

Optimización topológica evolutiva multiobjetivo aplicada al diseño de metamateriales para el
aislamiento sísmico de edificaciones

Jeffrey José Guevara Corzo

Tesis para Optar al Título de Doctor en Ingeniería Mecánica

Director

Oscar Javier Begambre Carrillo

Doctor en Ingeniería de Estructuras

Codirectores

Heller Guillermo Sánchez Acevedo

Doctor en Ingeniería Mecánica Aplicada y Computacional

Jesus Antonio García Sánchez

Doctor en Ingeniería de Estructuras

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ingenierías Físico-mecánicas

Escuela de Ingeniería Mecánica

Programa de Doctorado en Ingeniería Mecánica

Bucaramanga

2026

Agradecimientos

Primero me gustaría agradecer a dios, mis padres y mi hermana por el apoyo, la paciencia y comprensión durante estos años de formación y estudio.

Adicionalmente me gustaría extender mis agradecimientos al profesor Oscar Begambre-Carrillo (INME - Universidad Industrial de Santander) por su constante apoyo y paciencia y a los profesores Jesus García-Sánchez (Instituto de Engenharia Mecânica - Universidade Federa de Itajuba) y Heller Sánchez-Acevedo (GIEMA - Universidad Industrial de Santander) por sus valiosas sugerencias, y consejos durante todo el proceso.

También me gustaría aprovechar estas líneas para agradecer a la Profesora Carolina Quintero-Ramírez (USP - UNIFEI) por todo el apoyo y paciencia al desarrollar el programa FEM no lineal geométrico. Al ingeniero y colega Carlos Barrera del semillero de investigación en programación y métodos numéricos del grupo de investigación GIEMA. Me gustaría agradecer también a Laura, Sebas, Ivonne y demás colegas por los buenos momentos y finalmente a los funcionarios administrativos y profesores del programa de doctorado en ingeniería mecánica de la Universidad Industrial de Santander y al grupo de investigación INME por todo el apoyo brindado.

Tabla de Contenido

Introducción	19
1 Objetivos.....	24
1.1 Objetivos generales	24
1.2 Objetivos específicos	24
1.3 Alcance de la investigación.....	24
1.4 Productos de la investigación.....	25
1.4.1 Artículos en revistas indexadas	25
1.4.2 Congresos	25
1.4.3 Otros productos	25
2 Estado del arte	27
2.1 Análisis bibliométrico.....	27
2.2 Origen	30
2.3 Metamateriales Mecánicos	30
2.3.1 Metamateriales asociados al módulo de Young (E).....	31
2.3.1.1 Micro/nano armaduras	31
2.3.1.2 Metamateriales quirales.....	33
2.3.1.3 Metamateriales de origami	34
2.3.1.4 Origami celular	37
2.3.1.5 Patrones de transformación	38
2.3.2 Metamateriales asociados al módulo de cortante (G) y volumétrico (K)	39
2.3.2.1 Metamaterial pentamodal	39
2.3.2.2 Compresibilidad negativa.....	41

OTEM APLICADA AL DISEÑO DE MM PARA AISLAMIENTO SÍSMICO	4
2.3.3 Metamateriales asociados a la relación de Poisson (ν)	42
2.3.3.1 Metamateriales auxéticos	42
2.4 Sistemas de protección sísmica	43
2.4.1 Sistemas de protección sísmica clásicos	43
2.4.2 Sistemas de protección sísmica con metamateriales	46
2.4.2.1 Los metamateriales sísmicos de suelo	46
2.4.2.2 Los resonadores de superficie	48
2.4.2.3 Los resonadores de masa enterrados	48
2.4.2.4 Los metamateriales sísmicos auxéticos	49
2.4.2.5 Los metamateriales pentamodales en aislamiento sísmico	49
2.4.2.6 Fundaciones compuestas con Metamateriales	51
3 Método de elementos finitos	53
3.1 Equilibrio del sistema	53
3.2 Relación desplazamiento-deformación	55
3.3 Relación tensión-deformación y modelo constitutivo	59
3.4 FEM elástico Lineal	61
3.4.1 Formulación variacional del FEM	62
3.4.2 Formulación matricial del problema	63
3.5 FEM elástico no-lineal geométrico	65
3.5.1 El método de Newton-Raphson	66
3.5.2 Formulación Lagrangiana total	69
3.5.3 Formulación Lagrangiana actualizada	71
3.6 Código numérico desarrollado en FORTRAN	72
3.6.1 Librerías y dependencias	75
4 Optimización topológica	76
4.1 Concepto de optimización	76

