad de ceros y la entropía de Shannon en múltiples escalas evidencia que existen grandes diferencias entre las series simuladas y las series reales. La Figura 2.23. muestra el comportamiento general de un conjunto de 10000 series simuladas.

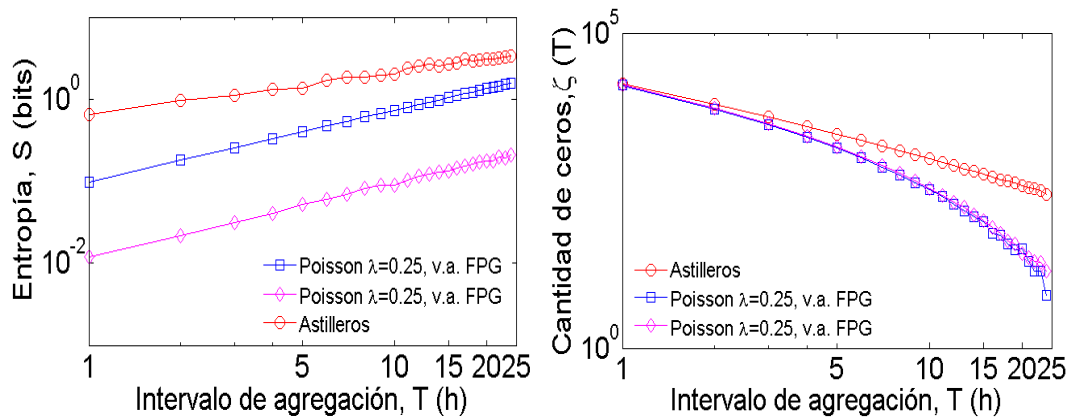


Figura 2.23. (izquierda) Entropía S para diferentes intervalos de agregación, T . (derecha) Cantidad de ceros ξ para diferentes intervalos de agregación, T .

2.3.7. Patrones Geográficos

La distribución geográfica de los parámetros cuantificados se analiza con el fin de buscar posibles patrones geográficos y vínculos entre dichos estadísticos con la orografía de la zona de estudio. Las dificultades de utilizar información puntal (pluviométrica) en vez de información distribuida es uno de los aspectos relevantes, sin embargo, la exploración de los vínculos orografía-lluvia es importante en el caso particular de la zona de estudio debido a que esta zona reúne las características apropiadas para el estudio hidrológico en zonas tropicales de montaña. En el Anexo B se muestra la distribución geográfica de los estimados de máxima entropía S_{MaxEnt} , intervalo de agregación en los cuales se alcanza la máxima entropía T_{MaxEnt} , pendientes del ajuste potencial de la forma $S(T) = cT^\beta$ para la entropía en múltiples intervalos de agregación T , intervalo de agregación en el cual desaparecen ceros T_{nozi} , exponentes de las leyes potenciales tipo I ($\zeta(T)=aT^\alpha$) y tipo II ($\zeta(T)=aT^\alpha+c$) en la 'dinámica' de los ceros, distribución geográfica de los estimativos de complejidad y los intervalos de agregación donde la complejidad es máxima. La conclusión general es que no se encuentra un patrón regional emergente en la distribución geográfica de los parámetros estudiados lo que reafirma la fuerte variabilidad de la precipitación en zonas tropicales de montaña.

3. Propiedades de Escalamiento Espacial en Sistemas Convectivos de Mesoescala Según la Misión TRMM Durante 2003-2010

Los análisis realizados en este capítulo se presentan en el siguiente orden. En la sección 3.1., se detalla la información utilizada y las características de la región de estudio. En la sección 3.2., se presentan los métodos de análisis; (i) función de escalamiento de momentos, (ii) espectro isotrópico de Fourier y (iii) función de q -entropía espacial generalizada. La sección 3.3., da a conocer los resultados y el análisis de los mismos.

3.1. Datos y Características de la Región de Estudio

Las características orográficas de los Andes tropicales de Colombia, la cuenca del río Amazonas y los complejos procesos de interacción océano-atmósfera-continente hacen de la región de estudio un área de especial interés para avanzar en el entendimiento de la dinámica espacio-temporal de la precipitación. Entre las particularidades de esta región se encuentran: La incidencia de la cuenca amazónica en la regulación del clima global, el efecto de los gradientes topográficos en los patrones de circulación que fortalecen y focalizan la convección profunda, la intermitencia de la lluvia en el espacio y el tiempo en zonas tropicales de montaña, además de la influencia de procesos de gran escala como el ENSO y las ondas tropicales del este (Poveda et al., 2005; Zhou & Wang, 2006; Stensrud, 2007; Poveda, 2011).

La información utilizada en el presente capítulo proviene de las mediciones satelitales del proyecto “*Misión para la Medición de la Lluvia Tropical*” (TRMM por sus siglas en inglés, Tropical Rainfall Measuring Mission), misión conjunta entre Estados Unidos y Japón que tiene por objeto medir la precipitación en los trópicos mediante sensores remotos. El satélite tiene una órbita circular no sincronizada con el sol, se encuentra a una altura de 350km y posee una inclinación de 37° con el ecuador.

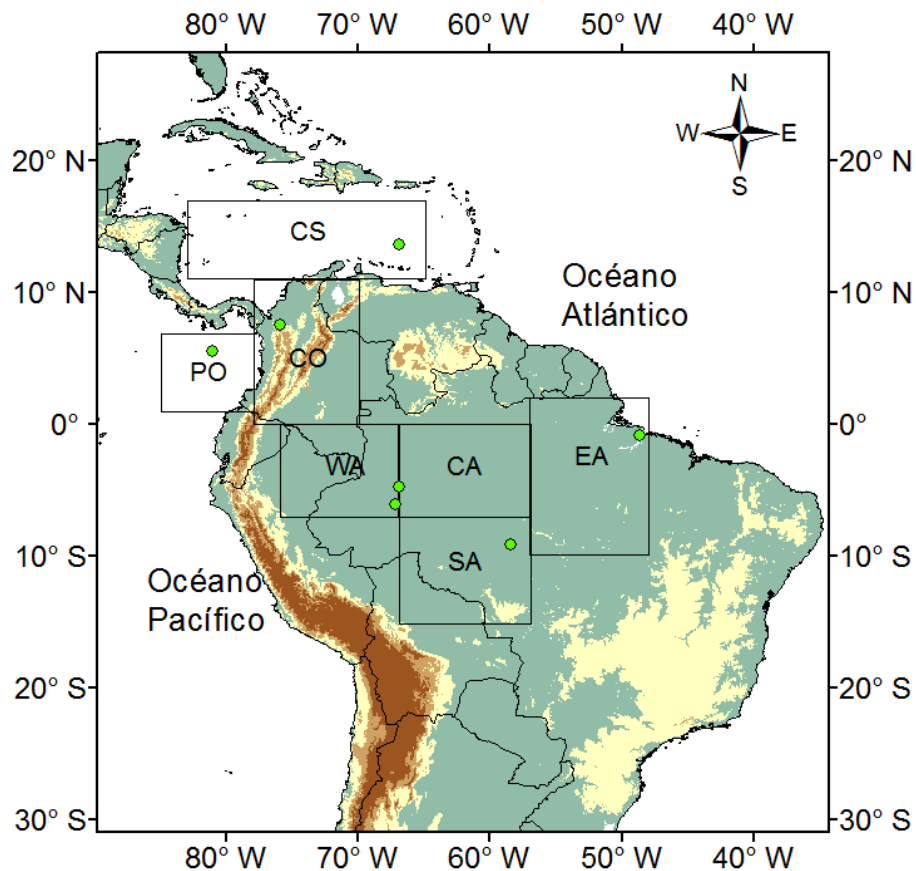


Figura 3.01. Región de estudio y localización de los eventos de lluvia en sistemas convectivos de meso-escala de mayor intensidad-área encontrados para el periodo 2003-2010

Las orbitas del TRMM están diseñadas de tal manera que brinden información de cada punto a una hora local diferente entre las latitudes 35°S y 35°N, pasando sobre un mismo punto a la misma hora del día cada 48 días, característica que permite análisis de ciclo diurno de la precipitación. La misión TRMM tiene información desde 1998 hasta la actualidad. Los datos empleados provienen de los instrumentos “Radar de Precipitación” (PR) e “Imágenes de Microondas de TRMM” (TMI) los cuales se detallan en Kummerow et al., (1998). El análisis que se presenta corresponde al periodo 2003-2010 y el proceso de clasificación de la información sobre los sistemas convectivos se describe en detalle en el trabajo de Jaramillo (2012).

Para cada sub-zona de estudio se seleccionaron cinco SCM por año basados en criterios de máxima intensidad y área, como resultado se elige un total de 280 SCM para el periodo 2003-2010 de los cuales se escoge para cada zona el campo de mayor

intensidad y tal que su extensión en km^2 permita extraer matrices de igual resolución con el fin de facilitar comparaciones en el análisis de las propiedades de escalamiento espacial. La Tabla 3.1., describe los límites de las sub-zonas de estudio. Adicionalmente, la Figura 3.1., muestra la localización del SCM escogido bajo el criterio antes mencionado mientras la Tabla 3.2., detalla las características de estos eventos.

Tabla 3.1. Detalle de la región de estudio. Límites de las sub-zonas

Región de Estudio	Latitud	Longitud
Amazonia Central	7° S – 0° N	67° W – 57° W
Este de la Amazonia	10° S – 2° N	57° W – 48° W
Sur de la Amazonia	15° S – 7° S	67° W – 57° W
Amazonia Occidental	7° S – 0° N	76° W – 67° W
Colombia	0° N – 11° N	78° W – 70° W
Océano Pacífico	1° N – 7° N	85° W – 78° W
Mar Caribe	11° N – 17° N	83° W – 65° W

Tabla 3.2. Información de los SCM de mayor extensión (en km^2) para el periodo 2003-2010

Nombre de la Sub-zona	ID	Fecha	Hora LTC	Área (km^2)	Centroide		Intensidad	
					Latitud	Longitud	Mínima (mm/h)	Máxima (mm/h)
Amazonia Central	CA	2003/ENE/25	0000	155.025	-4.724	-66.880	0.861	58.244
Amazonia Este	EA	2010/FEB/12	0300	155.100	-0.826	-48.665	0.701	107.083
Sur Amazonia	SA	2009/FEB/17	0600	133.725	-9.106	-58.398	0.509	55.688
Amazonia Oeste	WA	2005/NOV/20	0600	168.650	-6.103	-67.182	0.423	85.413
Océano Pacífica	PO	2006/OCT/13	0700	142.900	5.534	-81.130	0.359	85.658
Colombia	CO	2008/JUN/25	0400	106.600	7.533	-75.929	0.549	75.605
Mar Caribe	CS	2008/OCT/15	1000	147.150	13.598	-66.907	0.441	54.027

3.2. Métodos

3.2.1. Espectro de potencias de Fourier para campos 2D

La variabilidad de la lluvia en múltiples escalas espaciales puede ser analizada por medio del espectro de potencias de Fourier. Esta potente herramienta, debido a su alto costo computacional, se suele implementar haciendo uso de los algoritmos de la “Transformada Rápida de Fourier” (FFT), en vez de la tradicional “Transformada discreta de Fourier” (Press et al., 2007). En general, diversas investigaciones han encontrado en los exponentes de escalamiento del espectro de Fourier una fuente de información clave sobre la dinámica de fenómenos altamente complejos, un clásico ejemplo fue el implementado por el matemático Andrei N. Kolmogorov (1941) quien derivó la conocida relación $E(k) \sim k^{-5/3}$ cuya interpretación física es que la energía cinética de los movimientos de gran escala (giros o remolinos) es sucesivamente subdividida y redistribuida con el incremento de las componentes del número de onda. En particular, el exponente $\beta=5/3$ aporta información de la tasa de transferencia de energía cinética desde escalas mayores a menores conservando la energía cinética promedio por unidad de masa y por unidad de tiempo (Kolmogorov, 1941a, 1941b; Frish, 1995; Ball, 2005).

En la investigación científica y en particular en geociencias se ha introducido el análisis espectral de Fourier para el estudio de diversos fenómenos, encontrando que muchos presentan una ley de decaimiento potencial de la forma,

$$E(k) = ck^{-\beta} \quad [3.1]$$

donde k es el número de onda (inverso de la escala espacial), c es el prefactor y β es el exponente de escalamiento (Korvin., 1992; Mandelbrot., 1998).

El parámetro β se estima como la pendiente de la regresión entre los valores muestrales de $E(k)$ y k , en el espacio log-log y es una forma de cuantificación de la rugosidad. Para esta pendiente β , los valores altos se vinculan con campos aleatorios suaves (o con alta correlación espacial) mientras los valores bajos se asocian a campos aleatorios de baja correlación espacial (Davis., 1996; Harris et al., 1996). En el estudio de fenómenos

geofísicos, los exponentes de escalamiento β reflejan diferentes tipos de memoria estadística y la escala de fluctuación inherente a su estructura de correlación espacial o temporal (Korvin, 1992; Mesa & Poveda, 1993; Mandelbrot, 1998, Poveda & Salazar, 2004). Algunos ejemplos recientes de aplicación del espectro de potencias de Fourier en diversas áreas de las geociencias son (i) el estudio de la variabilidad anual e interanual de las propiedades de escalamiento espacial de índices de vegetación en la Amazonia (Poveda & Salazar, 2004), (ii) Propiedades de escalamiento espacial en campos de lluvia amazónica durante la campaña WETAMC/LBA (Morales y Poveda, 2009), (iii) Filtrado de información de lluvia de radar (Pegram et al., 2011) y (iv) porosidad superficial del suelo (Cheng, et al., 2012).

Para el análisis de campos de lluvia en Sistemas Convectivos de Meso-escala el espectro de potencias de Fourier bi-dimensional ha sido implementado mediante el llamado “*espectro de potencias isotrópico*” (ecuación 2.2), en el cual la palabra “*isotropía*” no se refiere a que el campo de precipitación sea isotrópico sino a que el espectro de energía es promediado angularmente alrededor de $k_x=k_y=0$ integrando así la anisotropía y facilitando las comparaciones.

$$E(k) = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \quad [3.2]$$

En la literatura pueden encontrarse numerosos estudios dan evidencia de escalamiento del espectro de potencias de los campos de lluvia en el espacio y tiempo (Lovejoy & Schertzer., 1987; Menabde et al., 1997; Harris et al., 2001; Mejía, 2002; Zuluaga & Poveda, 2005; Morales & Poveda, 2009).

3.2.2. Análisis de Escalamiento de Momentos

La intermitencia espacial de un campo aleatorio puede ser cuantificada mediante el análisis de la función de escalamiento de momentos. Esta herramienta permite definir el tipo de escalamiento espacial que presenta el campo (simple o múltiple) y proporciona información importante sobre el comportamiento estadístico del proceso en diferentes escalas (Over y Gupta, 1994; Harris et al., 2001). Bajo este enfoque, se define como auto-semejanza estadística a la similitud estadística de un campo aleatorio en un rango de escalas espaciales y se denomina al *escalamiento simple* como un tipo de auto-semejanza estadística. Para el campo aleatorio $X(t)$ se dice que este presenta escalamiento simple si cumple con la siguiente condición:

$$X(\lambda t) \stackrel{d}{=} \lambda^\theta X(t) \quad [3.3]$$

en donde la igualdad se refiere a todas las funciones distribución de probabilidades dimensionalmente finitas.

Dado que estadísticamente una función de distribución de probabilidad se puede caracterizar por medio de sus momentos estadísticos, se puede definir el escalamiento simple como:

$$E[X^q(rt)] = r^{\theta q} E[X^q(t)], \text{ con } q = 0, 1, 2, 3 \dots n \quad [3.4]$$

$$\log E[X^q(rt)] = q\theta \log r + E[X^q(t)] \quad [3.5]$$

Expresiones que permiten entender que para el *escalamiento simple* debe satisfacerse (i) linealidad en el espacio log-log (ley potencial) y (ii) crecimiento lineal de la pendiente del ajuste potencial con el orden del momento ($s(q) = \theta q$), mientras que el escalamiento múltiple implica que el crecimiento de la pendiente es no lineal con el orden del momento. En general se define el escalamiento de momentos como:

$$M_q(r) \sim r^{-\tau(q)} \quad [3.6]$$

en donde $\tau(q)$ es el exponente de escalamiento de la función de momentos resultante de un ajuste potencial entre $M_q(r)$ y r para cada momento estadístico q .

3.2.3. Función de q -Entropía Espacial Generalizada

En la literatura existen diversas expresiones de entropía generalizada tales como: (i) la entropía generalizada de Renyi (1955), (ii) la generalización entrópica de Havrda & Charvat (1967), (iii) la entropía de Daróczy (1970) y (iv) la expresión entropía generalizada propuesta por Constantino Tsallis (1988), conocida en el campo de la mecánica estadística como Entropía de Tsallis, q -entropía, Entropía no-aditiva o Entropía no-extensiva cuyos detalles se presentan en el capítulo 1.5.

En la última década la entropía de Tsallis ha encontrado muchas aplicaciones en astrofísica, fractales, turbulencia, finanzas, sistemas con correlaciones de gran escala y sistemas complejos (Tsallis, 2011). En el caso particular del estudio de las propiedades estadísticas de la lluvia Poveda (2011) generaliza la entropía de Tsallis para diferentes escalas temporales como:

$$S(q, T) = \frac{1 - \sum_{i=1}^n p^q(x_i, T)}{q - 1} \quad \left(\sum_{i=1}^n p(x_i) = 1; q \in \mathfrak{R} \right) \quad [3.7]$$

En donde q es el orden estadístico y $p(x_i, T)$ hace referencia a la probabilidad de ocurrencia de x_i para una escala temporal T . Esta expresión puede ser extendida al estudio espacial de campos bi-dimensionales considerando en la expresión diferentes escalas espaciales. Así, la q -entropía espacial generalizada se estima como,

$$S(q, k) = \frac{1 - \sum_{i=1}^n p^q(x_i, k)}{q - 1} \quad \left(\sum_{i=1}^n p(x_i) = 1; q \in \mathfrak{R} \right) \quad [3.8]$$

Donde k se refiere a la escala espacial del campo de intensidad de lluvia, q es el orden estadístico y $p(x_i, k)$ hace referencia a la probabilidad de ocurrencia de x_i para una escala espacial k . Este enfoque abre un nuevo camino de investigación de las propiedades de escalamiento de la lluvia y puede proveer información significativa para entender su dinámica espacio-temporal.

3.3. Resultados y Análisis

En la Tabla 3.2., se muestran las características de intensidad (máxima y mínima), localización, fecha, hora y área en la cual se encuentran embebidos los campos de precipitación en sistemas convectivos de meso-escala (SCM), utilizados para los análisis. Los campos de precipitación seleccionados tienen un área común de 25.600 km^2 (32×32 pixeles, lado del pixel 5 km) para facilitar las comparaciones. En las Figuras 3.2, 3.4 y 3.7., se presentan los campos estudiados, la barra de colores presenta el logaritmo en base 10 de los valores de intensidad en mm/h con el fin de proporcionar una visualización apropiada de las estructuras convectivas dentro de los sistemas.

3.3.1. Espectro de potencias de Fourier para campos 2D

El espectro bi-dimensional de Fourier se estimó para el rango de escalas entre los números de onda $k = 1/5 \text{ km}$ y $k = 1/16 \times 5 \text{ km} \approx 1/80 \text{ km}$. Para todos los eventos estudiados la relación en el espacio log-log entre $E(k)$ y k , presenta un buen ajuste de la forma $E(k) = ck^{-\beta}$ con coeficientes de determinación (R^2) superiores a 0.95 (ver Figura 3.2). Como se mencionó en la sección 3.2.1 el exponente β está relacionado con la rugosidad del campo, valores bajos de este exponente se asocia con campos aleatorios rugosos y valores altos con campos aleatorios suaves. Para los eventos analizados, el exponente β más bajo fue estimado para el campo localizado en Colombia (CO). Este valor de β evidencia la baja correlación espacial en campos de precipitación en zonas tropicales de montaña y puede vincularse a las características mencionadas por Poveda (2011) en el caso particular de la lluvia en Colombia: (i) la influencia de los altos gradientes topográficos a lo largo de las cordilleras de los Andes, (ii) la incidencia hidrodinámica de las grandes cuencas Amazonas y Orinoco, y (iii) los efectos de la circulación atmosférica tierra-océanos en la estructura espacial y temporal de la lluvia tropical de montaña.

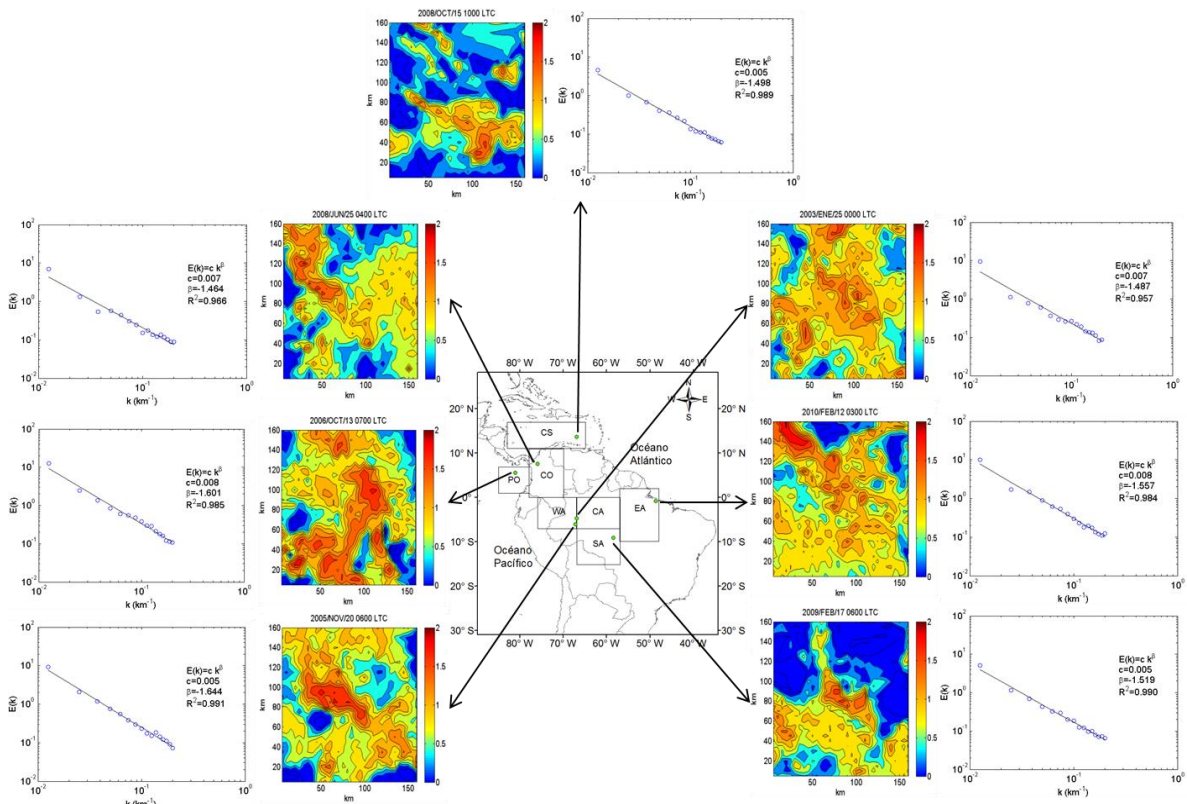


Figura 3.02. Espectro de potencias isotrópico de Fourier para los eventos de lluvia en SCM y ajuste potencial $E(k) = ck^{-\beta}$ con los correspondientes valores de c , β y R^2

En la Figura 3.2., se muestran el espectro isotrópico de Fourier para los eventos de lluvia en SCM estudiados. Los campos con mayor correlación espacial fueron en el Oeste de la Amazonia (WA), considerada como un “Océano Verde” con $\beta=1.644$ y el Océano Pacífico (PO) con $\beta=1.601$. En la Tabla 3.3., se presentan los valores estimados de c , β y R^2 .

Tabla 3.3. Valores estimados c , β y R^2 espectro de potencias de Fourier 2D en SCM

ID	c	β	R^2
CA	0.007	1.487	0.957
EA	0.008	1.557	0.984
SA	0.005	1.519	0.990
WA	0.005	1.644	0.991
PO	0.008	1.601	0.985
CO	0.007	1.464	0.966
CS	0.005	1.498	0.989

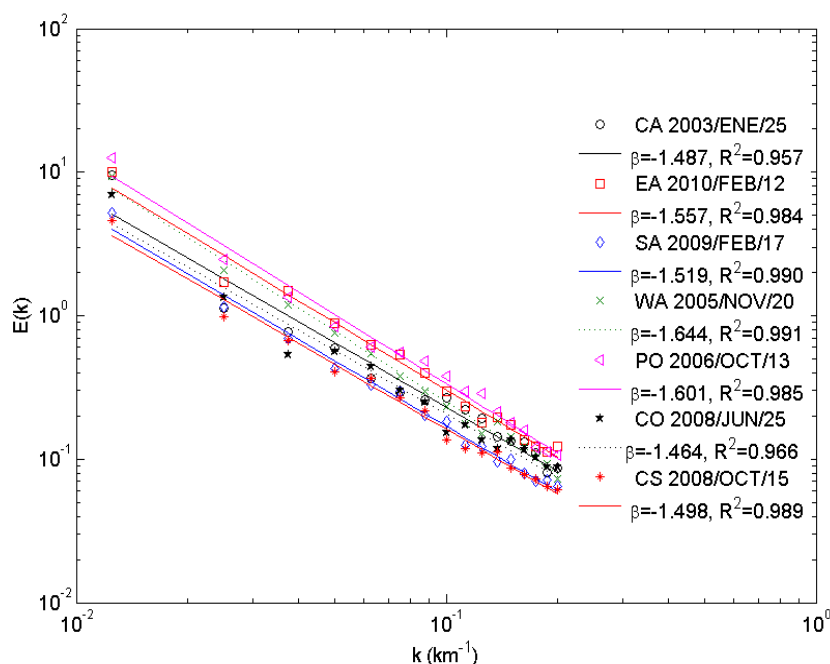


Figura 3.03. Comparación de los espectros isotrópicos de Fourier para los eventos de precipitación en SCM

3.3.2. Análisis de Escalamiento de Momentos

La Figura 3.4 muestra la estructura espacial de los campos de intensidad de precipitación estudiados, la barra de colores indica el $\log_{10}$ de la intensidad de lluvia (mm/h) con el fin facilitar la visualización la estructura jerárquica mostrada esquemáticamente en la Figura 1.2.1. Para el estudio de las propiedades de escalamiento la escala del campo se reduce desde su resolución original (32x32 pixeles de 5km de lado) mediante promediados espaciales por un factor de dos en cada paso hasta el mínimo número de pixeles (1x1 pixeles de 160km de lado).

El panel (a) al lado de cada campo de intensidad muestra en el eje de las abscisas el parámetro adimensional λ calculado como el logaritmo natural de la cantidad de pixeles de lado que tiene la matriz. Es decir, el factor λ estará entre los valores $\lambda = \ln(1) = 0$ para el campo con menor resolución espacial (1x1 pixeles de 160 km de lado) y $\lambda = \ln(32) = 3.466$ para el campo original (32x32 pixeles de 5km de lado). El eje de las ordenadas muestra el logaritmo natural del valor del momento estadístico de orden q para cada λ . El panel (b) muestra la relación entre la pendiente del ajuste en el espacio

log-log λ vs. $M(q, \lambda)$ y el orden del momento estadístico q . En este panel la línea sólida (en negro) corresponde a la línea teórica de escalamiento simple mientras el ajuste a los datos muestrales (línea roja) está asociado a un ajuste cuadrático (ajuste con mayor coeficiente de determinación). En todos los casos puede apreciarse que la función de estructura se desvía de la línea teórica de escalamiento simple para los valores de q mayores a 1.5. La Figura 3.5., permite la comparación entre la función de estructura de los campos de intensidad de lluvia seleccionados.

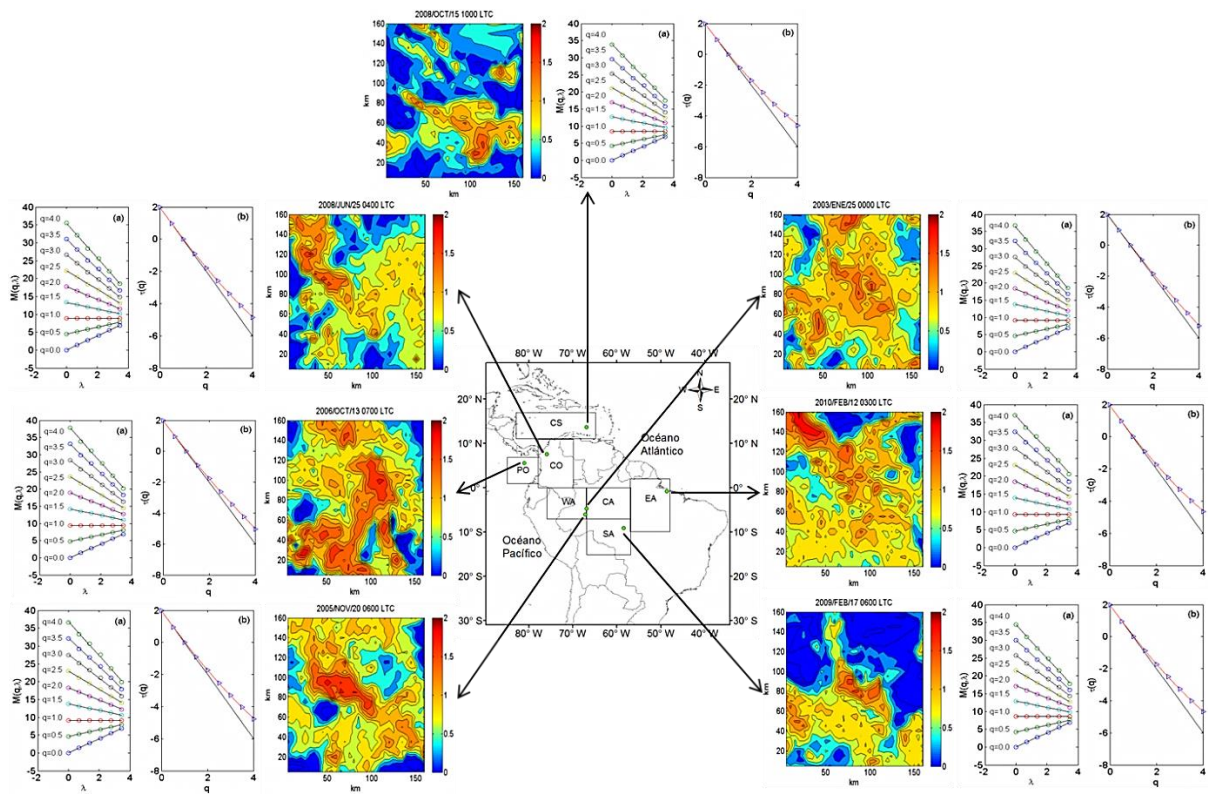


Figura 3.04. Campo de intensidad de lluvia para cada sub-zona de estudio. (a) Ley potencial entre el momento estadístico de orden q y el factor adimensional de escala λ . (b) Relación entre el orden del momento y el exponente de la ley potencial del panel (a).

Para todos los eventos analizados se puede apreciar que la función de estructura se acerca a la línea teórica de escalamiento simple para valores de q entre 0 y 1.5. Para valores de q mayores que 1.5 en todos los casos la función de estructura no es lineal lo que evidencia escalamiento múltiple en los campos de intensidad de lluvia estudiados. Esta característica ya ha sido reportada en estudios previos (véase Mejía & Poveda,

2004; Zuluaga & Poveda, 2004; Morales & Poveda, 2009). En particular, la función de estructura de los eventos ocurridos en el Mar Caribe (CS) y el Este de la Amazonia (EA) presenta gran similitud lo que podría asociarse con la influencia de la dinámica del océano Atlántico en la organización espacial de la precipitación. Además de ser la función de estructura de estos eventos la de mayor desviación de la línea teórica de escalamiento simple. El evento estudiado en el Este de la Amazonia está localizado cerca al Océano Atlántico. Por su parte las pendientes más bajas $\tau(q)$ corresponden al evento analizado para la Amazonia Central (CA) y aunque dichas pendientes difieren significativamente de las pendientes $\tau(q)$ encontradas para el campo detectado en el Océano Pacífico (PO) se debe investigar si la función de estructura de los campos de precipitación en estas dos regiones está relacionada con los regímenes climáticos predominantes en la Amazonia clasificados como régimen del Este (E) y régimen del (W), el primero de carácter convectivo continental mientras que el segundo tiene similitudes con la convección oceánica (Cifelli et al., 2002; Petersen et al., 2002; Morales & Poveda, 2009).

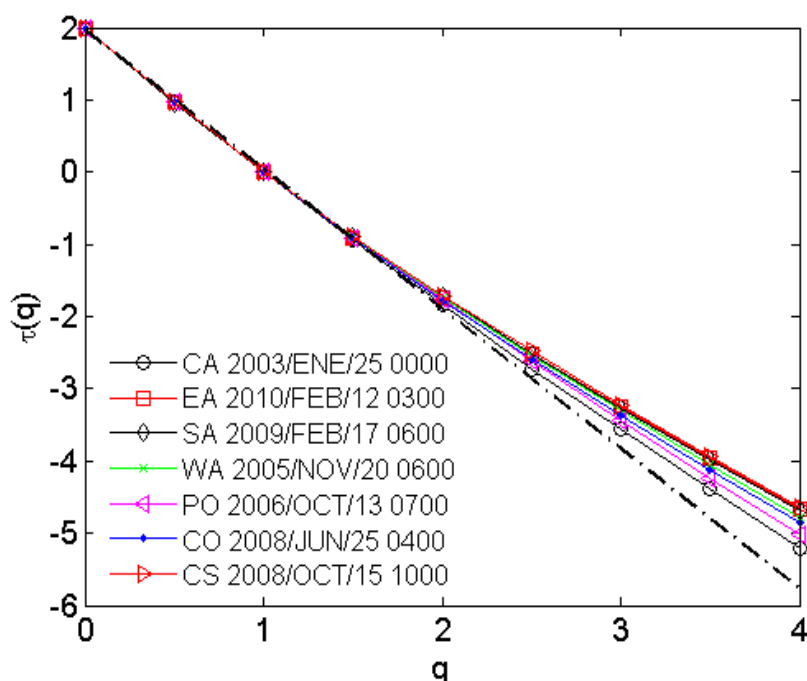


Figura 3.05. Función de estructura para los campos de intensidad de lluvia seleccionados. La línea punteada denota la línea teórica de escalamiento simple.

3.3.3. Función de q -Entropía Espacial Generalizada

El concepto de q -entropía temporal generalizada fue introducido por Poveda (2011) al estudio de las propiedades de escalamiento de la precipitación en series de tiempo para el Valle de Aburrá. En la presente sección se incorpora la función de q -entropía según la ecuación [3.8] al análisis de las propiedades de escalamiento espacial de la precipitación en sistemas convectivos de meso-escala. La Figura 3.6., panel (b) da a conocer la estructura de dependencia entre la q -entropía para una determinada escala $S(q, k)$, el factor de escala k y el parámetro q . En el panel (c) se muestra el decrecimiento monotonóico con q para todas las escalas espaciales y en el panel (d) se presenta la relación potencial entre la el factor de escala k y la entropía $S(q, k)$. El factor adimensional de escala es estimado como el inverso de la cantidad de pixeles de lado del campo, es decir, $k=1/32=0.031$ para el campo original (matriz de 32x32 pixeles con de lado 5km) y $k=1/2=0.5$ para el campo de menor resolución espacial (2x2 pixeles de lado 80 km).

La Figura 3.7., refleja el comportamiento general para los eventos estudiados. Para cada evento se muestra el campo de intensidad de la lluvia y un procedimiento análogo a la función de estructura del análisis de escalamiento de momentos para el concepto de entropía de Tsallis. En la panel (a) se muestra la relación potencial entre $S(q, k)$ con el factor de escala k , de igual manera la panel (b) muestra la pendiente β en función de q del ajuste potencial de la forma $S(q, k) = c k^\beta$.

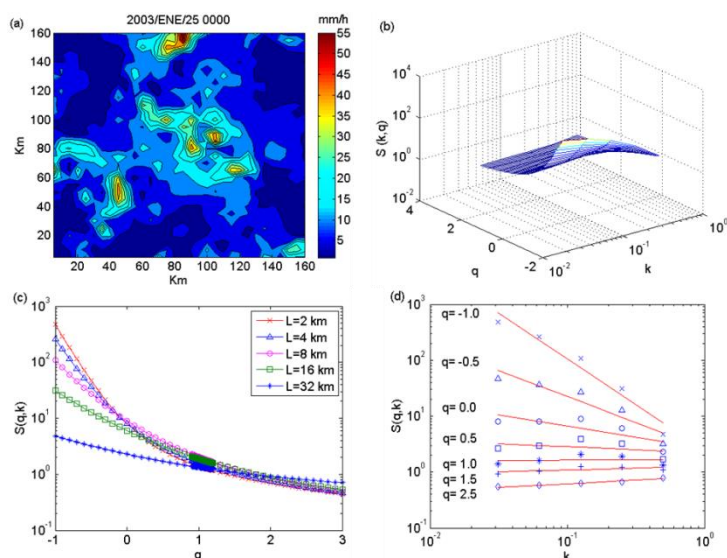


Figura 3.06. (a) Sistema Convectivo 2003/ENE/25 Hora 0000 LTC (b) Dependencia espacial de la función de q -entropía. (c) Proyección de $S(q, k)$ vs. q , para diferentes valores de k . Para valores de $q \approx 0$ se utilizan diferencias más pequeños. (d) Proyección de $S(q, k)$ vs. k .

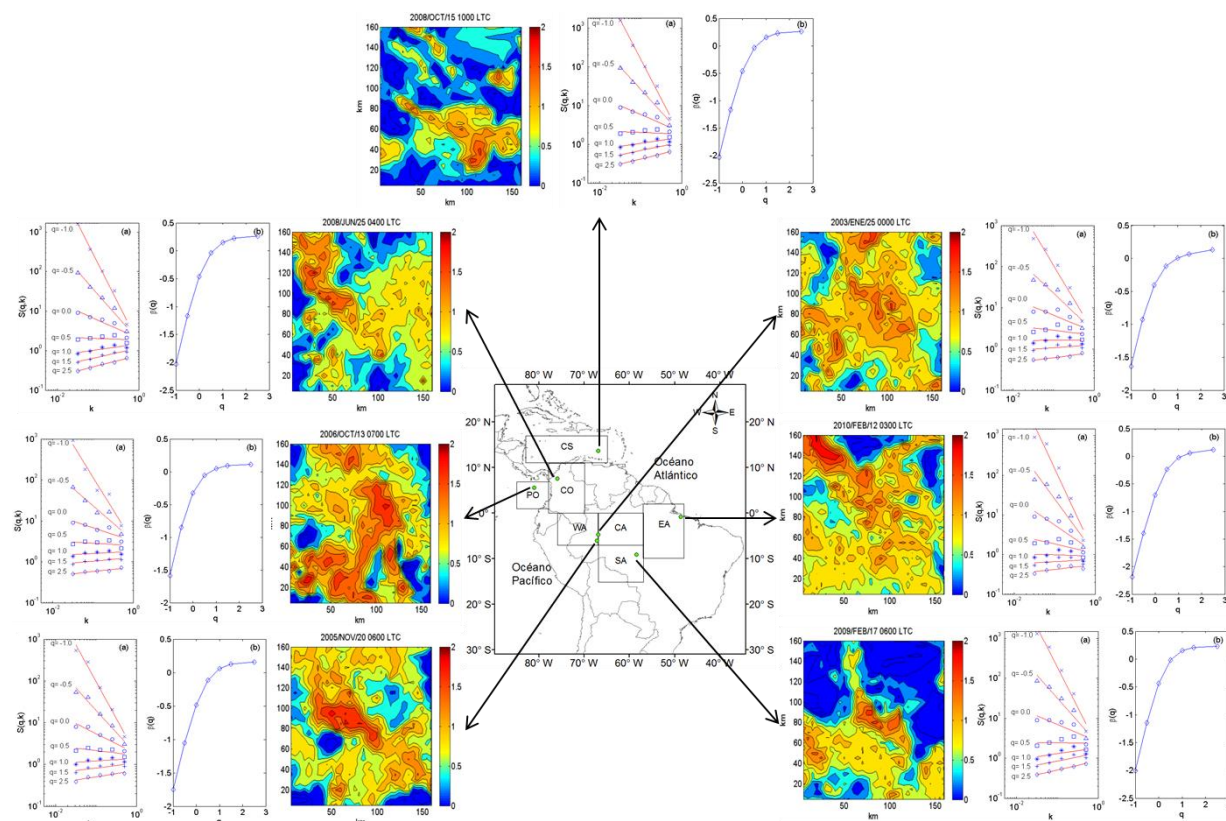


Figura 3.07. Campo de intensidad de lluvia para cada sub-zona de estudio. (a) Ley potencial entre la entropía de orden q y el factor adimensional de escala k . (b) Relación entre el parámetro q y el exponente de la ley potencial del panel (a).

De las funciones de q -entropía se resalta que para $q > 1.5$ el exponente β es aproximadamente constante ($\beta \approx 0.2$). La “saturación” de β para $q > 1.5$ coincide con el valor del parámetro q donde la función de estructura del análisis de escalamiento de momentos se desvía de la línea teórica de escalamiento simple. La Figura 3.8., muestra la función de q -entropía para los eventos estudiados, nótese que todos coinciden en que el exponente β es aproximadamente estable para $q > 1.5$.