4.2	Enfoques de optimización multiobjetivo.....	79
4.3	Optimización topológica en elasticidad lineal	82
4.3.1	Formulación para un dominio discretizado.....	84
4.3.2	Análisis de sensibilidad	85
4.3.3	Criterio de optimalidad	86
4.3.4	Método de las asíntotas móviles	89
4.3.5	Filtros de densidad.....	91
4.3.5.1	Filtro radial de sensibilidad.....	92
4.3.5.2	Filtro nodal de densidad	93
4.4	Optimización topológica en elasticidad no lineal geométrica.....	93
4.4.1	Análisis de sensibilidad considerando no linealidad geométrica	94
4.5	Programación en FORTRAN.....	95
4.6	Ejemplos de validación de optimización topológica	96
5	Generación de célula metamaterial	101
5.1	Metodología	102
5.1.1	Estructura base propuesta	105
5.1.2	Homogenización numérica.....	106
5.2	Modelo matemático preliminar para generación de mMM	109
5.2.1	Ajustes, límites y restricciones del sistema.....	112
5.3	Generación de mMM enfocado en aislamiento de vibraciones	113
5.3.1	Funciones objetivo	116
5.3.1.1	Funciones objetivo del primer enfoque (directo)	116
5.3.1.2	Funciones objetivo del segundo enfoque (indirecto)	118
5.4	Resultados de proceso generativo e Idealización de mMM.....	119
5.4.1	Resultados de mMM con funciones objetivo del primer enfoque (directo).....	122
5.4.2	Resultados de mMM con funciones objetivo del segundo enfoque (indirecto).....	128

6	Propuesta de sistemas de protección sísmica con mMM: aislador sísmico de base.....	136
6.1	Ensayo numérico de compresión y cortante	136
6.2	Ensayo numérico de transmisibilidad	140
6.3	Ensayo numérico de excitación de base con registros sísmicos	147
7	Conclusiones y propuestas para investigaciones futuras.....	152
7.1	Conclusiones	152
7.2	Propuestas para investigaciones futuras.....	154
	Referencias bibliográficas.....	156

Lista de Tablas

Tabla 1.	Valores del tensor de elasticidad (en Pa) obtenidos con un proceso de homogenización numérica y valores propios para los MM generados con las OF del enfoque 1(directo) y los mMM de referencia.	124
Tabla 2.	Valores del tensor de elasticidad (en Pa) obtenidos con un proceso de homogenización numérica y valores propios para los MM generados con las OF del enfoque 2 en elasticidad lineal.	131
Tabla 3.	Valores del tensor de elasticidad (en Pa) obtenidos con un proceso de homogenización numérica y valores propios para los MM generados con las OF del enfoque 2 en elasticidad no lineal geométrica.	132
Tabla 4.	Porcentaje de reducción de la aceleración transmitida desde la base al SPS con mMM obtenidos con el modelo elástico lineal	149
Tabla 5.	Porcentaje de reducción de la aceleración transmitida desde la base al SPS con mMM obtenidos con el modelo elástico no lineal geométrico.....	149

Lista de Figuras

Figura 1.	Análisis de correlación de VOSviewer con peso en la cantidad de citas de los documentos recopilados con "Mechanical metamaterial"	28
Figura 2.	Análisis de correlación de VOSviewer con peso en la cantidad de citas de los documentos recopilados con "Seismic metamaterial"	29
Figura 3.	Clasificación de mMM	32
Figura 4.	Metamateriales de tipo Micro/nano armadura	33
Figura 5.	Metamaterial Quiral y Antiquiral	34
Figura 6.	Metamaterial de tipo Miura-ori.....	35
Figura 7.	Metamaterial de tipo Ron Resch	36
Figura 8.	Metamaterial de origami de patrón de apilamiento.....	38
Figura 9.	Metamaterial con patrón de transformación	39
Figura 10.	Metamateriales de doble cono de tipo cúbica centrada en la cara extendida (a1), cúbica centrada en el cuerpo (a2) y cúbica simple (a3)	40
Figura 11.	Metamaterial pentamodal.....	41
Figura 12.	Clasificación de SPS clásicos.....	44
Figura 13.	Clasificación de MMS	47
Figura 14.	Metamateriales sísmicos (MMS).....	52
Figura 15.	Equilibrio en elemento diferencial bidimensional.	54
Figura 16.	Equilibrio en el contorno en elemento diferencial bidimensional.....	55
Figura 17.	Relación entre la configuración de referencia C_0 (sin deformación) y una configuración actual C (deformada)	56
Figura 18.	Deformación de un tramo PQ entre la configuración de referencia C_0 (sin deformación) y una configuración actual C (deformada).....	57