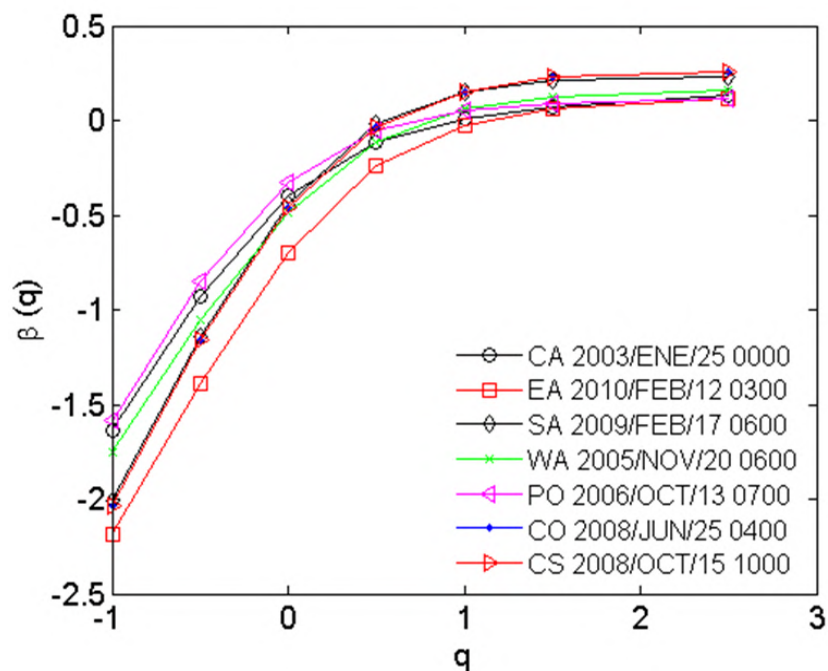


Figura 3.08. Función de q -entropía para los eventos de precipitación en sistemas convectivos de meso-escala.

4. Entropía de Shannon, q -Entropía Espacial y Temporal Generalizada, Momentos Estadísticos y Escala de Información en Campos de Lluvia Amazónica

Este capítulo está organizado de la siguiente manera. En la sección 4.1., se detalla la información utilizada y las características más importantes de la región de estudio. En la sección 4.2., se describen los métodos; Entropía de Shannon, Función de q -entropía espacial generalizada, Función de q -entropía temporal generalizada y Escala de información. En la sección 4.3., se presentan los resultados y análisis.

4.1. Datos y Características de la Región de Estudio

Los datos y características de la región de estudio se presentan a continuación de la siguiente manera. En el numeral 4.1.1., se presenta una descripción detallada de la zona de estudio, en el numeral 4.1.2., los datos utilizados y en el numeral 4.1.3., se presentan las características de los regímenes climáticos de la zona de estudio.

4.1.1. Zona de Estudio

El estado de Rondonia (Brasil) se encuentra en la parte suroccidental de la Amazonía. Su vegetación está dominada principalmente por bosques tropicales, pastos y sabanas boscosas. La elevación promedio es de 300m, aunque varía entre 50 y 1000m. La temperatura media anual es 24-25°C, con máximos entre 28° y 29° y mínimos cerca de 22°C. La precipitación anual promedio oscila entre 2000 y 2500 mm, con promedios mensuales de 250 mm/mes durante la temporada húmeda (Octubre a Abril) y 50mm durante la temporada seca. En los últimos años, la Zona de Rondonia ha sido objeto de múltiples estudios relacionados con usos del suelo y deforestación. Las investigaciones reportan un fuerte aumento de la población, grandes cambios en los usos del suelo así como la deforestación de grandes extensiones de bosque (Pedlowski et al., 1997; Barros Ferraz et al., 2009), lo cual incide en las interacciones de los procesos hidrológicos suelo-atmósfera.

4.1.2. Información Utilizada

El conjunto de registros de intensidad de precipitación empleados para el presente estudio fueron obtenidos durante la campaña de mediciones WETAMC/LBA (Enero y Febrero de 1999) mediante el radar S-POL ubicado en el estado de Rondonia (Brasil), en coordenadas geográficas el radar se encuentra centrado en 61.9982°W , 11.2213°S . Los datos, originalmente reflectividades de la banda de microondas, fueron convertidos a intensidades de precipitación por el Grupo de Meteorología de Radar de la Universidad del Estado de Colorado, los mapas resultantes tienen una resolución espacial de $2\text{km} \times 2\text{km}$ (101×101 pixeles en total) equivalentes a una cobertura total de 31000km^2 (100km de radio). En promedio, el tiempo de muestreo de los campos espaciales de intensidad de precipitación es 10 minutos.

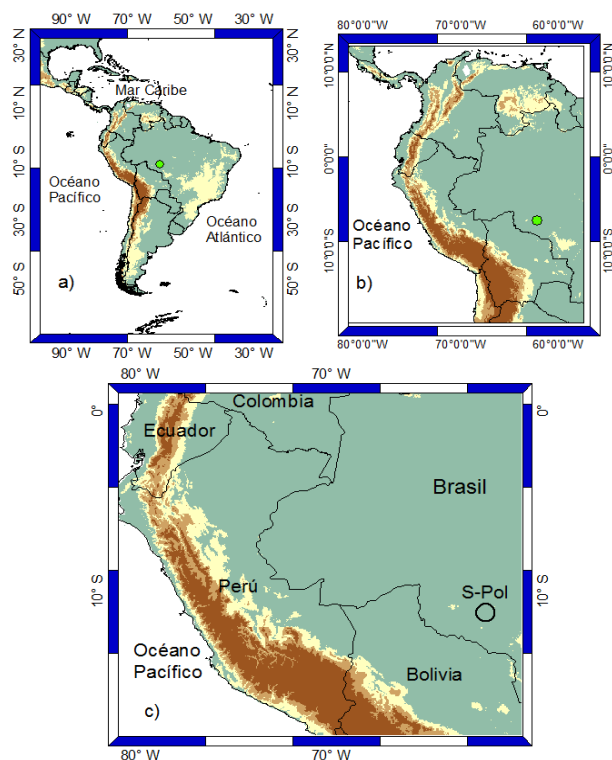


Figura 4.01. Ubicación de la zona de estudio. (a) contexto global. (b) Contexto regional. (c) Contexto local. El círculo indica la cobertura del radar de precipitación (radio 100km).

4.1.2. Regímenes Climáticos Predominantes

En la Amazonía han sido establecidos dos regímenes climáticos predominantes que están caracterizados según la dirección de la velocidad del viento entre los niveles atmosféricos de 850 y 700mb (Cifelli et al., 2002; Petersen et al., 2002). En general, los regímenes se conocen como régimen del Este (E) y régimen del Oeste (W), siendo el primero de carácter convectivo continental mientras el segundo tiene similitudes con la convección oceánica. Según Petersen et al., (2002) las características de cada uno de estos patrones climáticos son las siguientes:

(i) Régimen del Este (E): Se caracteriza por condiciones atmosféricas relativamente secas, asociadas con una mayor actividad de relámpagos y con la existencia de sistemas convectivos más profundos e intensos.

(ii) Régimen del Oeste (W): Este régimen climático se identifica debido a que la tasa de actividad de relámpagos disminuye, la convección es menos profunda y la precipitación menos intensa.

A partir de los datos de la radiosonda ABRACOS y el reanálisis NCEP/NCAR (Kalnay et al., 1996) se determina la existencia de ambos regímenes, los vientos zonales negativos están asociados a eventos del Este mientras los vientos zonales positivos se asocian a eventos del Oeste. En el presente estudio, la información los vientos zonales será utilizada para clasificar los campos de precipitación según su régimen y analizar como varían los estadísticos de la teoría de la información de acuerdo al patrón climático al que pertenecen. La Figura 4.2., muestra la clasificación de los vientos zonales según los datos de la radiosonda ABRACOS y el reanálisis NCEP-NCAR.

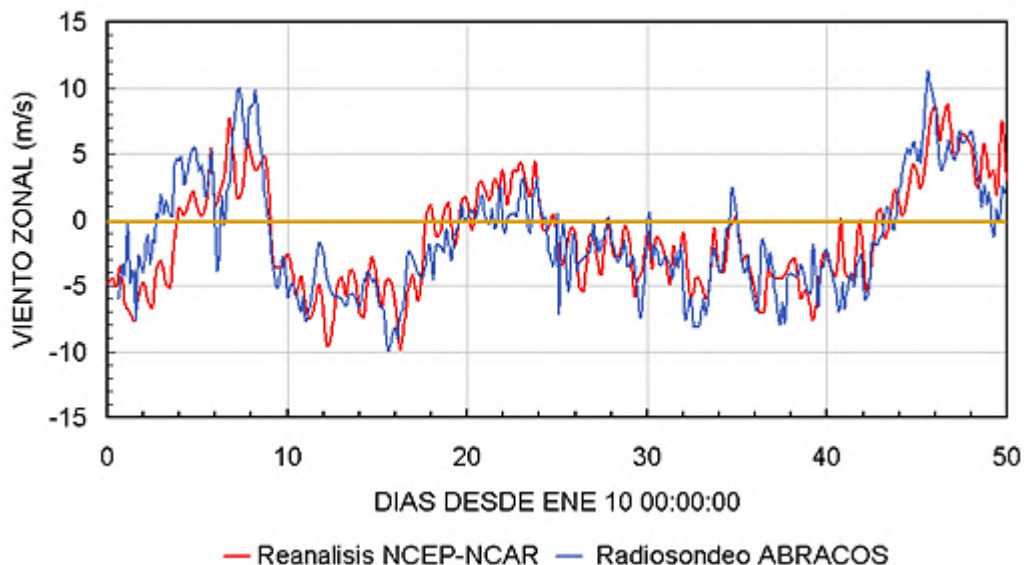


Figura 4.02. Velocidad zonal del viento entre 850 y 700 mb en la región de influencia del radar. (i) Vientos zonales negativos: eventos del Este. (ii) Vientos zonales positivos: eventos del Oeste (Morales & Poveda, 2009).

4.2. Métodos

Los métodos de análisis que se utilizan en este capítulo se describen detalladamente en los capítulos anteriores. La entropía de Shannon se presenta en la sección 1.5.1., la función de q -entropía espacial y temporal generalizada se presentan en la sección 3.2.3. Finalmente la definición de la escala de información se explica en la sección 1.6.

4.3. Resultados y Análisis

4.3.1. Entropía de Shannon

Se estima la entropía de Shannon para eventos del Este y para eventos del Oeste (ver Figura 4.3), se obtienen las funciones de distribución de probabilidad empírica (pdf) y las funciones de distribución de probabilidad acumulada (cdf) para cada muestra (ver Figura 4.4). Adicionalmente, se utiliza la nueva prueba-k basada en verosimilitud propuesta por Zhang y Wu (2006) para evaluar la hipótesis nula de igualdad en la función de distribución de probabilidad. En su trabajo, Zhang y Wu (2006) no solo exponen la deducción de las pruebas tradicionales Kolmogorov-Smirnov (KS), Cramér-von Mises

(W2) y Anderson-Darling (A2) sino que producen nuevos tipos de pruebas basadas en rangos (Z_k , Z_A y Z_c) que son mucho más potentes que sus análogas KS, A2 y W2, razón por la cual las nuevas pruebas se utilizan en este estudio a cambio de las pruebas tradicionales. Los detalles de las pruebas de hipótesis implementadas Z_k , Z_A y Z_c , se encuentran en el ANEXO A.

Los resultados de las pruebas Z_k , Z_A y Z_c indican que se debe rechazar la hipótesis nula, es decir, que las muestras no pertenecen a la misma función de distribución de probabilidad o en otras palabras, que las muestras provienen de poblaciones diferentes. Desde el punto de vista físico, el resultado obtenido puede asociarse con la diferencia entre los procesos que gobiernan la dinámica espacio-temporal de la precipitación y su fuerte vínculo con las condiciones atmosféricas. Como se expuso anteriormente, los regímenes del este y del oeste se caracterizan por condiciones atmosféricas diferentes lo que se traduce en funciones de distribución de probabilidad distintas para las muestras de Entropía de Shannon.

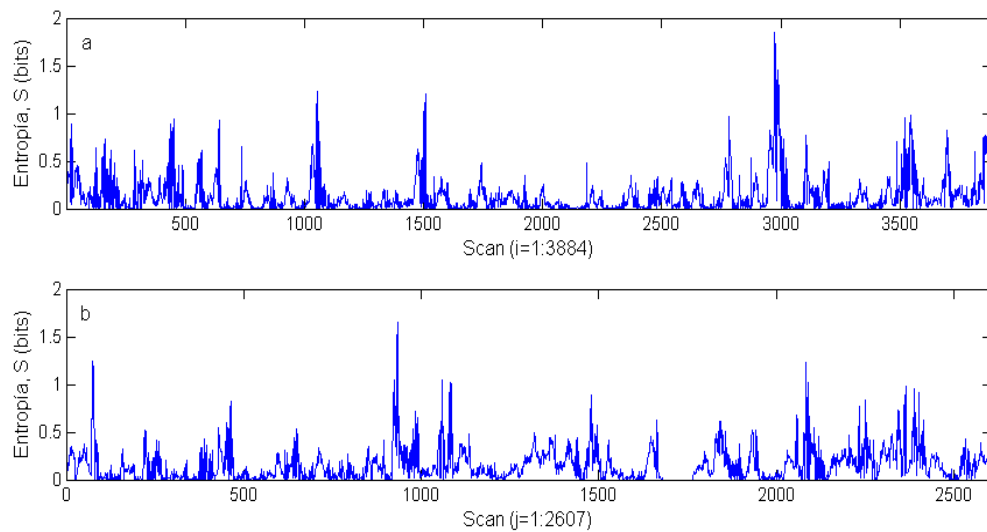


Figura 4.03. Entropía de Shannon para eventos de lluvia amazónica. (a) Eventos del Este. (b) Eventos del Oeste.

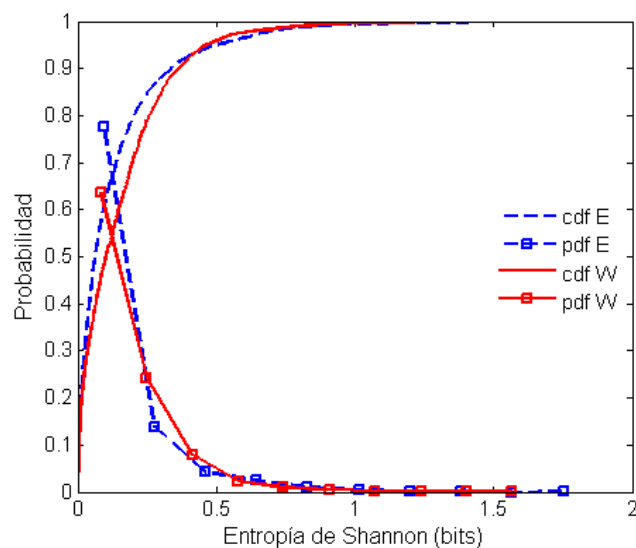


Figura 4.04. Función de Distribución de Probabilidad Acumulada (cdf) y Función de Distribución de Probabilidad Empírica (pdf) para series de entropía de Shannon. Eventos del Este (E). Eventos del Oeste (W).

En general para los campos estudiados, el promedio de la entropía es menor en los eventos del Este. Este resultado puede ser explicado por el porcentaje de ocupación (área con lluvia), los campos de intensidad de lluvia de los eventos del este contienen más ceros lo cual se traduce en un valor promedio de la entropía menor.

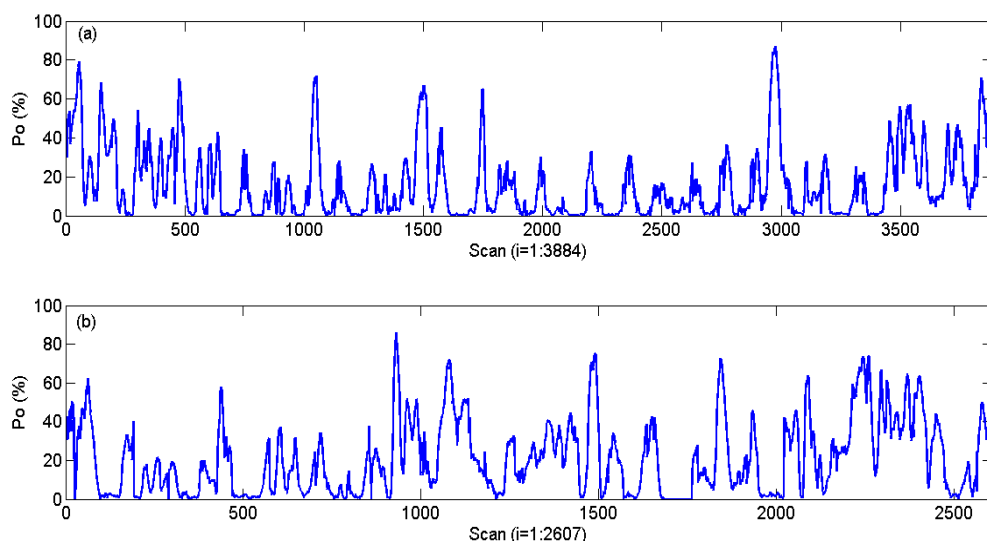


Figura 4.05. Porcentaje de área con lluvia. (a) Eventos del Este. (b) Eventos del Oeste.

Tabla 4.1. Momentos estadísticos de las series de entropía E y W, las series de porcentaje de área con lluvia E y W.

	Eventos del Este (E)		Eventos del Oeste (W)	
	Entropía	Po (%)	Entropía	Po (%)
Media (bits)	0.131	15.44	0.153	20.55
Varianza (bits ²)	0.034	305.47	0.029	350.89
Asimetría	3.091	1.48	2.231	0.89
Curtosis	16.785	4.81	11.286	3.03

4.3.2. Función de q -Entropía Espacial Generalizada

En el panel(a) de la Figura 4.6 se muestra un resultado representativo de la función de q -entropía espacial generalizada para el scan de radar Febrero 01/1999 a las 19:57:58. La escala espacial estará representada por el factor k , donde $k=1/64$ es equivalente a un scan de 64x64 pixeles de 2km de lado, análogamente $k=1/4$ corresponde a una matriz de 4x4 con pixeles de 32km de lado. Dicha función puede ser vista como $S(q)$ vs. q para diferentes valores de k (tamaño de pixel), o como $S(k)$ para diferentes valores de q . El panel (b) se aprecia el decrecimiento monótonico con q para todos los valores de k , también que dado un valor de q , los valores estimados de $S(q, k)$ son inversamente relacionados con k para $q < 0.5$ y directamente relacionados a k para $q \geq 0.5$. Los valores de $S(q \rightarrow 1, k)$ tienden al valor de la entropía de Shannon para toda k , en el intervalo de q , (0.9, 1.1) se utilizó un diferencial de 0.01. El panel (c) se muestra que los valores de entropía $S(q, k)$ exhibe una ley potencial $S(k) \sim k^\beta$. Los valores del exponente β para la variable q se muestran en el panel (d), todos los campos analizados evidencian crecimiento lineal en el intervalo $-1.0 < q < 0.5$, la zona de transición para $0.5 < q \leq 1.5$ y la saturación del exponente para $q > 1.5$.

Los campos de intensidad de precipitación del Este y del Oeste se analizan por separado mediante la función de q -entropía espacial generalizada con el fin de buscar posibles diferencias en la estructura espacial de la lluvia en múltiples escalas para los regímenes climáticos predominantes. En la Figura 4.7 se muestra que no es posible detectar diferencias en las características de escalamiento, las bandas de confianza que se muestra fueron construidas de los resultados (método no paramétrico), para ambos regímenes se aprecia simetría alrededor de la media.

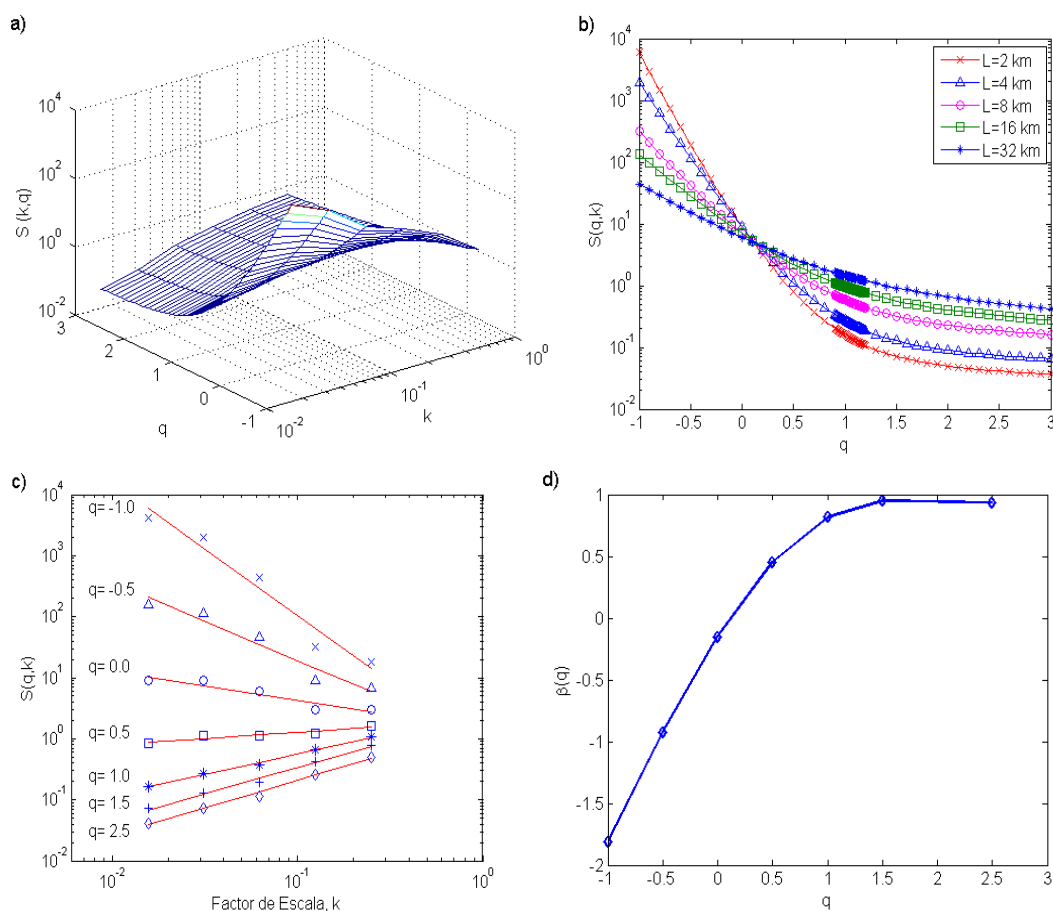


Figura 4.06. Scan de radar Febrero 01/1999 19:57:58 (a) Dependencia espacial de la función de q -entropía. (b) Proyección de $S(q, k)$ vs. q , para diferentes valores de k . (c) Proyección de $S(q, k)$ vs. k . Para valores de $q \approx 0$ se utilizaron diferenciales más pequeños.

De los resultados obtenidos no es posible discernir claramente diferencias en la estructura espacial de la lluvia para cada régimen climático. La manera de catalogar los eventos del Este y del Oeste propuesta por Petersen (2002) incluye un rango de 'transición' de los vientos zonales que puede incidir significativamente en la semejanza de los resultados obtenidos entre ambos regímenes. Se propone para investigaciones futuras analizar las características de la función de q -entropía espacial generalizada para eventos máximos de ambos regímenes, de esta manera con un criterio de clasificación que considere muestras seleccionadas con un número de desviaciones estándar por encima de la media del viento zonal puede evitarse la influencia del rango de transición en los resultados obtenidos.

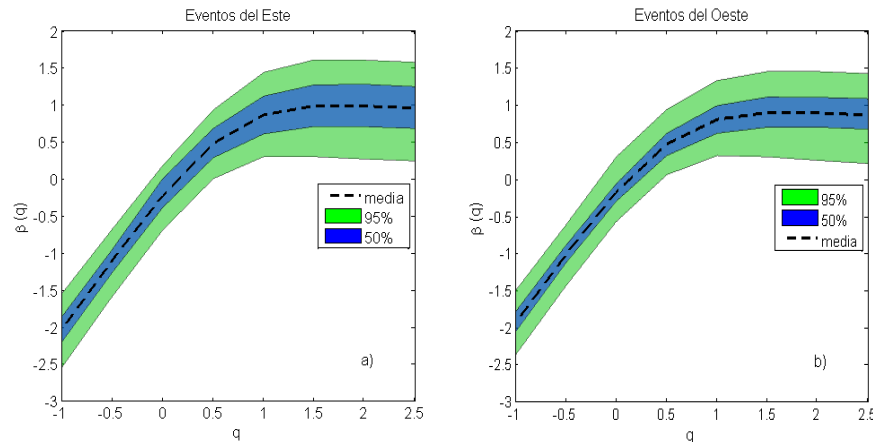


Figura 4.07. Función de q -entropía para todos los campos analizados. (izquierda) Eventos del Este. (derecha) Eventos del Oeste.

La Figura 4.8 muestra la función de q -entropía espacial generalizada promedio para los regímenes del Este y del Oeste simultáneamente, el exponente $\beta_{promedio}$ en el intervalo $-1.0 < q < 0.0$ es levemente inferior en el régimen del este (E), por el contrario para $0.5 < q < 2.5$ el exponente $\beta_{promedio}$ es inferior en el régimen del Oeste (W). El intervalo $0.0 \leq q \leq 0.5$ puede entenderse como una fase de transición de ambos regímenes y no es posible evidenciar diferencias en los exponentes de escalamiento.

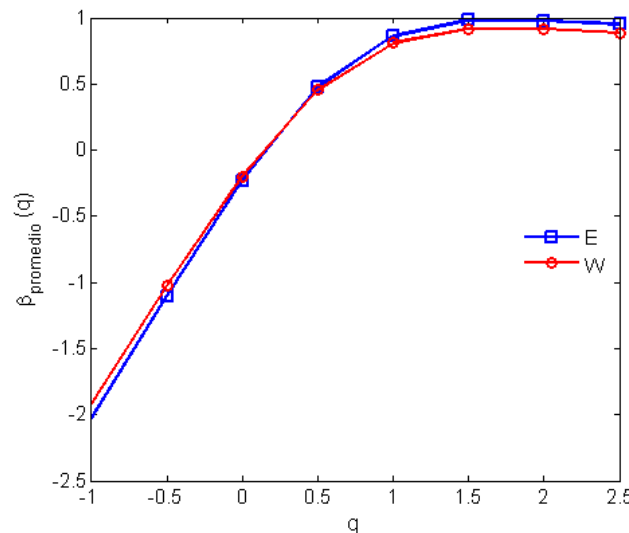


Figura 4.08. Exponente β promedio para el ajuste potencial entre escalas espaciales y Entropía de Tsallis para diferentes valores de q . Eventos del Este (E). Eventos del Oeste (W). Con el fin de buscar la respuesta a la razón de saturación de la función de q -entropía espacial generalizada para $q > 1.5$, se realiza un procedimiento de escalamiento espacial similar al realizado en SCMs (sección 3.3.3) y campos de intensidad del radar S-POL para la alfombra de Sierpinski. La Figura 4.9, panel b muestra que el conjunto fractal no

exhibe leyes potenciales, característica que si exhiben los campos de intensidad de lluvia, tanto en SCMs como en campos de intensidad de lluvia amazónica.

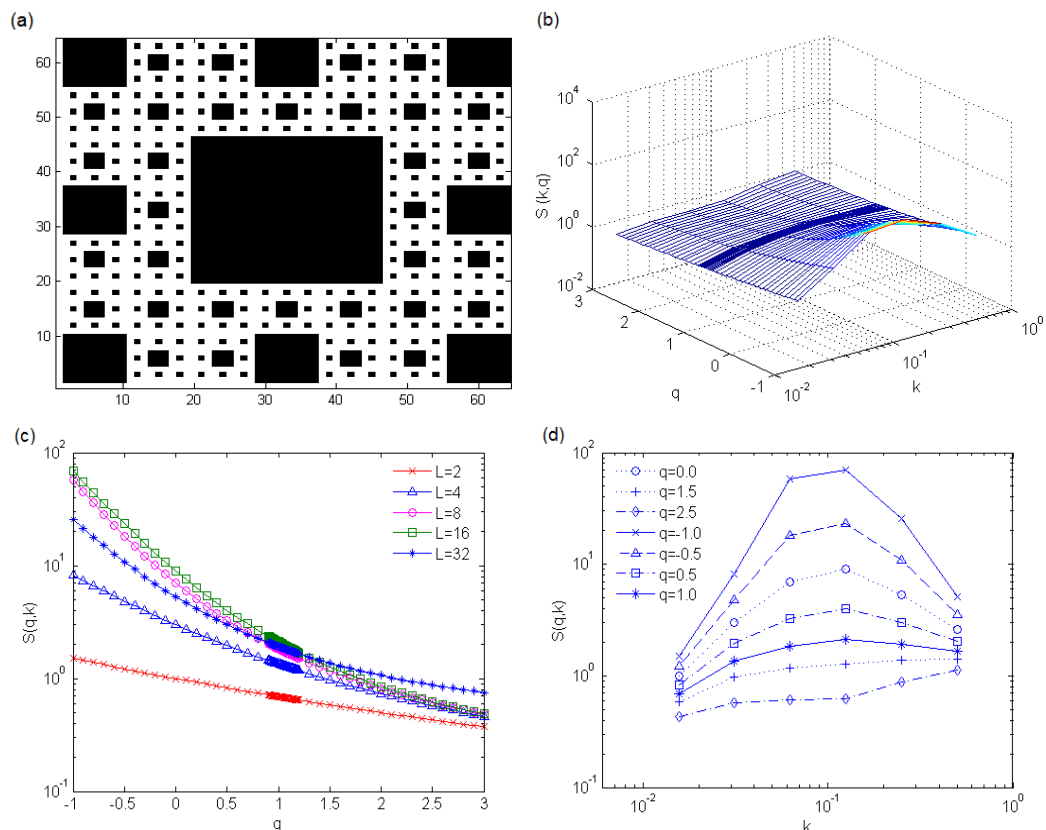


Figura 4.09. Panel (a) alfombra de Sierpinski. Panel (b) Dependencia espacial de la función de q -entropía. Panel (c) Proyección de $S(q, k)$ vs. q , para diferentes valores de k . Panel (d) Proyección de $S(q, k)$ vs. k .

En la figura 4.10 se muestran diferentes funciones de q -entropía espacial generalizada para campos aleatorios (matrices de 64x64) con distribuciones de probabilidad pre-establecidas. Los resultados sugieren que la saturación de la función de q -entropía espacial generalizada para $q > 1.5$ está asociada a la función de distribución de probabilidades que caracteriza el conjunto de datos de intensidad de lluvia del campo bi-dimensional. Para el caso mostrado, un campo aleatorio con distribución Pareto generalizada con parámetros de forma, escala y localización $k = 0.5$, $\sigma = 0.5$ y $\mu = 0.5$ exhibe saturación de la función de q -entropía para $q > 1.5$.

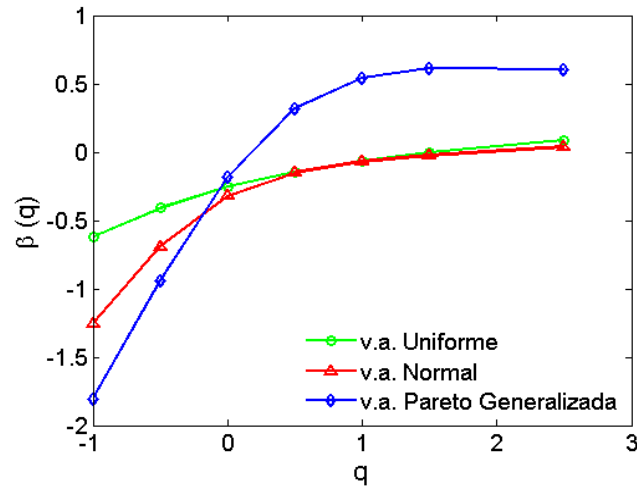


Figura 4.10. Función de q -entropía espacial generalizada para diferentes campos aleatorios. (Diamantes) FDP Pareto Generalizada con $k=0.5$, $\sigma=0.5$ y $\mu=0.5$. (Círculos) Variable aleatoria con FDP uniforme entre 0 y 1. (Triángulos) Variable aleatoria con FDP con $\mu=0$ y $\sigma=1$.

4.3.3. Función de q -Entropía Temporal Generalizada

Para analizar las propiedades de escalamiento temporal de la lluvia amazónica se construirán series de tiempo con resolución de 10 min (en promedio). Cada serie corresponde a un pixel del scan de radar, en la Figura 4.11 se muestra un ejemplo para nueve series de tiempo representativas en la zona de estudio, los pixeles fueron escogidos con distribuidos simétricamente en el área de registro de radar.

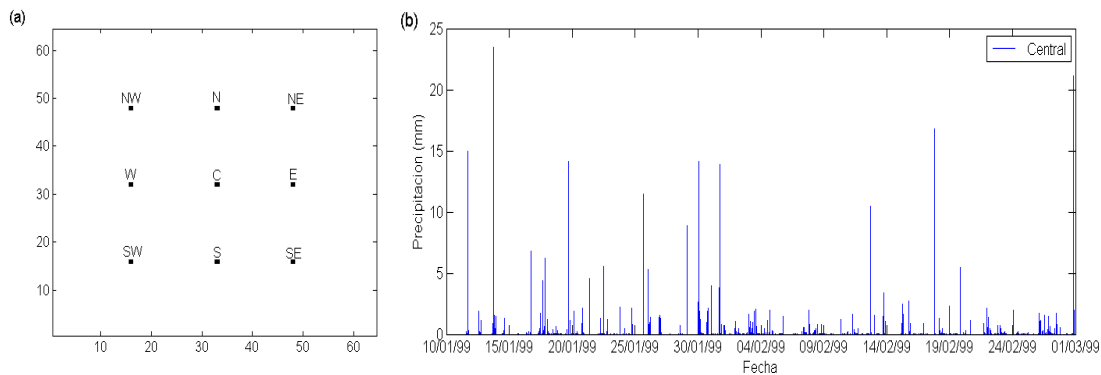


Figura 4.11. (a) Series de tiempo seleccionadas. (b) serie de tiempo para el pixel central C.

En la Figura 4.12 se muestra un resultado representativo de la función de q -entropía temporal generalizada con respecto al parámetro q y al intervalo de agregación temporal, T . Esta función puede ser vista como $S(q)$ vs. q para diferentes valores del intervalo de agregación T , o como $S(T)$ para diferentes valores de q . Para el análisis de escalamiento de la q -entropía se utilizan intervalos de agregación entre 10min (resolución original de la

serie) y 600 min. El panel (b) revela el decrecimiento monolítico con q para todos los valores de T dado un valor q , los estimados de $S(q, T)$ son inversamente relacionados con T para $q < 0$ y directamente relacionados a T para $q \geq 0$. Es posible demostrar que los valores de $S(q \rightarrow 1, T)$ tienden al valor de la entropía de Shannon para toda T , en el intervalo $0.9 < q < 1.1$ se utilizan diferenciales de 0.01. El panel (c) permite apreciar que los valores de entropía $S(q, T)$ exhiben una ley potencial $S(T) \sim T^\beta$ con una alta correlación. Los exponentes β de las leyes potenciales son mostrados en el panel (d) todos las series muestran crecimiento lineal en el intervalo $-1.0 < q < -0.5$, una zona de transición para $0.5 < q \leq 1.0$ y la saturación del exponente para $q > 1.0$.

La Figura 4.13 muestra los valores estimados del exponente de escalamiento, β , con respecto al orden q para las nueve series mencionadas, los exponentes β de las leyes potenciales presentan crecimiento lineal en el intervalo $-1.0 < q < 0.5$, una zona de transición para $0.5 < q \leq 1.0$ y la saturación del exponente para $q > 1.0$. Con el fin de obtener un resultado robusto de la función de q -entropía temporal generalizada se selecciona un tamaño muestral de series de tiempo cercano al 10% de los pixeles totales de cada scan. En la Figura 4.14 se muestra la función de q -entropía temporal generalizada para 400 pixeles elegidos aleatoriamente a partir de los cuales se extraen series de tiempo y se realiza el análisis. Los resultados encontrados corroboran el análisis previamente detallado, los exponentes β de las leyes potenciales presentan crecimiento lineal en el intervalo $-1.0 < q < 0.5$, una zona de transición para $0.5 < q \leq 1.0$ y la saturación del exponente para $q > 1.0$. La desviación estándar de los valores de β es 0.064, más del 95% de los resultados obtenidos se encuentran dentro del intervalo de 2 desviaciones estándar alrededor de la media lo que sugiere una distribución gaussiana de los exponentes β .

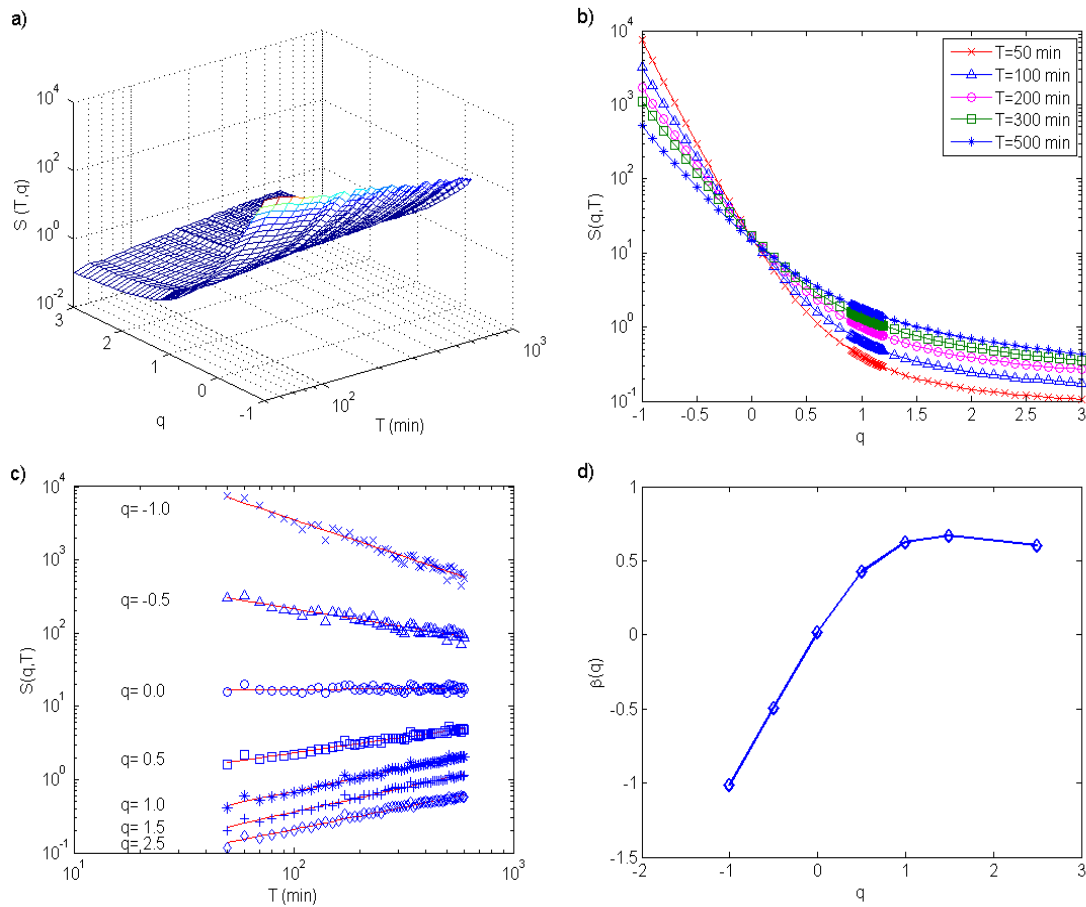


Figura 4.12. (a) Dependencia espacial de la función de q -entropía. (b) Proyección de $S(q, T)$ vs. q , para diferentes intervalos de agregación temporal, T . (c) Proyección de $S(q, T)$ vs. T . Para valores de $q \approx 0$ se utilizaron diferencias más pequeños.

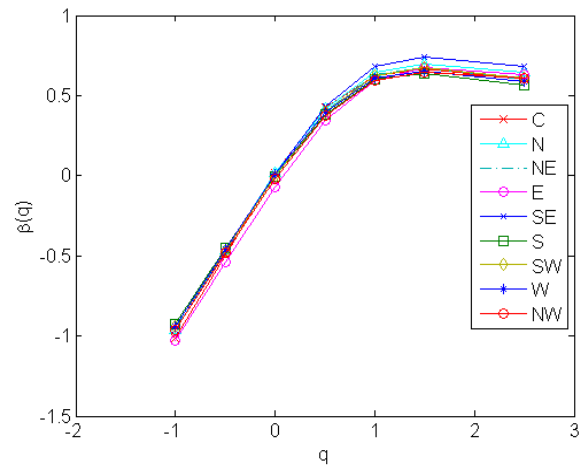


Figura 4.13. Función de q -entropía temporal generalizada.

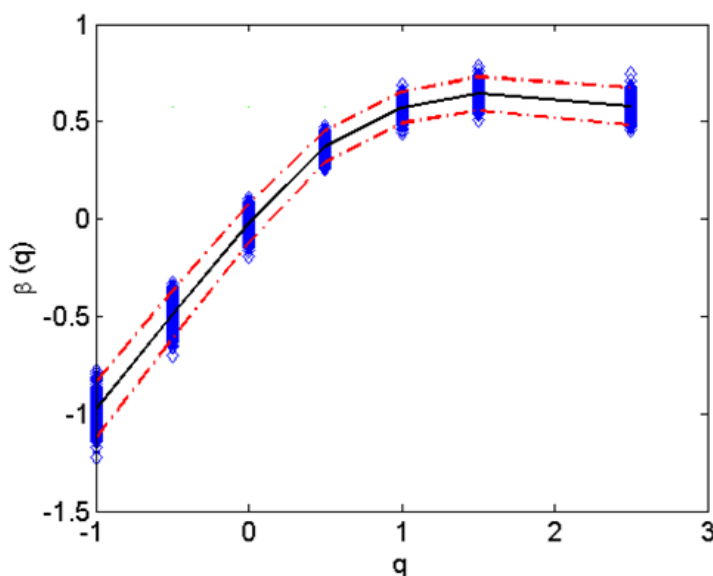


Figura 4.14. Función de q -entropía temporal generalizada para 400 series de tiempo. La línea roja corresponde a dos desviaciones estándar alrededor de la media.

4.3.4. Síntesis Sobre la Función de q -Entropía Espacial y Temporal Generalizada.

En esta sección se consignan los resultados encontrados de la función de q -entropía espacial y temporal generalizada para los casos estudiados en los capítulos 3 y 4. La Figura 4.15 permite comparar los resultados reportados. En general, la saturación de la función de q -entropía se presenta para valores de $q > 1.0$, sin embargo, es necesario hacer notar que para los campos de intensidad de lluvia amazónica dicha saturación ocurre en $\beta = 1.0$, en los campos de intensidad de lluvia dentro de SCMs en $\beta = 0.2$ y en las series de tiempo corresponde a $\beta \approx 0.5$ para $q > 1$.