Figura 19.	Método de Newton-Raphson y sus respectivas variaciones.....	67
Figura 20.	Diagrama de flujo del proceso de FEM en elasticidad lineal	73
Figura 21.	Diagrama de flujo del proceso de FEM en elasticidad con no linealidad geométrica	74
Figura 22.	Taxonomía general de las principales técnicas de optimización existentes	78
Figura 23.	Representación de filtro radial de densidad.....	92
Figura 24.	Representación de filtro nodal de densidad.....	93
Figura 25.	Diagrama de flujo simplificado del proceso de TO	96
Figura 26.	Estructuras tipo para proceso de TO en elasticidad lineal	97
Figura 27.	Estructuras tipo posterior al proceso de TO elástico no lineal geométrico	98
Figura 28.	Resultados del proceso de TO en elasticidad lineal considerando $V_{lim} = 40\%$.	98
Figura 29.	Resultados del proceso de TO elástico no lineal geométrico en 2D para la estructura 1	99
Figura 30.	Resultados del proceso de TO elástico no lineal geométrico en 2D para la estructura 2	100
Figura 31.	Esquema simplificado de la metodología de generación de mMM.....	104
Figura 32.	Estructuras base contempladas para la generación de mMM	105
Figura 33.	Cargas, condiciones de contorno y octante como BS	106
Figura 34.	Representación de tres estados de deformación en un proceso de HN para un caso en 2D.....	108
Figura 35.	Resultados preliminares obtenidos	111
Figura 36.	Distribución de mMM de según el módulo de cortante vs módulo de compresibilidad.	117
Figura 37.	Resultados del proceso de OT, Post-procesado e idealización de para las OF del enfoque 1(directo).	123

Figura 38.	Evaluación de componentes C_{11} , C_{21} , C_{44} (en MPa), relación K/G y de valores propios para los mMM obtenidos con modelo no lineal geométrico con las OF del primer enfoque y de referencia.	127
Figura 39.	Funciones de transmisibilidad para los mMM generados con las OF del enfoque 1(directo).....	127
Figura 40.	Funciones de transmisibilidad para los mMM pentamodales de referencia	128
Figura 41.	Resultados del proceso de OT, Post-procesado e idealización de para las OF del enfoque 2 en elasticidad lineal.....	129
Figura 42.	Resultados del proceso de OT, Post-procesado e idealización de para las OF del enfoque 2 en elasticidad no lineal geométrica.	130
Figura 43.	Evaluación de componentes C_{11} , C_{21} , C_{44} (en MPa), relación K/G y de valores propios para los mMM obtenidos con modelo no lineal geométrico con las OF del primer segundo enfoque.	133
Figura 44.	Funciones de transmisibilidad para los MM generados con las OF del enfoque 2 en elasticidad lineal.	134
Figura 45.	Funciones de transmisibilidad para los MM generados con las OF del enfoque 2 en elasticidad no lineal geométrica.	135
Figura 46.	Modelos de SPS usados para ensayos de compresión, cortante, transmisibilidad y respuesta sísmica.	137
Figura 47.	Comparación de ensayos mecánicos numéricos de SPS con mMM pentamodal de tipo diamante de doble cono y uno aislador elastomérico comercial tipo E(RB-800)	138
Figura 48.	Comparación de ensayos numéricos de SPS basado en mMM con un aislador tipo LRB comercial.	139
Figura 49.	Funciones de transmisibilidad de SPS compuesto por mMM sin masa adicional (para algunos de los mMM obtenidos)	140