En la Figura 4.15 se muestra un resultado típico de la función de q -entropía temporal generalizada en series de tiempo de precipitación para el periodo 01/Abril/2005-31/Diciembre/2006 con resolución 15 min en el Valle de Aburrá (Poveda, 2011). Es de resaltar la similitud (para todos los valores de q) que presenta esta función de q -entropía con el resultado promedio encontrado en las series de tiempo del radar S-POL con resolución temporal de 10 min en promedio. Este resultado indica similitudes en las funciones de distribución probabilidades que caracterizan la dinámica temporal de la lluvia en series de alta resolución en ambas zonas.

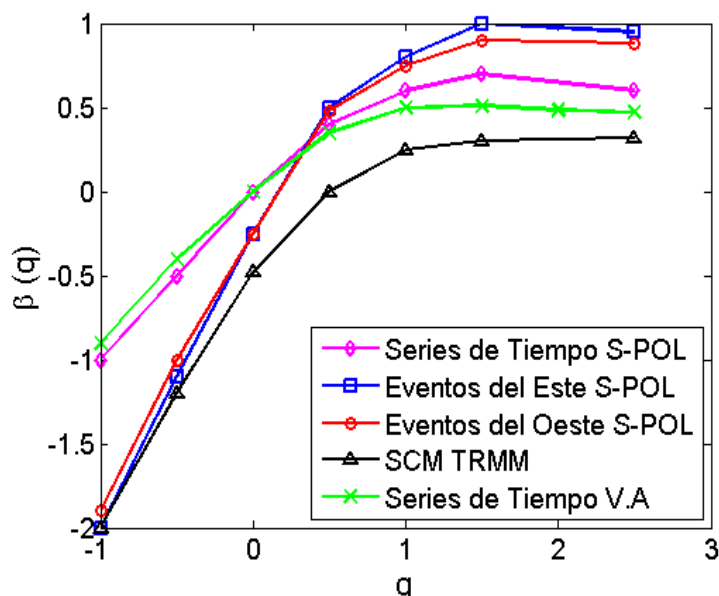


Figura 4.15. Funciones de q -entropía espacial y temporal generalizadas. (diamantes) Series de tiempo del radar S-POL. (cuadrados) Eventos del Este, campos de intensidad de lluvia del radar S-POL. (círculos) Eventos del Oeste, campos de intensidad de lluvia del radar S-POL. (triángulos) Campos de intensidad de lluvia en Sistemas Convectivos de Mesoescala del radar TRMM. (cruces) Series de tiempo de precipitación de resolución 15min del Valle de Aburrá, estación Mazo.

Por otra parte, se pueden notar grandes diferencias entre la función q -entropía espacial generalizada entre campos de intensidad de lluvia amazónica y campos de intensidad de lluvia en SCMs. Estas diferencias pueden ser explicadas en función de las siguientes consideraciones: (i) mientras los SCMs fueron analizados con una resolución espacial de 5km de lado de pixel, la lluvia amazónica fue estudiada a partir de información con resolución espacial de 2km de lado de pixel, (ii) los SCMs analizados fueron escogidos bajo criterios de máxima área e intensidad de lluvia mientras que los campos de lluvia del radar S-POL fueron estudiados considerando los regímenes climáticos predominantes en la zona, (iii) las características de interacción océano-atmósfera-suelo es variable para los SCMs mientras el área del radar S-POL de los campos de lluvia amazónica es la misma, (iv) los eventos de intensidad de lluvia en SCMs son independientes mientras los campos de intensidad de lluvia amazónica debido a su resolución temporal (10min) pueden presentar dependencia.

4.3.5. Momentos Estadísticos y su Relación con la Entropía de Shannon para Series de Tiempo del Radar S-pol

Se analizan los vínculos entre los estadísticos media, varianza, asimetría y curtosis con la entropía de Shannon para las 400 series de tiempo extraídas de campos de intensidad de lluvia del radar S-pol y utilizadas en la sección 4.3.3. Para el cálculo de la entropía se utilizan 25, 50, 100 y 150 intervalos de clase, parámetro fundamental en los histogramas de frecuencia. Como se muestra en la Figura 4.16 influye drásticamente en la correlación entre los momentos estadísticos y la estimación de entropía. Los resultados no presentan una relación obvia entre la entropía de las series de tiempo y sus momentos estadísticos de orden 1 y 2, media y varianza, respectivamente (ver panel (a) y (b) de la Figura 4.16). En los paneles (c) y (d) se observa que los momentos estadísticos de orden superior *Asimetría* y *Curtosis* exhiben leyes potenciales débiles de la forma $S(\gamma) \sim \gamma^{-\eta}$ y $S(\zeta) \sim \zeta^{-\eta}$, respectivamente.

En la Tabla 4.1., se detalla la sensibilidad de los parámetros de los ajustes potenciales entre los momentos estadísticos de tercer y cuarto orden la entropía de Shannon cuantificada para histogramas contruidos con 25, 50, 100 y 150 intervalos de clase. Los resultados permiten detectar fácilmente que la cantidad de intervalos de clase utilizados en la construcción de las funciones de densidad de probabilidad empíricas afectan de manera inversa la correlación entre los estadísticos y la entropía, es decir, a mayor cantidad de intervalos de clase del histograma menor la correlación con el coeficiente de asimetría y el coeficiente de curtosis.

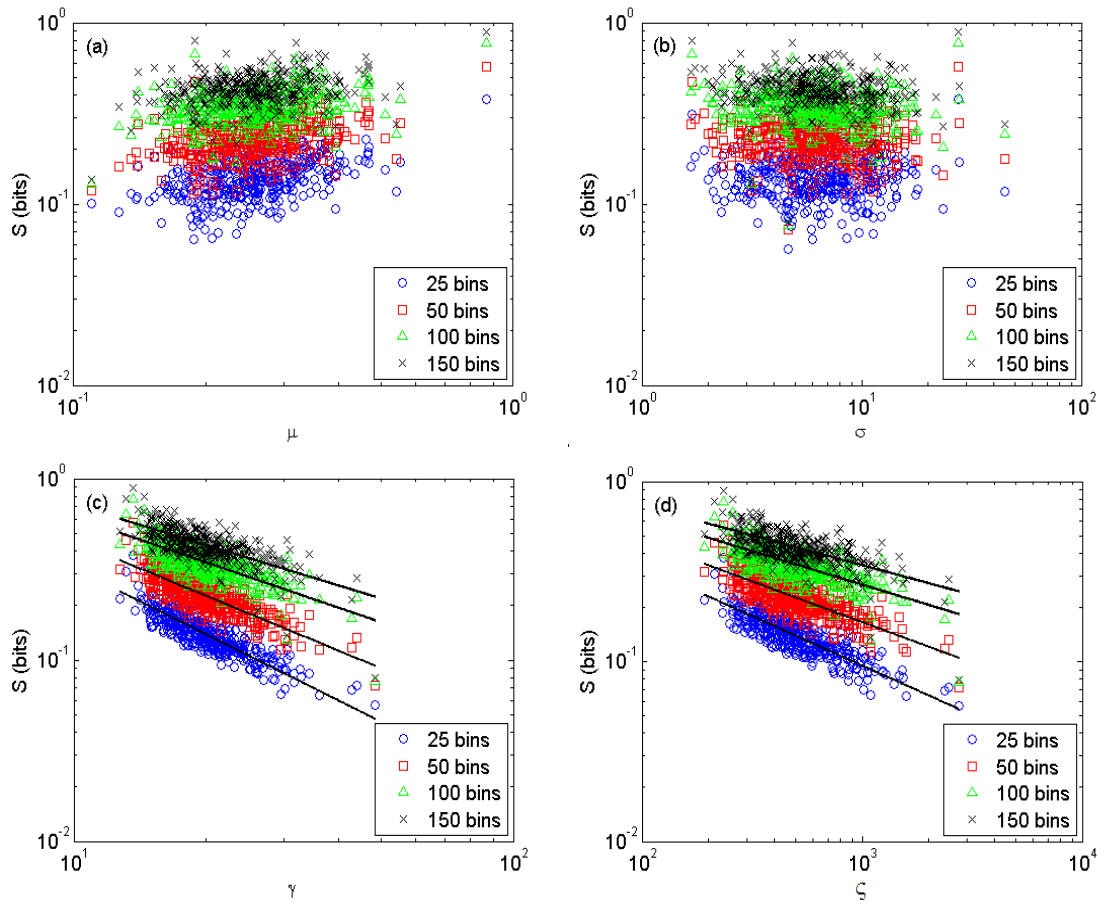


Figura 4.16. (a) Promedio contra Entropía de Shannon. (b) Varianza contra Entropía (c) Coeficiente de asimetría contra Entropía. (d) Curtosis contra Entropía.

Tabla 4.1. Parámetros los ajustes potenciales $S(\gamma) = a\gamma^{-\eta}$ y $S(\zeta) = a\zeta^{-\eta}$ para Asimetría vs. Entropía y Curtosis vs. Entropía, respectivamente.

	Numero de intervalos de clase (bins)	Intercepto a	Exponente del ajuste potencial η	Coefficiente de Determinación R^2
Asimetría	25	5.192	1.210	0.793
	50	4.560	1.304	0.672
	100	4.132	0.830	0.557
	150	3.927	0.739	0.481
Curtosis	25	4.225	0.549	0.74
	50	3.760	0.452	0.616
	100	3.499	0.373	0.498
	150	3.359	0.331	0.423

Como se explicó en el capítulo de introducción (sección 1.3.), según Quan et. al., (2012) en un flujo turbulento con estructuras no-organizadas y aleatoriedad presenta maximización de la entropía, por el contrario, un proceso organizado y no aleatorio presenta una entropía mínima. Por su parte, los momentos estadísticos de tercer y cuarto orden se utilizan para caracterizar la FDP de una variable, el coeficiente de asimetría se asocia a los efectos asimétricos en flujos turbulentos (convección y transporte no local) mientras la curtosis se asocia al peso de las colas de las FDP y se vinculan con el fenómeno de intermitencia.

Para el problema estudiado en series de precipitación de alta resolución temporal y considerando que estas series presentan propiedades estadísticas similares a las series de flujos turbulentos, la relación inversa observada entre los momentos de tercer y cuarto orden con la entropía puede ser explicada en términos de la cantidad de ceros y los valores de intensidad máxima que presentan las series. Como se explicó en el capítulo 2 la cantidad de ceros presente en las series influye en las estimaciones de entropía. Para el caso estudiado en este capítulo (Figura 4.16 paneles c y d), las series con mayor cantidad de ceros presentan menor entropía como se muestra en la Figura 4.17 (panel a), pero la evidencia sugiere la entropía también presenta una relación inversa con la intensidad máxima de las series de tiempo (Figura 4.17 panel b) lo que indica que existen diversos factores que inciden en la relación inversa entropía contra momentos estadísticos de tercer y cuarto orden.

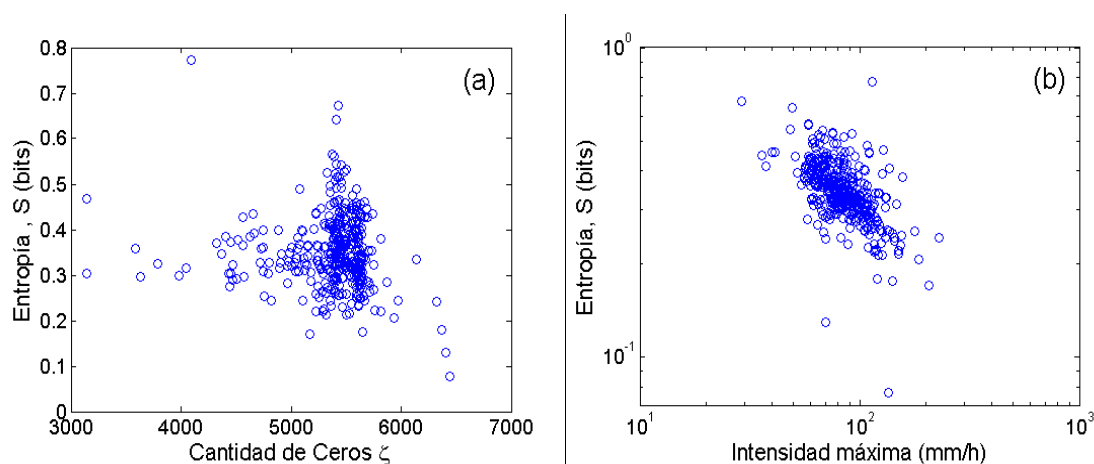


Figura 4.17. (a) Entropía de Shannon [100 bins], S , contra Cantidad de ceros, ξ (b) Entropía de Shannon contra intensidad máxima.

4.3.6. Momentos Estadísticos y su Relación con la Entropía para Campos Bi-dimensionales de Intensidad de Lluvia

En esta sección se explora posibles relaciones entre los momentos estadísticos; media (μ), varianza (σ^2), coeficiente de asimetría (γ) y coeficiente de curtosis (ζ) con la entropía de Shannon en campos de lluvia amazónicos. La cuantificación de la entropía se realizó utilizando 50 intervalos de clase en la construcción de las distribuciones de densidad de probabilidades empíricas. En la Figura 4.18 panel (a) y panel (b) puede apreciarse que los momentos estadísticos de orden uno y dos de los campos no presentan relaciones obvias con su entropía. Por el contrario, en la Figura 4.19 se presenta la relación potencial por tramos entre la entropía y los momentos de tercer y cuarto orden, asimetría y curtosis, respectivamente. La primera exhibe una ley de potencial de la forma $S(\gamma) \sim \gamma^{-n}$, la segunda también muestra una relación lineal en el espacio log-log de la forma $S(\zeta) \sim \zeta^{-n}$.

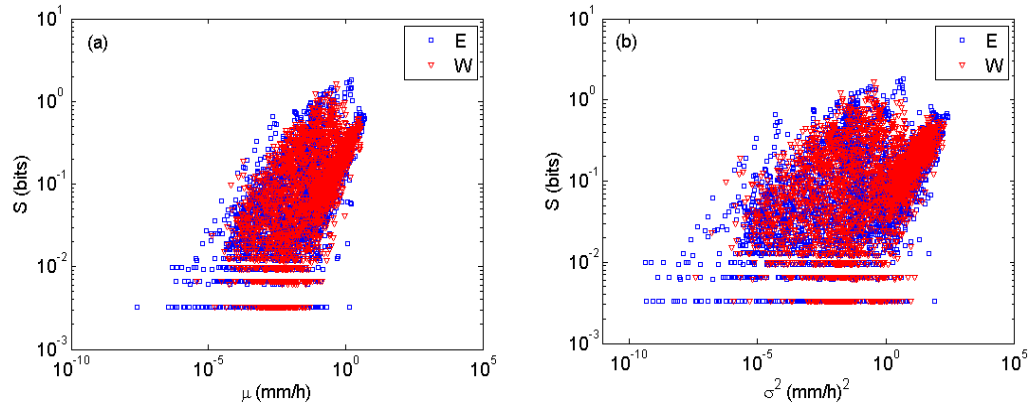


Figura 4.18. Momentos contra Entropía para los regímenes climáticos E y W. (a) Promedio μ contra entropía de Shannon, S (bits). (b) Varianza σ^2 contra entropía de Shannon.

Como se mencionó anteriormente, la relación asimetría-entropía y curtosis-entropía se aproxima mediante ajustes potenciales por tramos de la forma $S(\gamma) \sim \gamma^{-n}$ y $S(\zeta) \sim \zeta^{-n}$. La Figura 4.19 muestra la similitud del comportamiento encontrado para los eventos del este (E) y del oeste (W), los datos muestran un cambio en la tendencia a partir de cierto valor de asimetría y curtosis. En ambos casos, la entropía decrece a medida que aumenta el momento estadístico, incrementándose la tasa de decrecimiento a partir de un valor crítico. Para $\gamma \leq 300$ y $k \leq 1000$ se encuentran leyes potenciales con $R^2 > 0.90$, mientras para $\gamma > 300$ y $k > 1000$ los ajustes potenciales menos correlacionados con

$R^2 > 0.65$. Los ajustes realizados no presentan diferencias significativas en sus exponentes, la diferencia entre exponentes no puede vincularse con la dinámica de la precipitación debido a que las muestras no tienen la misma cantidad de datos en régimen climático. El ajuste potencial asimetría-entropía para $\gamma \leq 30$ presenta un exponente $n=1.295$ para E y $n=1.260$ para W, siendo levemente menor para W, por el contrario para $\gamma > 30$ el exponente es menor para E ($n=2.441$) y mayor para W ($n=2.482$). El ajuste potencial curtosis-entropía para $k \leq 1000$ presenta un exponente $n=0.694$ para E y $n=0.709$ para W, para $k > 1000$ los eventos del este arrojan $n=1.373$ mientras $n=1.370$ para los eventos del Oeste.

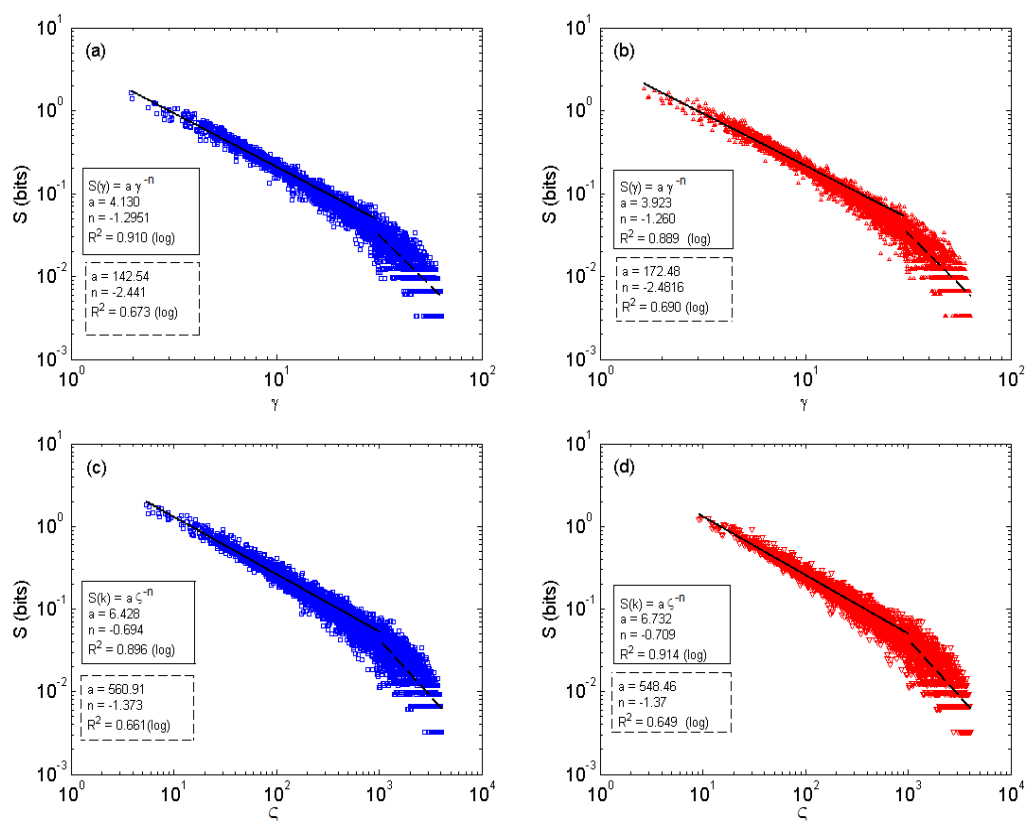


Figura 4.19. (a) Coeficiente de asimetría contra Entropía de Shannon eventos del Este. (b) Coeficiente de asimetría contra Entropía de Shannon eventos del Oeste (c) Curtosis contra Entropía para eventos del Este. (d) Curtosis contra Entropía para eventos del Oeste.

En la Figura 4.20 se muestra el porcentaje de área con lluvia en los scan de radar para los eventos del Este y del Oeste, se observa que los valores máximos de

entropía están asociados a los scan con mayor porcentaje de área con lluvia (menor cantidad de ceros) mientras que los valores mínimos de entropía se asocian a campos con mayor cantidad de ceros (menor porcentaje de ocupación). Sin embargo, es importante notar que la relación porcentaje de área con lluvia, P y Entropía, S , no es directa. Para un porcentaje de ocupación determinado se estiman diferentes valores de entropía.

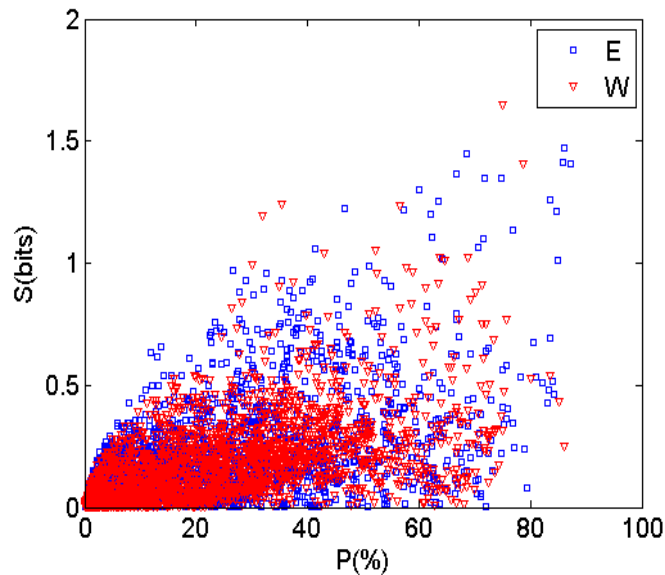


Figura 4.20. Porcentaje de área con lluvia contra Entropía de Shannon para los scan correspondientes a los eventos el Este y del Oeste.

4.3.7. Escala de Información

Poveda (2011) define la escala de información como una característica de escala temporal para procesos no lineales. Puede ser utilizada como una definición alternativa del tiempo de rezago requerido para la reconstrucción de trayectorias del espacio de fase de sistemas dinámicos no lineales y atractores extraños. Para las 400 series de tiempo extraídas aleatoriamente de la información del radar S-POL referidas en la sección 4.3.3 se calcula la escala de información ψ para un rezago τ de 2000 minutos en promedio. La Figura 4.21 muestra el comportamiento general encontrado para las series de tiempo analizadas. La función de auto-información presenta un decaimiento ‘rápido’ para tiempos de retardo τ entre 0 y 200 minutos en promedio, sin embargo, para rezagos τ

mayores a 200 minutos la función de auto-información permanece por debajo de 0.05.

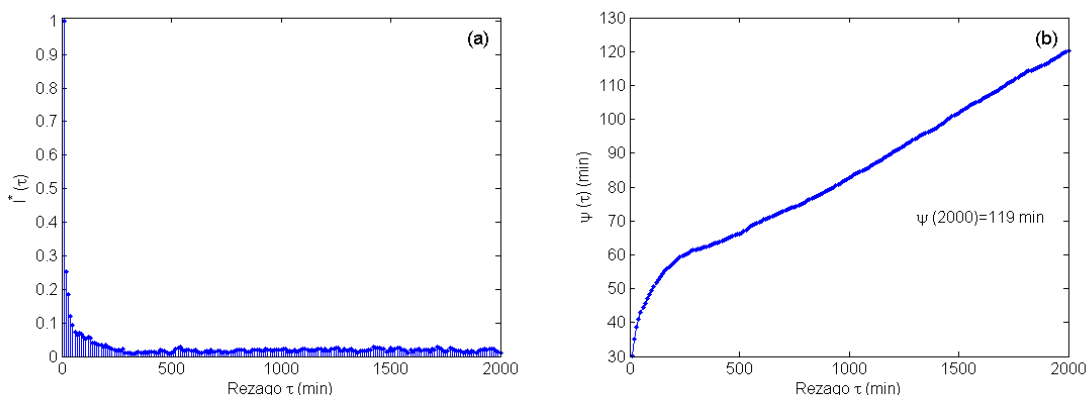


Figura 4.21. (a) Función de auto-información normalizada para el rezago τ , $I^*(\tau)$. (b) Estimador de la escala de información para diferentes tiempos de rezago τ , $\psi(\tau)$.

La escala de información merece ser producto de futuras investigaciones debido a que puede ser utilizada para avanzar en el entendimiento de la dinámica de sistemas no lineales. La implementación de este concepto en series de tiempo de alta resolución de lluvia amazónica abre un camino de investigación que puede ser extendido a múltiples procesos geofísicos y que puede ayudar en el avance del entendimiento de los mismos.

5. Conclusiones y Recomendaciones

5.1. Entropía de las Lluvias en los Valles de Aburrá y San Nicolás

El estudio sobre de las propiedades estadísticas de la precipitación en múltiples intervalos de agregación permite detectar características importantes de las series de tiempo con respecto a la cantidad de información empleada en el proceso de cuantificación. De igual manera, los resultados obtenidos permiten abrir una serie de preguntas relevantes en el ámbito científico que merecen ser explicadas satisfactoriamente para entender el vínculo entre los parámetros estadísticos y dinámica espacio-temporal de lluvia.

La entropía de Shannon estimada para diversos intervalos de agregación y diferente tamaño muestral exhibe una ley potencial de la forma $S = cT^\beta$ hasta un intervalo de agregación (T_{MaxEnt}) donde la entropía se maximiza mostrándose ‘estable’ para intervalos de agregación superiores ($T > T_{MaxEnt}$). Los resultados permiten concluir que la saturación y estabilidad de la entropía para intervalos de agregación $T > T_{maxent}$ no se debe a la ‘ley de conservación de la incertidumbre’ de Vanmarcke (1988) puesto que la lluvia no exhibe memoria finita. Como se muestra en el capítulo 2, dicha característica se puede vincular con la desaparición de los ceros durante el proceso de agregación ya que como se argumenta en el trabajo de Poveda (2011) el incremento de la entropía para $T < T_{MaxEnt}$ está asociada con: (i) la disminución de los ceros producto de la agregación (‘erosión’ del histograma) y (ii) las propiedades matemáticas de la FDP de Pareto Generalizada, distribución paramétrica que mejor ajusta a los datos de lluvia estudiados desde la escala horaria ($T > 60$ min) hasta la escala diaria.

Los interrogantes sobre la ley de conservación de la incertidumbre y la influencia de la cantidad de ceros en la maximización y saturación de la entropía en un contexto de sensibilidad a la cantidad de registros de lluvia utilizados permitió encontrar parámetros que permanecen estadísticamente invariantes con una significancia $\alpha=0.05$ a pesar de utilizar periodos que varían entre 21 meses y 90 meses.

(a) El exponente de escalamiento β es estadísticamente igual a $\langle\beta\rangle = 0.50$ con una significancia de 0.05 para todas las estaciones del Valle de Aburrá y el Altiplano de San Nicolás para todos los periodos de registros utilizados.

(b) La función de varianza para todas las estaciones ‘oscila’ alrededor de una ley potencial de la forma $\gamma(T) = aT^\delta$. Para $\gamma(T = 15\text{min})$ en todos los casos el valor muestral es inferior al modelado con el ajuste y de igual manera para $600\text{ min} < T < 4000\text{ min}$. En el rango $15\text{ min} < T < 600\text{min}$ los valores muestrales están por encima de la ley potencial teniendo un comportamiento similar para $T > 4000\text{ min}$. El método de ajuste por minimización del error cuadrático medio utilizado en los ajustes potenciales para la función de varianza se refleja en el ‘equilibrio’ de las fluctuaciones de los datos en las proximidades de la ley de potencias. El exponente δ se muestra invariante para todas las estaciones a pesar de ser diferente la cantidad de datos empleados para su estimación. Este resultado se obtuvo mediante un test de significancia t-student con $\alpha = 0.05$.

(c) Pensando en la lluvia como un proceso estocástico continuo, bajo la hipótesis de estacionaridad los resultados obtenidos permiten corroborar los resultados obtenidos por Poveda (2011). La escala de fluctuación del proceso es no-finita lo que es equivalente a un auto-correlograma no convergente al aumentar los rezagos. El estudio permite detectar una mayor variabilidad en el estimador de la escala de fluctuación $\hat{\theta}$ cuando se utiliza la menor cantidad de información. Así mismo, aunque se puede evidenciar la no convergencia de $\hat{\theta}$ para $\hat{\theta}(T = 3000\text{ min})$ las pruebas de hipótesis realizadas sugieren no rechazar la hipótesis nula de igualdad en la media, lo que indica que el resultado no está afectado por la cantidad de información utilizada.

(d) La desaparición de los ceros durante el proceso de agregación fue estudiada con el fin de encontrar sus vínculos con maximización de la entropía y la erosión de la función de densidad de probabilidades. La tasa de desaparición de los ceros al incrementar T se puede modelar por medio de leyes potenciales de la forma tipo I, $\xi(T) \sim aT^\alpha$ para $T \leq 1400\text{min}$ (en promedio) y para $T > 1400\text{ min}$ (en promedio) los datos exhiben una ley potencial de la forma tipo II $\xi(T) \sim aT^\alpha + c$. Para todos los casos el coeficiente de determinación es mayor a 0.95. El exponente para el ajuste tipo I es en promedio $\langle\alpha_I\rangle = -1.25$ mientras para el ajuste tipo II $\langle\alpha_{II}\rangle = -1.70$. Se puede concluir que los exponentes α_I y α_{II} no son sensibles a la cantidad de registros con una significancia

$\alpha = 0.05$. Finalmente, se puede encontrar una relación entre el intervalo de agregación donde desaparecen los ceros, T_{noz} , y el intervalo de agregación donde se alcanza la máxima entropía, T_{MaxEnt} .

(e) Las medidas de complejidad implementadas en series de precipitación permiten encontrar invarianza estadística en la media con un nivel de significancia de 5% para la complejidad máxima. Los intervalos de agregación donde se alcanza la complejidad máxima son muy diferentes en todas las estaciones pero la complejidad máxima se mantiene en promedio aunque se utilizó periodos de información variables.

La búsqueda de patrones geográficos permite confirmar la alta variabilidad espacial de la lluvia en la zona de estudio, pues no se puede establecer un patrón geográfico claro (ver detalles en el Anexo B). Las particularidades encontradas en las series de lluvia analizadas permiten encontrar rasgos que no se ven afectados significativamente por la cantidad de registros utilizados para su cuantificación lo que aporta conocimiento significativo para la correcta descripción, predicción y simulación de la precipitación en el área. La generación de series sintéticas de lluvia para estudios de escala local y la planificación en cuencas hidrográficas sin mediciones pluviométricas, cuentan gracias a las particularidades encontradas en este estudio con un conjunto de características de la lluvia en múltiples escalas temporales que deben ser utilizadas para el enriquecimiento de los métodos y modelos utilizados para los estudios hidrológicos.

De igual manera, los resultados abren una ventana de investigación para indagar sobre la influencia de fenómenos meteorológicos de gran escala como el sistema ENSO, las Ondas Tropicales del Este o la oscilación de Madden-Julian en las estimaciones de la entropía, la 'dinámica de los ceros' y las medidas de complejidad.

5.2. Propiedades de Escalamiento Espacial en Sistemas Convectivos de Mesoescala (SCM) Según la misión TRMM durante 2003-2010

En la investigación realizada se estudian las propiedades de escalamiento espacial en campos de intensidad de lluvia en Sistemas Convectivos de Meso-escala identificados a partir de la información de la misión TRMM. Los estadísticos utilizados permiten caracterizar y cuantificar la dinámica espacial de la lluvia tropical en múltiples escalas. En

particular, se emplearon los métodos: (i) Espectro isotrópico de Fourier, (ii) Función de escalamiento de Momentos y (iii) Función de q -entropía espacial generalizada. Entre los resultados obtenidos se pueden reafirmar características reportadas en la literatura y se abren una serie de preguntas sobre la aplicación de la q -entropía en la caracterización de la precipitación y sus conexiones con las propiedades termodinámicas.

Los resultados evidencian que el espectro de potencias isotrópico de Fourier en los campos bi-dimensionales de intensidad de lluvia exhiben una ley de decaimiento potencial $E(k) = ck^{-\beta}$ donde c es el prefactor, k es el número de onda y β es el exponente de escalamiento. Para este último, el menor valor entre los eventos de intensidad de lluvia analizados fue $\beta=1.463$ para el SCM localizado en Colombia (CO). Considerando que valores bajos de β corresponden a campos aleatorios rugosos con baja correlación espacial, se puede vincular el resultado obtenido con los aspectos que inciden en la alta intermitencia de la precipitación en Colombia como: (a) orografía, (b) influencia hidrodinámica de grandes cuencas hidrográficas y (c) complejos procesos entre océanos, tierra y atmósfera (ver Poveda, 2011). Los eventos analizados en el Océano Pacífico (PO) y el Oeste de la Amazonía (WA) arrojan los exponentes de escalamiento β más altos lo que implica una mayor correlación espacial y podría estar asociada al régimen climático del Oeste de la Amazonia, ya que este presenta características de convección similares a la convección oceánica (Cifelli et al., 2002; Petersen et al., 2002; Morales & Poveda, 2009).

El análisis de escalamiento de momentos permite identificar que los campos de lluvia analizados exhiben escalamiento múltiple. La función de estructura para todos los eventos presenta una relación no lineal entre el orden del momento q y la pendiente $\tau(q)$ del ajuste potencial $M(q, \lambda)$ vs. λ . La función de estructura de los eventos analizados en el Este de la Amazonia (EA, evento cercano al Océano Atlántico) y el Mar Caribe (CS) presentan la mayor desviación de la línea teórica de escalamiento simple mostrando diferencias en los patrones de escalamiento estadístico de los Sistemas Convectivos de Meso-escala entre el Océano Atlántico, Continente y Océano Pacífico. En todos los casos la función de estructura se desvía de la línea teórica de escalamiento simple para el orden del momento $q=1.5$, valor que coincide con el parámetro q en el cual la función de q -entropía espacial generalizada se estabiliza. Esta característica abre nuevas preguntas de investigación debido a que el parámetro q de ambos enfoques puede

vincularse a los dos pilares en que está basada la termodinámica: *energía y entropía*. El primero se refiere a (dinámica o mecánica) posibilidades, el segundo se refiere a las probabilidades de esas posibilidades. Es decir, el primero es más básico y depende claramente del sistema físico mientras el segundo es más “sutil” y refleja la información sobre el sistema físico (Tsallis & Brigatti, 2004). La función de q -entropía espacial constituye una herramienta potencial para la caracterización espacial de la lluvia en múltiples escalas, las leyes potenciales de la forma $S(q, k) \sim k^\beta$ y la saturación de la función de q -entropía espacial para valores de $q > 1.5$ debe ser una característica fundamental para el modelado de campos de intensidad de lluvia dentro de sistemas convectivos de meso-escala, pues el valor del exponente de escalamiento donde se satura dicha función es diferente para eventos máximos en sistemas convectivos de meso-escala y para los campos de lluvia amazónica del radar S-POL.

5.3. Entropía de Shannon, q -Entropía Espacial y Temporal Generalizada, Momentos Estadísticos y Escala de Información en Campos de Lluvia Amazónica

Se evaluó la hipótesis nula de igualdad de funciones de distribución de probabilidades entre muestras de entropía Shannon para los regímenes climáticos predominantes clasificados a partir de los vientos zonales de la región de estudio (régimen del Este y régimen del Oeste). Para evaluar esta hipótesis se utilizó el método de Zhang y Wu (2006) que consiste en pruebas estadísticas más potentes y análogas a las tradicionales Kolmogorov-Smirnov (KS), Cramér-von Mises (W2) y Anderson-Darling (A2). Los resultados de los test para un nivel de significancia $\alpha=0.05$ sugieren rechazar la hipótesis nula lo que apuntaría a que la diferencia en la dinámica espacial de la lluvia es reflejada a través del estadístico fundamental de la teoría de la información.

Los análisis a partir de la función de q -entropía espacial y temporal generalizadas para $-1.0 < q < 3.0$ permiten detectar leyes potenciales de la forma $S(k, q) \sim k^\beta$ y $S(T, q) \sim T^\beta$, respectivamente. Las funciones de q -entropía en ambos casos exhiben un incremento lineal para $-1.0 < q < 0.5$, una transición en $0.5 \leq q \leq 1.5$ y la ‘saturación’ del exponente β para $q > 1.5$. Se encuentran grandes similitudes entre las funciones de q -entropía de espacio y tiempo lo que apunta a un vínculo espacio-tiempo de la dinámica de la lluvia

que merece ser objeto de mayor investigación. La función de q -entropía espacial para los campos de intensidad de lluvia no presenta diferencias claras entre los regímenes climáticos del Este y del Oeste, sin embargo, la pregunta sigue abierta para los eventos máximos de cada régimen climático predominante.

La relación entre los momentos estadísticos (media, varianza, asimetría y curtosis) y la entropía de Shannon fue estudiada. El análisis temporal entre momentos estadísticos-entropía de Shannon no permite establecer correlaciones lineales ni potenciales significativas para los momentos de primer y segundo orden (media y varianza), mientras los momentos estadísticos de tercer y cuarto orden permiten detectar leyes potenciales débiles. El análisis espacial muestra que la media y la varianza de los campos de intensidad de lluvia no exhiben patrones correlacionados con la entropía de Shannon, por el contrario, la asimetría y la curtosis presentan leyes potenciales de la forma $S(\gamma) \sim \gamma^n$ y $S(\zeta) \sim \zeta^n$, respectivamente. Los exponentes de escalamiento n no permiten establecer diferencias entre los regímenes climáticos. Las relaciones momentos-entropía encontradas tanto en el análisis de campos bi-dimensionales como en el análisis de series de tiempo vinculan la dinámica espacio-temporal de la precipitación con características de flujos turbulentos como convección, transporte e intermitencia dando evidencia de la alta variabilidad de la lluvia en pequeñas escalas espaciales y temporales.

La función de auto-información presenta un decaimiento rápido para $\tau < 300 \text{ min}$ y un decaimiento lento para $\tau \geq 300 \text{ min}$. Por su parte la escala de información no convergente. Por su definición y analogía con la escala de fluctuación este resultado sugiere que la lluvia puede ser pensada como un proceso de memoria global no finita.

5.4. Trabajo Futuro

En general, el trabajo enfrenta un problema abierto muy importante que tiene que ver con la interpretación física de las propiedades de multi-escalamiento en series de tiempo y campos bidimensionales de lluvia. Los métodos estadísticos implementados, en particular los exponentes de escalamiento, características entrópicas y análisis de multi-escala espacial y temporal, son herramientas que pueden ser utilizadas en metodologías de desagregación de la lluvia tales que reproduzcan la Función de Estructura del Análisis

de Escalamiento de Momentos o la Función de q -Entropía Generalizada de los datos lluvia obtenidos en campo.

Los resultados proveen una caracterización importante de los rasgos estadísticos de la distribución espacial en eventos de precipitación en SCM y en campos de lluvia Amazónica, la información suministrada debe servir para el desarrollo de modelos de precipitación en la meso-escala, la desagregación de modelos hidrológicos de gran escala y para la parametrización de procesos hidrológicos en superficie.

Finalmente, los análisis realizados deben servir como herramienta de diagnóstico de diversos modelos, así como para el uso de modelos numéricos como variable de entrada a modelos hidrológicos distribuidos de lluvia-escorrentía. De igual manera, la estimación de exponentes de escalamiento que no son sensibles a la cantidad de registros proporciona información valiosa que puede ser utilizada para enfrentar el problema de las cuencas sin medición.

A. Anexo: Pruebas de Hipótesis modificadas

Zhang y Wu (2006) proponen un nuevo método para construir una *prueba-k* basada en verosimilitud. En su trabajo no solo se expone la deducción de las pruebas tradicionales Kolmogorov-Smirnov (KS), Cramér-von Mises (W^2) y Anderson-Darling (A^2), sino que producen nuevos tipos de pruebas basadas en rangos (Z_k , Z_A y Z_C) que son mucho más potentes que sus análogas KS, A^2 y W^2 . A continuación se detallan las rutinas en MATLAB para la ejecución de dichas pruebas. Se puede encontrar detalle de estos algoritmos en código Splus en el trabajo de Zhang (2002).