Figura 50.	Prototipo de SPS basado en mMM (la figura presenta un mMM auxético $E_2-F_3-L-D_{30}$) considerando una masa adicional para la evaluación de la transmisibilidad.	141
Figura 51.	Funciones de transmisibilidad de SPS con mMM (elástico lineal) en rango de 0Hz-100Hz soportando masas de diferentes magnitudes	143
Figura 52.	Funciones de transmisibilidad de SPS con mMM (elástico no lineal geométrico) en rango de 0Hz-100Hz soportando masas de diferentes magnitudes	144
Figura 53.	Funciones de transmisibilidad de SPS con mMM obtenidos con el modelo elástico no lineal geométrico con masa de 4500Kg	145
Figura 54.	Funciones de transmisibilidad de SPS con mMM pentamodales de referencia con masa de 4500Kg	146
Figura 55.	Comparación de los registros sísmicos seleccionados con los ajustados con el espectro de aceleraciones de la NSR-10 para la ciudad de Bucaramanga.	148
Figura 56.	Aceleración de salida y registro sísmico para SPS de mMM con modelo elástico lineal	150
Figura 57.	Aceleración de salida y registro sísmico para SPS de mMM con modelo elástico no lineal geométrico	151

Símbolos y significados usando letras latinas

Símbolo	Significado	Definición
b	Fuerzas de cuerpo volumetricas	Ec. 5
B	Tensor de Cauchy	Ec. 42 y 68
B_{izq}	Tensor de Cauchy-Green por izquierda	Ec. 25
B_L	Matriz de derivadas de funciones de forma (lineal)	Ec. 42
B_{NL}	Matriz de derivadas de funciones de forma (no lineal)	Ec. 70
C	Tensor de elasticidad del material	Ec. 26
C_c	Tensor de Cauchy-Green por la derecha	Ec. 18
C_p	Flexibilidad estructural (compliance)	Ec. 89
E	Módulo de elasticidad	-
E^0	Módulo de elasticidad base (SIMP)	Ec. 90
E_e	Tensor de deformación de Euler-Almansi	Ec. 22
E_g	Tensor de deformación de Green-Lagrange	Ec. 20
F	Gradiente de desplazamiento	Ec. 14
H	Matriz de derivadas de funciones de forma	Ec. 69
J	Matriz jacobiana	Ec. 28
K	Matriz de rigidez	Ec. 65
K_{mat}	Matriz de rigidez tangencial	Ec. 66
K_{geo}	Matriz de rigidez tangencial	Ec. 67
L	Operador diferencial lineal	Ec.43
N	Funciones de forma	-
P	Primer tensor de Piola-Kirchhoff	Ec. 29

Símbolo	Significado	Definición
p	Factor de penalización del método SIMP	Ec. 29
S	Segundo tensor de Piola-Kirchhoff	Ec. 30
S	Matriz de esfuerzos (configuración Lagrangiana total)	Ec. 71
S_σ	Matriz de esfuerzos (configuración Lagrangiana actualizada)	Ec. 72
u	Vector desplazamiento	Ec. 9
V_{lim}	Volumen límite de proceso de optimización	Ec. 87
W	Energía potencial por las fuerzas aplicadas	Ec. 38
x	Vector posición	Ec. 9

Símbolos y significados usando letras griegas

Símbolo	Significado	Definición
Γ	Superficie del contorno	-
∇	Operador nabla (gradiente)	-
ν	Módulo de Poisson	-
Ω	Volumen del contorno	-
∂	Derivada parcial	-
Π	Energía por deformación del cuerpo	Ec. 38
Π_p	Funcional de la energía potencial total	Ec. 38
ρ	Densidad del material	Ec. 85
ρ_{min}	Densidad del material minima	Ec. 88
σ	Tensor de esfuerzos de Cauchy	Ec. 5
σ_0	Esfuerzos	Ec. 5
τ	Tensor de esfuerzos de Kirchhoff	Ec. 8

Acrónimos y significados

Acrónimo	Término
BC	Condiciones de contorno
BESO	Optimización estructural evolutiva bidireccional
BS	Estructura base
ESO	Optimización estructural evolutiva
FE	Elementos finitos
FEA	Análisis por elementos finitos
FEM	Método de elementos finitos
GCMMA	Método de las asíntotas móviles de convergencia global
NH	Homogenización Numérica
KUBC	Condiciones de contorno cinemáticamente uniformes
MM	Metamateriales
MMA	Método de las asíntotas móviles
mMM	Metamateriales Mecánicos
MMS	Metamateriales sísmicos
NLFEM	Método de elementos finitos no lineal geométrico
OC	Criterio de optimalidad
OF	Función objetivo
TO	Optimización topológica
PBC	Condiciones de contorno periódicas
RVE	Elemento de volumen representativo
SA	Sistemas de protección sísmica activo