A.1. Test Kolmogorov-Smirnov Modificado (Z_k)

Para la implementación de esta prueba es necesario tener en el directorio las funciones de MATLAB: *f.m*, *findRankFoundInR.m*, *g.m* y *rude.m*. La función principal será *f.m* las otras funciones serán utilizadas automáticamente por esta. La función *rude.m* puede ser encontrada en <http://www.mathworks.com>.

f.m

```
function [Zk, pvalue]=f(X1,X2,N)
n1=length(X1);
n2=length(X2);
C=[X1 X2];
R=ceil(findRankFoundInR(C));
n=n1+n2;
P=((1:n)-0.5)/n;
for i=1:n
    w(i)=n*(P(i)*log(P(i))+(1-P(i))*log(1-P(i)));
end
w;
Zk=max(g(n1,(R(1:n1)),n)+g(n2,(R(n1+1:n)),n)-w);
S=0;
for j=1:N
    R=randperm(n);
    zk=max(g(n1,R(1:n1),n)+g(n2,(R(n1+1:n)),n)-w);
    S=S+(zk>Zk);
end
pvalue=S/N;
```

g.m

```

function [g]= g(m,r,M)
d=sort(r);
D=[1 d M+1];
D2=D(2:(m+2));
D1=D(1:(m+1));
D3=D2-D1;
a=0:m;
p=rude(D3,a);
    p(d)=p(d)-0.5;
    p=p/m;
    for j=1:length(p)
        g(j)=m*(p(j)*log(p(j)+0.00001)+(1-p(j))*log((1-
p(j)+0.000001)));
    end
end

```

findRankFoundInR.m

```

function [rankArr] = findRankFoundInR(data)
% Esta función reproduce un rango que es igual al rango que
% arroja la función rank() en R.
%La función rank() de matlab arroja resultados levemente
diferentes.
y=data;
rank=0;
rankArr=zeros(1,numel(y));
while min(y)~=9999
    idsMin=find(y==min(y));
    ranks=(rank+1):(rank+numel(idsMin));
    rankArr(idsMin)=mean(ranks);
    rank=max(ranks);
    y(idsMin)=9999;
end

```

A.2. Test Anderson–Darling Modificado (Z_A)

Para la implementación de esta prueba es necesario tener en el directorio las funciones de MATLAB: *f.m*, *findRankFoundInR.m*, *g.m* y *rude.m*. Las funciones *findRankFoundInR.m*, *g.m* y *rude.m* son las mismas referidas en la sección A.1., Test Kolmogorov-Smirnov Modificado (Z_k). La función *f.m* que se utiliza para el test Anderson–Darling Modificado es diferente a la función *f.m* del test referido en la sección A.1., como se muestra a continuación:

f.m

```

function [Zk, pvalue]=f(X1,X2,N)
n1=length(X1);
n2=length(X2);
C=[X1 X2];
R=ceil(findRankFoundInR(C));
n=n1+n2;
P=((1:n)-0.5)/n;
for i=1:n
    w(i)=n*(P(i)*log(P(i))+(1-P(i))*log(1-P(i)));
end
w;
Zk=max(g(n1,(R(1:n1)),n)+g(n2,(R(n1+1:n)),n)-w);
S=0;
for j=1:N
    R=randperm(n);
    zk=max(g(n1,R(1:n1),n)+g(n2,(R(n1+1:n)),n)-w);
    S=S+(zk>Zk);
end
pvalue=S/N;

```

A.3. Test Cramér–von Mises Modificado (Z_c)

Para la implementación de esta prueba es necesario tener en el directorio las funciones *f.m*, *g.m* y *findRankFoundInR.m*. Esta es la misma mencionada en las secciones A.1 y A.2. Por el contrario las funciones *f.m* y *g.m* son diferentes y se muestran a continuación:

f.m

```

function [Zc, pvalue]= f(X1,X2,N)
n1=length(X1);
n2=length(X2);
C=[X1 X2];
R=findRankFoundInR(C);
n=n1+n2;
S=0;
Zc=(g(n1,sort(R(1:n1)),n)+g(n2,sort(R(n1+1:n)),n))/n;
for j=1:N
    R=randperm(n);
    zc=(g(n1,sort(R(1:n1)),n)+g(n2,sort(R(n1+1:n)),n))/n;
    S=S+(zc<Zc);
end
pvalue=S/N;

```

g.m

```
function [g]= g(m,r,M)
A1=1:m;
for i=1:m
g1=(log(m/(A1(i)-0.5)-1)*log(M/((r(i)-0.5)-1)));
g=sum(g1);
end
```

B. Anexo: Parámetros y Distribución Geográfica

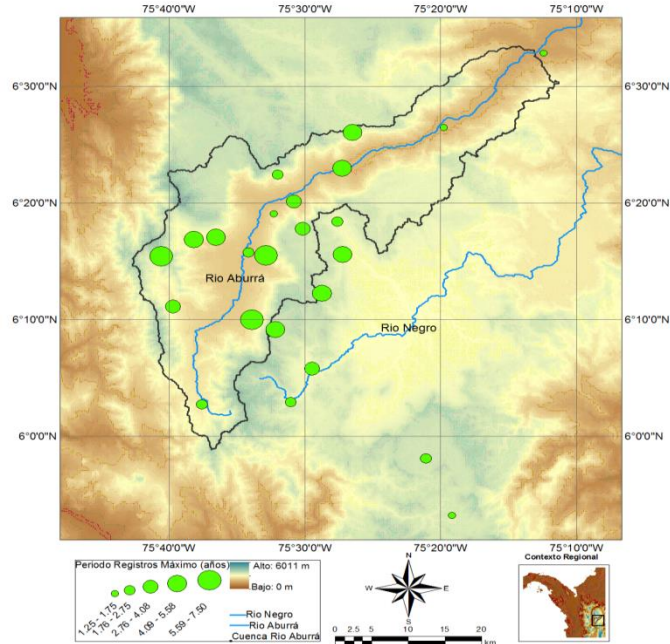
B.1. Parámetros función de distribución de probabilidades Pareto Generalizada.

En la Tabla B.1 se muestran los parámetros k , σ y μ de la Función de Distribución de Probabilidades Generalizada de Pareto para el intervalo de agregación donde se alcanza la máxima entropía ($T_{\max Ent}$) en las estaciones del valle de Aburrá y del altiplano de San Nicolás.

Tabla B.1. Parámetros k , σ y μ de la Función de Distribución de Probabilidades Generalizada de Pareto para $T_{\max Ent}$ (h).

ID	Estación	Común (Poveda. 2011)			Máximo		
		k	σ	μ	k	σ	μ
1	El Astillero	-0.150	44.670	-5.608	-0.209	38.930	-3.115
2	Ayurá	-0.216	42.760	-1.810	-0.252	39.753	-1.631
3	Caldas	-0.580	75.500	-1.195	-0.208	28.472	-1.150
4	San Antonio de Prado	-0.380	51.240	-1.597	-0.213	33.006	-0.478
5	Planta Villa Hermosa	-0.228	31.210	-3.916	-0.261	36.018	-1.575
6	Girardota	-0.129	27.290	-3.018	-0.099	29.858	-1.416
7	Chorrillos	-0.276	40.830	-3.400	-0.126	25.868	-1.686
8	El Convento	-0.149	31.550	-3.010	-0.290	30.564	-1.658
9	Miguel de Aguinaga	-0.196	25.450	-2.616	-0.021	21.858	-0.058
10	San Cristóbal	0.008	24.400	-2.802	-0.200	34.920	-1.742
11	Cucaracho	-0.056	28.610	-2.884	-0.182	37.949	-1.918
12	Manantiales	0.189	10.140	-1.778	0.038	19.044	-2.078
13	Niquía	-0.192	31.890	-3.559	-0.206	29.020	-1.791
14	Alto de San Andrés	-0.115	27.190	-2.774	-0.141	27.955	-0.884
15	Barbosa	-0.215	42.060	-2.734	-0.010	22.569	-0.738
16	Gabino	-0.217	60.020	-7.483	-0.077	40.651	-3.867
17	La Fe	-0.128	29.450	-3.348	-0.217	34.694	-2.652
18	La Severa	-0.067	21.170	-2.548	-0.151	28.683	-1.572
19	Las Palmas	-0.034	19.621	-1.936	-0.208	35.810	-1.994
20	Vasconia	-0.084	23.674	-2.063	-0.107	32.040	-2.144
21	El Retiro	-0.145	25.038	-1.634	-0.167	27.030	-1.315
22	La Mosca	-0.102	24.504	-2.054	-0.105	23.743	-1.918
23	Mesopotamia	-0.098	20.530	-3.004	-0.110	25.559	-0.554
24	La Unión	-0.079	25.640	-2.573	-0.335	28.364	-1.222

B.2. Distribución geográfica relacionada con la entropía de Shannon en múltiples escalas



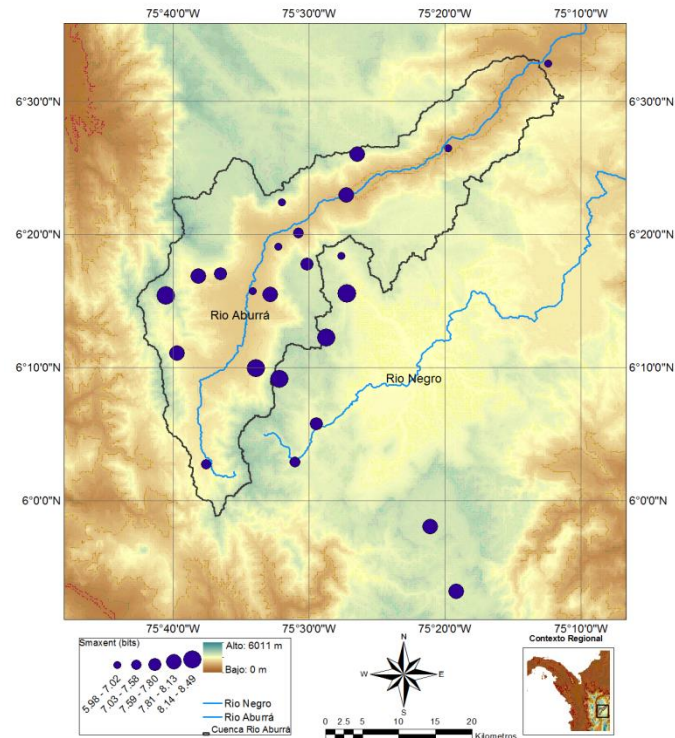


Figura B.3. Máxima entropía S_{maxent} (bits) para los periodos máximos de registros continuos sin datos faltantes de cada estación.

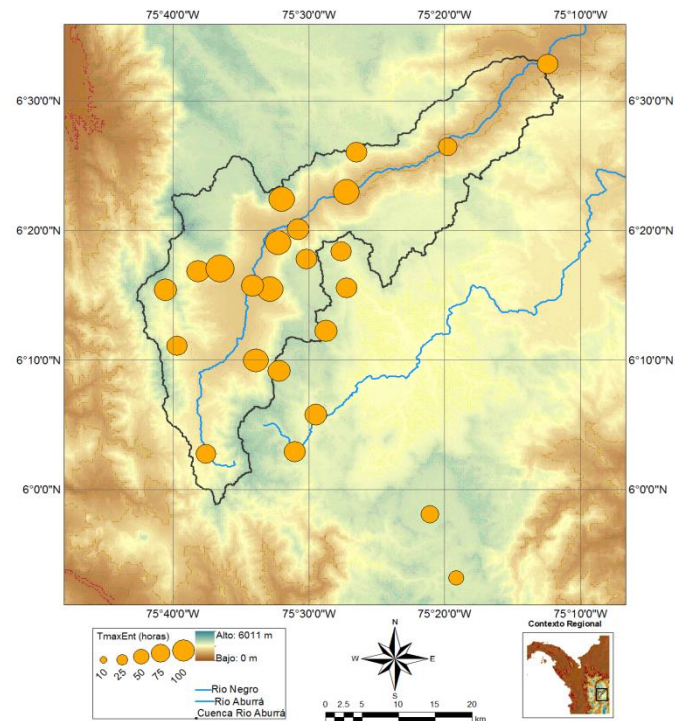


Figura B.4. Intervalo de agregación donde se alcanza la máxima entropía T_{maxent} (bits) para los periodos máximos de registros continuos sin datos faltantes de cada estación.

B.3. Gráficos de la sensibilidad de los parámetros a la cantidad de información utilizada para su cuantificación

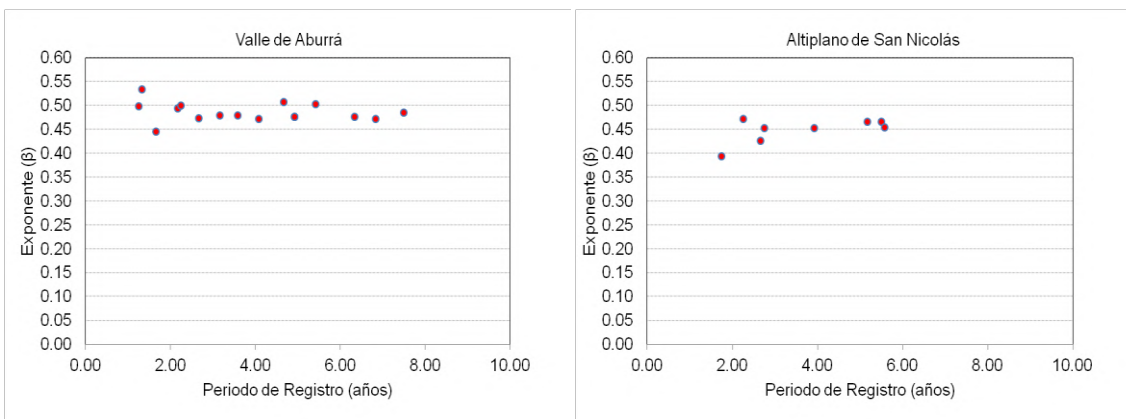


Figura B.5. Exponente β para las estaciones de la zona de estudio estimado con diferente cantidad de registros.

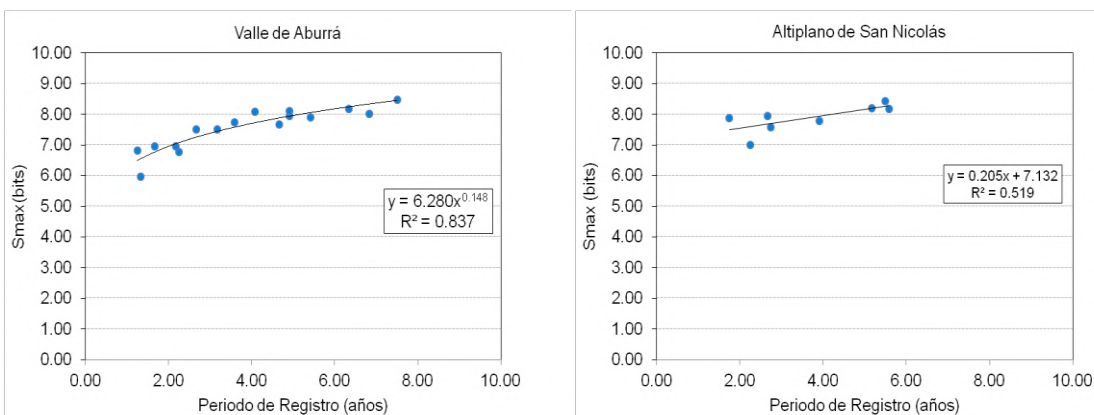


Figura B.6. Valor de Máxima entropía (Smax) para diferentes periodos de registro.

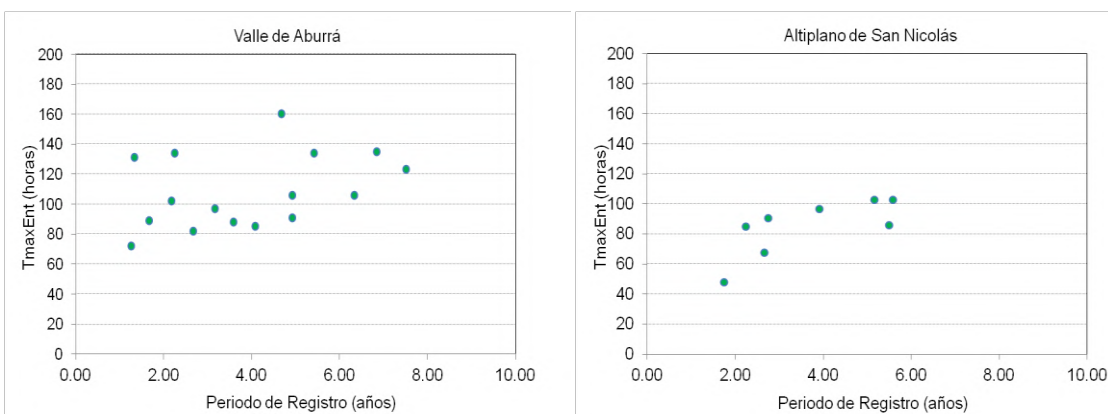


Figura B.7. Tiempo de agregación al cual se haya la máxima entropía y su relación con el periodo de registros.

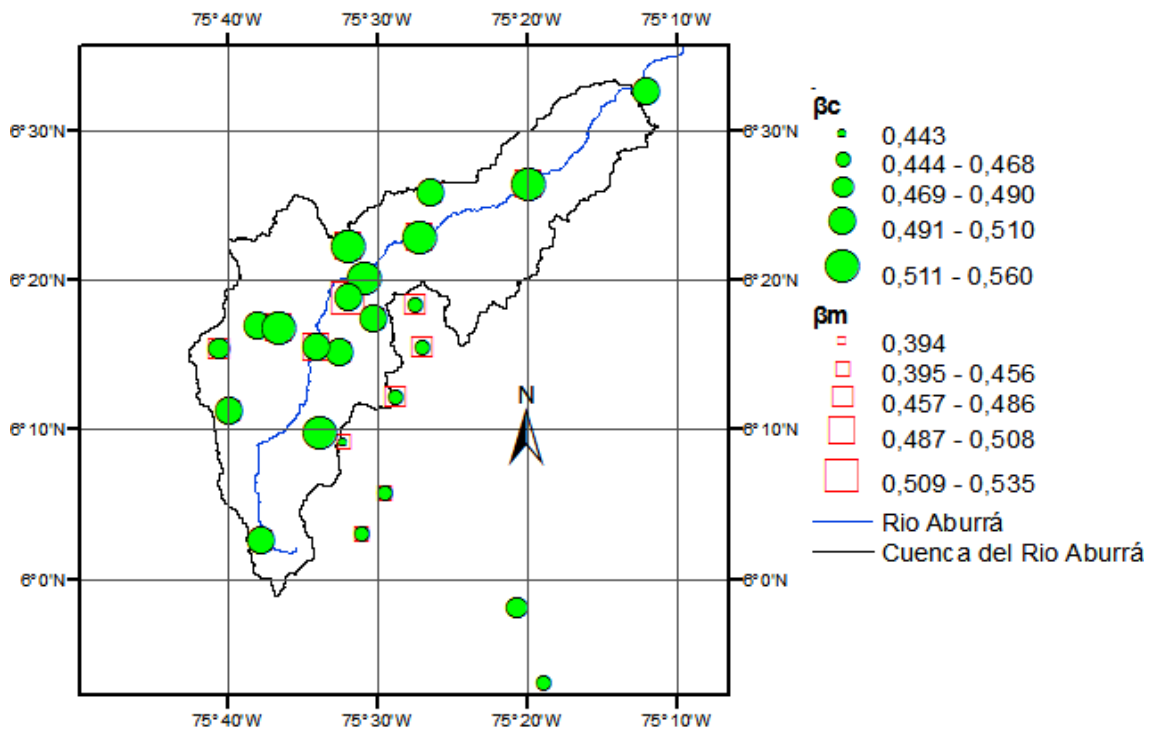


Figura B.8. Comparación de los exponentes β del ajuste potencial $S(T) \sim T^\beta$ para el periodo de registros común entre estaciones β_c y el periodo máximo de registros de cada estación β_m

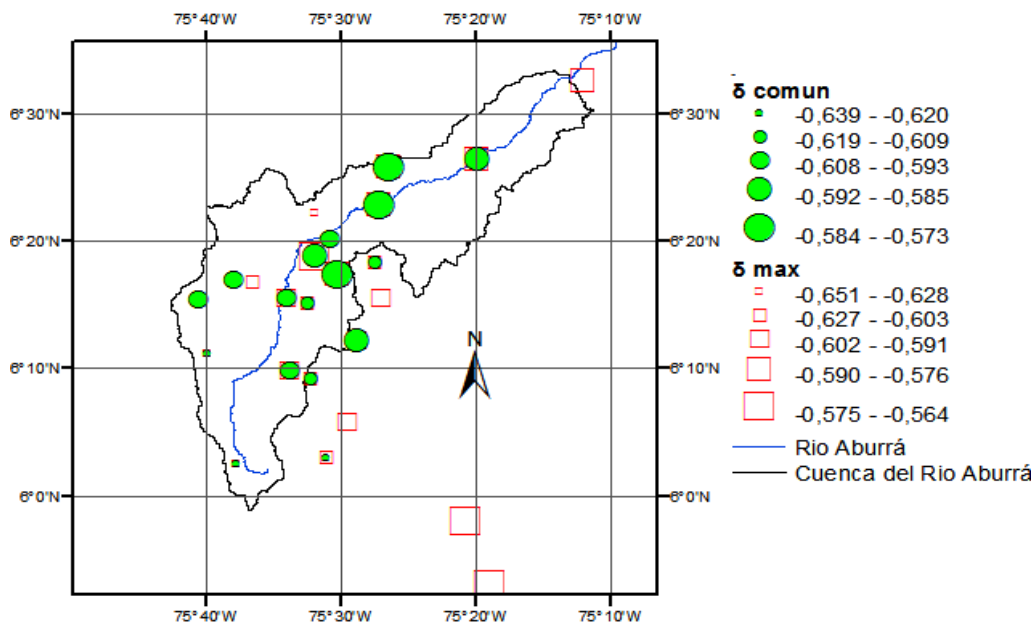


Figura B.9. Exponente δ del ajuste potencial $\gamma(T) \sim T^\delta$ para la función de varianza. Periodo común de registros δ_{comun} . Periodo máximo de registros δ_{max} .

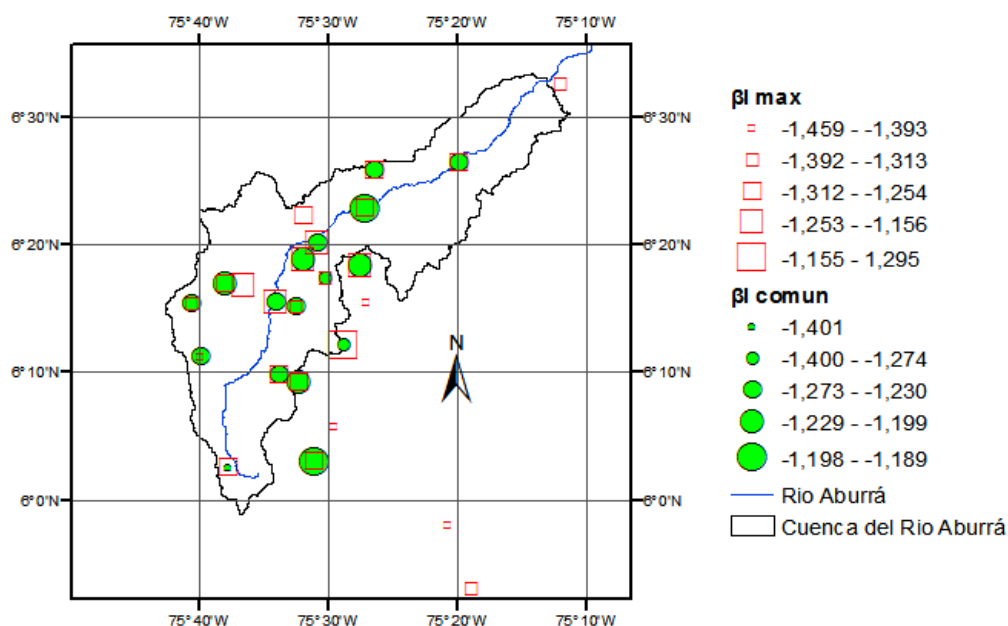


Figura B.10. Exponentes para los ajustes potenciales de la cantidad de ceros para diferentes intervalos de agregación utilizando diferentes longitudes de registro. βI hace referencia al exponente del ajuste potencial tipo I ($\zeta(T)=aT^{\beta}$).

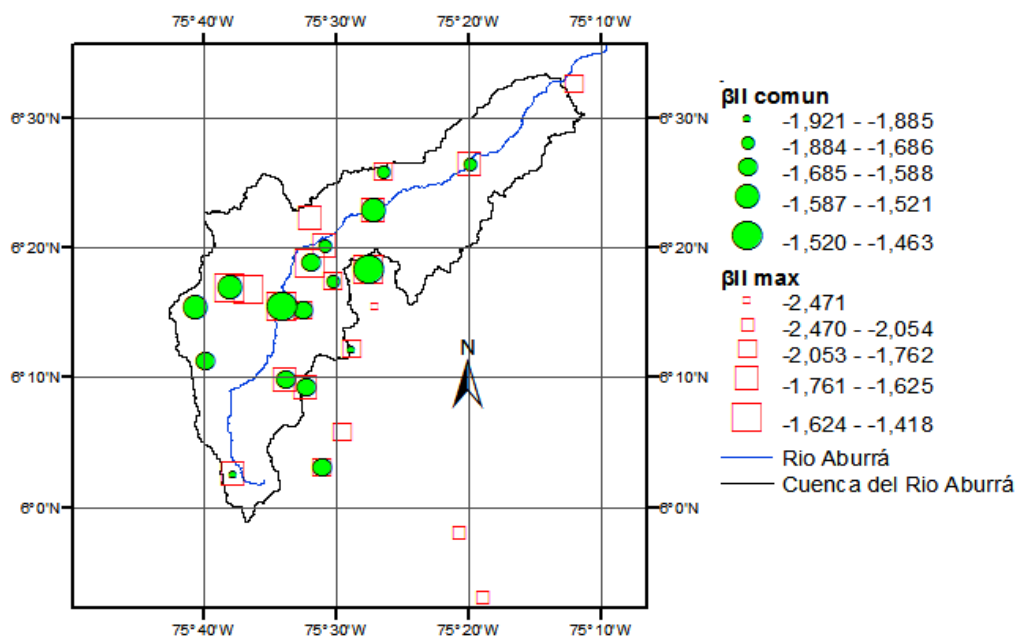


Figura B.11. Exponentes para los ajustes potenciales de la cantidad de ceros para diferentes intervalos de agregación utilizando diferentes longitudes de registro. βII hace referencia al exponente del ajuste potencial tipo II. ($\zeta(T)=aT^{\beta}+c$).

Referencias bibliográficas

Barros Ferraz, S.F., Vettorazzi, C.A., Theobald, D.M. (2009) Using indicators of deforestation and land-use dynamics to support conservation strategies: A case study of central Rondônia, Brazil. *Forest Ecology and Management*, Volume 257, Issue 7, 22 March 2009, Pages 1586-1595.

Ball, R (2005). The Kolmogorov cascade. In: Alwyn Scott (editor), *Encyclopedia of Nonlinear Science*. Routledge, Taylor & Francis Group New York.

Bercher, J-F. (2008) Tsallis distribution as a standard maximum entropy solution with 'tail' constraint. Preprint submitted to *Physics Letters A*. Typesetted 18 June 2008.

Brunsell, N.A. (2010) A multiscale information theory approach to assess spatial-temporal variability of daily precipitation. *Journal of Hydrology* 385 (2010) 165–172.

Burgers, G., Stephenson, D.B. (1999) The "normality" of El Niño. *Geophysical Research Letters*. Volume 26, Issue 8, Pages 1027-1030.

Catalán, R. G., Garay, J., López-Ruiz, R. (2002) Features of the extension of a statistical measure of complexity to continuous systems. *PHYSICAL REVIEW E* 66, 011102 (2002).

Cheng, Q., Sun, Y., Lin, J., Damerow, L., Shulze, L., Lammers, P., Hueging, H. (2012) Applying two-dimensional Fourier Transform to investigate soil surface porosity by laser-scanned data. *Soil and Tillage Research* 124, pp. 183-189.

Cifelli, R., W. A. Petersen, L. D. Carey y S. A. Rutledge. (2002) Radar observations of the kinematics, microphysical, and precipitation characteristics of two MCSs in TRMM LBA. *Journal of Geophysical Research*, 107 (D20), 8077.

Cifelli, R., W. A. Petersen, L. D. Carey, S. A. Rutledge, and M. A. F. daSilva-Dias (2002), Radar observations of the kinematics, microphysical, and precipitation characteristics of two MCSs in TRMM LBA, *J. Geo-phys. Res.*, 107(D20), 8077, doi:10.1029/2000JD000264.

Daróczy, Z. (1970) General information functions, *Information and Control*, Vol, 16, pp. 365-1.

Davis, A., A. Marshak, W. Wiscombe, y R. Cahalan. (1996) Scale invariance of liquid water distributions in marine stratocumulus. part i: Spectral properties and stationarity issues. *Journal of Atmospheric Sciences*, 53:1538—1558.

Deidda R., Benzi, R. y Siccardi, F. (1999) Multifractal modeling of anomalous scaling laws in rainfall. *Water Resources Research*, 35, 1853-1867.

Deidda, R., Badas, M.G., Piga, E. (2006) Space-time multifractality of remotely sensed rainfall fields. *Journal of Hydrology* 322 (1-4), pp. 2-13.

Ebtehaj, M., Foufoula-Georgiou, E. (2010) Orographic signature on multiscale statistics of extreme rainfall: A storm-scale study. *Journal of Geophysical Research D: Atmospheres* 115 (23), art. no.D23112.

Endreny, T.A., Pashiardis, S. (2006) The error and bias of supplementing a short, arid climate, rainfall record with regional vs. global frequency analysis. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jhydrol.-2006.10.005>

Frisch, U. (1995) *Turbulence. The legacy of A. N. Kolmogorov*, Cambridge, Cambridge University Press.

Furuichi, S. (2010) Information theoretical properties of Tsallis entropies. *arXiv:cond-mat/0405600v5 [cond-mat.stat-mech]* 10 Jan 2010.

Gaspard, P. 2005. *Entropy. Encyclopedia of Nonlinear Science*. Alwyn Scott, Editor. Routledge, New York, pp. 264-266.

Gires, A., Tchiguirinskaia, I., Schertzer, D., Lovejoy, S. (2012) Influence of the zero-rainfall on the assessment of the multifractal parameters. *Advances in Water Resources* 45 (2012) 13–25.

Gibbons, J. D. (1985), *Nonparametric Statistical Inference*, New York, Marcel Dekker.

Gray, R. M. (2009) *Entropy and Information theory*. Information Systems Laboratory. Electrical Engineering Department, Stanford University. Springer-Verlag, New York.

Gupta, V. K. y Waymire, E. C. (1990) Multiscaling properties of spatial rainfall and river flow distributions. *Journal of Geophysical Research*, 95 (D3), 1999-2010.

Gupta, V. K. y Waymire, E. C. (1993) A statistical analysis of mesoscale rainfall as a random cascade. *Journal of Applied Meteorology*, 32, 251-267.

Harris, D., Foufoula-Georgiou, E. (2001) Multiscale statistical properties of a High-Resolution Precipitation Forecast. *Journal of Hydrometeorology*. Vol.2. pag 406-418.

Harris, D., Menabde, M., Seed, A., G. Austin. (1996) Multifractal characterization of rain fields with a strong orographic influence. *Journal of Geophysical Research*, Vol. 101, No. D21, Pages 26, 405-26,414. November 27.

Havrda, J.H. and Charvát. F. (1967) Quantification method of classification processes: Concept of structural α -entropy, *Kybernetika* (Prague). Vol, 3, pp.30-35 (1967)

Hollander, M., and D. A. Wolfe (1999), *Nonparametric Statistical Methods*, Hoboken, John Wiley and Sons, Inc.

Houze, Robert A., M. I. Biggerstaff, S. A. Rutledge, B. F. Smull (1989): Interpretation of Doppler Weather Radar Displays of Midlatitude Mesoscale Convective Systems. *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, 70, 608–619.

Hurtado, A.F., Poveda, G. (2009) Linear and global space-time dependence and Taylor hypotheses for rainfall in the tropical Andes. *Journal Of Geophysical Research*, VOL. 114, D10105, doi:10.1029/2008JD011074, 2009.

Jaramillo, L. (2012) Caracterización de la lluvia y eventos de precipitación durante 2003-2010 definidos por la misión para la medición de lluvias tropicales (TRMM) sobre Colombia y la cuenca Amazónica. Tesis de Maestría. Universidad Nacional de Colombia-Sede Medellín. Escuela de Geociencias y Medio Ambiente.

Jothityangkoo, C. Sivapalan, M. Viney. N. (2000). Test of a space-time model of daily rainfall in southwestern Australia based on nonhomogeneous random cascades. *Water Resources Research*, Vol. 36, No.1. Pages 267-284, January 2000.

Kalnay, E., y coautores. (1996) The NCEP–NCAR 40–year Reanalysis project. *Bulletin of the American Meteorological Society*, 77, p.437–471.

Knuth, K. H. (2006) Optimal Data-Based Binning for Histograms. *arXiv:physics/0605197v1 [physics.data-an]* 23 May 2006.

Kolmogorov, A.N. (1941b) On degeneration of isotropic turbulence in an incompressible viscous liquid. *Comptes Rendus (Doklady) de l'Academie des Sciences de l'U.R.S.S.*, 31: 538–540, *ibidem*.

Kolmogorov, A.N. (1941a) Local structure of turbulence in an incompressible fluid for very large Reynolds numbers. *Comptes rendus (Doklady) de l'Academie des Sciences de l'U.R.S.S.*, 31: 301–305 Reprinted in: S.K. Friedlander & L. Topper (editors). 1961. *Turbulence: Classic Papers on Statistical Theory*, New York: Interscience Publishers.

Korvin, G. (1992) *Fractal Models in the Earth Sciences*, Amsterdam, Elsevier.

Koutsoyiannis, D. (2005) Uncertainty, entropy, scaling and hydrological stochasticity. 1. Marginal distributional properties of hydrological processes and state scaling. *Hydrological Sciences–Journal–des Sciences Hydrologiques*, 50(3).

Kowalski, A.M., Plastino, A. (2012) The Tsallis-complexity of a semiclassical time-evolution. *Physica A* 391 (2012) 5375–5383.

Kummerow, C. W., Barnes, W., Kosu, T., Shiue, J. y Simpson, J. (1998) The Tropical Rainfall Measuring Mission (TRMM) sensor package. *Journal Atmos. Oceanic Technol.*, 15, 809-807.

Kunstmann, H. , Kastens, M. (2006) Direct propagation of probability density functions in hydrological equations. *Journal of Hydrology*. Volume 325, Issue 1-4, 30 June 2006, Pages 82-95.

López-Ruiz, R., Mancini, H.L., Calbet, X. A statistical measure of complexity. *Physics Letters A* 209 (1995) 321-326.

Lovejoy S, Schertzer D. Scaling and multifractal fields in the solid earth and topography. *Nonlinear Process Geophys* 2007;14:465–502.

Lovejoy, S. & Schertzer, D. (1987) Physical modeling and analysis of rain clouds by anisotropic scaling multiplicative processes. *Journal of Geophysical Research*, 92 (D8), 9693-714.

Mandelbrot, B. B. (1998) Multifractals and $1/f$ noise. *Wild self-affinity in Physics (1963-1976)*. Selecta Volume N, Springer-Verlag, New York, 442 pp.

Mejía, J. F. (2002) Ciclo diario de la lluvia y ambientes atmosféricos en sistemas convectivos de meso-escala sobre Colombia y el Este del Océano Pacífico usando datos de la TRMM y del Reanálisis del NCEP/NCAR. Tesis de Maestría. Universidad Nacional de Colombia. Sede Medellín.

Menabde, M., Harris, D., Seed, A., Austing, G., Stow, D. (1997) Multiscaling properties of rainfall and bounded random cascades. *Water Resources Research*, vol.33, No. 12, pages 2823-2830.

Mesa, O.J. & Poveda, G. (1993) The Hurst effect: The scale of fluctuation approach. *Water Resources Research*, 29, 3995-4002.

Molini, A., Katul, G.G., Porporato, A. (2009) Revisiting rainfall clustering and intermittency across different climatic regimes. *Water Resources Research* 45 (11), art. no. W11403.

Morales, J. & Poveda, G. (2009) Diurnally driven scaling properties of Amazonian rainfall fields: Fourier spectra and order- q statistical moments. *JOURNAL OF GEOPHYSICAL RESEARCH*, VOL. 114, D11104, doi:10.1029/2008JD011281, 2009.

Nauenberg, M. (2004) Reply to "comment on 'critique of q -entropy for thermal statistics". *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics* 69 (3 2) , art. no. 038102 , pp. 038102-1.

Nykanen DK. Linkages between orographic forcing and the scaling properties of convective rainfall in mountainous regions. *J Hydrometeorol* 2008;9:327–47.

Oikonomou, T. (2011) Comment on "critique of multinomial coefficient method for evaluating Tsallis and Renyi entropies" by A.S. Parvan. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 390 (5), pp. 781-784.

Olsson, J. & Niemczynowicz, J. (1996) Multifractal analysis of daily spatial rainfall distributions. *Journal of hydrology*, 187 29-43.

Over, T. & Gupta, V. K. (1994) Statistical Analysis of Mesoscale Rainfall: Dependence of a Random Cascade Generator on Large-Scale Forcing. *Journal of Applied Meteorology*. Vol. 33. pags 1526-1542.

Pardo, L. (1993) Teoría de la información estadística. *Estadística Española*. Vol 35, Núm. 133, 1993, pags, 195 a 268.

Parvan, A.S. (2010) Critique of multinomial coefficients method for evaluating Tsallis and Rnyi entropies. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 389 (24) , pp. 5645-5649.

Pedlowski, M.A., Virginia H. D., Eraldo A.T. Matricardi, Eliomar Pereira da Silva Filho. (1997) Patterns and impacts of deforestation in Rondônia, Brazil. *Landscape and Urban Planning*, Volume 38, Issues 3–4, 15 November 1997, Pages 149-157.

Pegram, G., Lloret, X., Sempere-Torres, D. (2011) Radar rainfall: Separating signal and noise fields to generate meaningful ensembles. *Atmospheric Research*, Volume 100, Issues 2–3, May 2011, Pages 226-236.

Perez, A. (2007) Problemas de Máxima entropía y Cálculo variacional. Universidad Central de Venezuela. Facultad de Ciencias. Posgrado en matemática.

Petersen, W., S. W. Nesbitt, R. J. Blackeslee, R. Cifelli, P. Hein y S. A. Rutledge. (2002) TRMM observations of intraseasonal variability in convective regimes over the Amazon. *Journal of Climate*, 14, p. 1278–1294.

Petersen-Øverleir, A. (2005) Misspecification of extreme rainfall population statistics and frequency inference due to measurement bias and variability. *Atmospheric Research*. Volume 75, Issue 4, June 2005, Pages 283–300.

Poveda, G. (2009) Escala de Información, Escala de fluctuación y entropía de las lluvias en el Valle de Aburrá, Colombia. *Rev. Acad. Colomb. Cienc.* 33(128):339-356, 2009. ISSN 0370-3908.

Poveda, G. (2011) Mixed memory, (non) Hurst effect, and maximum entropy of rainfall in the tropical Andes. *Advances in Water Resources* 34 (2011) 243-256.

Poveda, G. & Mejia, J.F. (2004) Escalamiento espacial de sistemas convectivos de mesoescala sobre Colombia y el Pacífico oriental en 1998 según la misión TRMM. *Avances en Recursos hidráulicos*- Número 11, Septiembre de 2004-Medellín-ISSN 0121-5701.

Poveda, G. & Salazar, L. F. (2004) Annual and interannual (ENSO) variability of spatial scaling properties of a vegetation index (NDVI) in Amazonia. *Remote sensing of*

Environment.

Poveda, G., Mesa, O.J., Salazar, L.F., et al. (2005) The diurnal cycle of precipitation in the tropical Andes of Colombia. *Mon Weather Rev* 2005;133:228–40.

Press, WH; Teukolsky, SA; Vetterling, WT; Flannery, BP (2007), "Chapter 12. Fast Fourier Transform", *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing* (3rd ed.), New York: Cambridge University Press, ISBN 978-0-521-88068-8.

Rathie, P.N. Da Silva, S. (2008) Shannon, Lévy and Tsallis: A Note. *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 2, 2008, no. 28,1359-1363.

Rawlings, J. O., S. G. Pantula, and D. A. Dickey (1988), *Applied Regression Analysis: A Research Tool*, Second Edition, New York, Springer-Verlag.

Rényi, A. (1955) On a new axiomatic theory of probability. Volume 6, Numbers 3-4 (1955), 285-335, DOI: 10.1007/BF02024393.

Rényi, A. (1955) On a new axiomatic theory of probability. Volume 6, Numbers 3-4 (1955), 285-335, DOI: 10.1007/BF02024393.

Roe, G.H. (2005) Orographic precipitation. *Annual Review of Earth and Planetary Sciences* 33, pp. 645-671.

Schertzer, D., et al. Multifractal Extreme Value Theory (MEV). AGU Chapman Conference on Complexity and Extreme Events in Geosciences. Hyderabad, India: Agu, 2010.

Schroeder, M. (1990). *Fractals, Chaos, Power Laws. Minutes from an infinite paradise*. W. H. Freeman and Company. New York.

Seibt, P. (2006) *Algorithmic Information Theory*. Berlin Heidelberg: SpringerVerlag.

Shannon CE. (1948) A mathematical theory of communication. *Bell Syst. Technol J.* 1948;27:379-423.

Singh, V. P. (2011) Hydrologic Synthesis Using Entropy Theory: Review. *Journal of Hydrologic Engineering* © Asce / May 2011 / 421.

Singh, V.P. (1997). The use of entropy in hydrology and water resources. *Hydrological Processes*, VOL. 11, 587-626.

Sommerfeld, A. (1956) *Thermodynamics and Statistical Mechanics*, New York: Academic Press.

Stensrud DJ. (2007) *Parameterization schemes: keys to understanding numerical weather prediction models*. Cambridge University Press; 2007. 459 p.

Tsallis, C. (1988) Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs Statistics. *Journal of*

Statistical Physics, Vol. 52, Nos. 1/2.

Tsallis, C. (2004) Nonextensive statistical mechanics: construction and physical interpretation. In: Nonextensive Entropy, Interdisciplinary Applications (ed. by M. Gell-Mann & C. Tsallis), 1–53. Oxford University Press, New York, USA.

Tsallis, C. (2005) Nonextensive statistical mechanics, anomalous diffusion and central limit theorems. *Milan J Math* 2005;73:145–76. doi:10.1007/s00032-005-0041-1.

Tsallis, C. (2011) The Nonadditive Entropy S_q and Its Applications in Physics and Elsewhere: Some Remarks. *Entropy* 2011, 13, 1765-1804; doi:10.3390/e13101765.

Tsallis, C., Tirnakli, U. (2010) Nonadditive entropy and nonextensive statistical mechanics - Some central concepts and recent applications. *Mathematical Aspects of Generalized Entropies and their Applications. Journal of Physics: Conference Series* 201 (2010) 012001 doi:10.1088/1742-6596/201/1/012001.

Umarov S, Tsallis C, Steinberg S. A generalization of the central limit theorem consistent with nonextensive statistical mechanics. *Milan J Math* 2008;76:307. doi:10.1063/1.2828756. Available from: arXiv:cond-mat/0603593v4 .

Vanmarcke (1988): *Random Fields, Analysis and Synthesis*. The MIT press, Cambridge, Massachusetts. London, England.

Veneziano, D., and C. Lepore (2012), The scaling of temporal rainfall, *Water Resour. Res.*, 48, W08516, doi:10.1029/2012WR012105.

Weijjs, S. V., G. Schoups, and N. van de Giesen. (2010) Why hydrological predictions should be evaluated using information theory. *Hydrol. Earth Syst. Sci.*, 14, 2545-2558.

Weijjs, S. van de Giesen, N. (2010) Information theory, uncertainty and risk for evaluating hydrologic forecasts. *International Workshop Advances In Statistical Hydrology*. May 23-25, 2010. Taormina, Italy.

Zhang, J. & Wu, Y. (2007) k Samples test based on the likelihood ratio. *Computational Statistics & Data Analysis* 51 (2007) 4682–4691.

Zhang, J. (2001) *Powerful Goodness-of-Fit and Multi-Sample Tests*. A thesis submitted to the Faculty of Graduate Studies in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy. Graduate Programme in Statistics. York University. Toronto, Ontario.

Zhou L, Wang YQ. (2006) Tropical rainfall measuring mission observation and regional model study of precipitation diurnal cycle in the New Guinean region. *J Geophys Res – Atmos* 2006;111(D17):D17104.

Zuluaga, M. D. & Poveda, G. (2004) Sistemas convectivos de mesoescala en Colombia y el Pacífico Oriental durante 1998-2002 según la misión TRMM, *Avances en Recursos Hidráulicos*.