Acrónimo	Término
SH	Sistemas de protección sísmica híbrido
SIMP	Material Sólido isotrópico con penalización
SP	Sistemas de protección sísmica pasivo
SPS	Sistemas de protección sísmica
SS	Sistemas de protección sísmica semiactivo
VARTOP	Optimización topológica variacional
VF	Fracción de volumen

Resumen

Título: Optimización topológica evolutiva multiobjetivo aplicada al diseño de metamateriales para el aislamiento sísmico de edificaciones ¹

Autor: Jeffrey José Guevara Corzo ²

Palabras clave: Optimización Topológica, Metamateriales Mecánicos, Aislamiento Sísmico.

Descripción:

Colombia enfrenta un escenario crítico de riesgo sísmico, con aproximadamente el 83 % de su población ubicada en zonas clasificadas con amenaza sísmica media o alta. Esta situación se ve agravada por el alto porcentaje de edificaciones informales, lo que incrementa considerablemente la vulnerabilidad del entorno. En este contexto, los sistemas de protección sísmica son una herramienta fundamental para mitigar los daños estructurales y no estructurales durante eventos sísmicos. No obstante, investigaciones recientes han explorado enfoques innovadores que incorporan materiales avanzados y enfoques novedosos para mejorar su desempeño.

Entre estos enfoques emergen los metamateriales mecánicos, que, gracias a su topología, permiten alcanzar propiedades mecánicas extremas o poco comunes que no es posible lograr con materiales convencionales. Estas propiedades incluyen relaciones de Poisson negativas, relaciones elevadas entre el módulo volumétrico y el módulo de corte (K/G), y la capacidad de generar bandas de parada en frecuencias menores a 20Hz que bloquean la propagación de vibraciones sísmicas. La incorporación de metamateriales mecánicos en el diseño de sistemas de protección sísmica abre la posibilidad de desarrollar dispositivos de aislamiento altamente eficientes, capaces de redirigir, atenuar o bloquear ondas sísmicas.

Esta investigación aborda dos desafíos fundamentales en el área: 1) la generación y optimización de topología del metamaterial, y 2) su implementación en el desarrollo de sistemas de protección pasivos. Para el primer desafío, se propone una metodología que integra optimización topológica, homogenización numérica, haciendo un análisis lineal y no lineal geométrico mediante el método de elementos finitos, y una estrategia de diseño dirigida para la generación de celdas unitarias. En cuanto al segundo desafío, se explora la implementación de estos metamateriales en sistemas de aislamiento de base, proponiendo así una nueva vía para el desarrollo de sistemas de protección pasivos con capacidades mejoradas de mitigación sísmica.

¹Tesis Doctoral

²Universidad Industrial de Santander, Facultad de Ingenierías Físicomecánicas, Escuela de Ingeniería Mecánica, Bucaramanga, Colombia.

Abstract

Title: Multi-objective evolutionary topology optimization applied to the design of metamaterials for seismic isolation of buildings ¹

Author: Jeffrey José Guevara Corzo ²

Keywords: Topology Optimization, Mechanical Metamaterials, Seismic Isolation.

Abstract:

Colombia faces a critical seismic risk scenario, with approximately 83 % of its population located in areas classified as having medium to high seismic hazard. This situation is further aggravated by the high percentage of informal constructions, which significantly increases structural vulnerability. In this context, seismic protection systems constitute a fundamental tool for mitigating both structural and non-structural damage during seismic events. Nevertheless, recent research has explored innovative approaches incorporating advanced materials and novel design strategies to enhance their performance.

Among these emerging approaches are mechanical metamaterials, which, due to their engineered topology, enable the achievement of extreme or uncommon mechanical properties that cannot be attained using conventional materials. These properties include negative Poisson's ratios, high bulk-to-shear modulus ratios (K/G), and the ability to generate stop bands at frequencies below 20 Hz that effectively block the propagation of seismic vibrations. The incorporation of mechanical metamaterials into the design of seismic protection systems opens the possibility of developing highly efficient isolation devices capable of redirecting, attenuating, or blocking seismic waves.

This research addresses two fundamental challenges in the field: (1) the generation and topology optimization of the metamaterial, and (2) its implementation in the development of passive seismic protection systems. To address the first challenge, a methodology integrating topology optimization, numerical homogenization, linear and geometrically nonlinear analyses using the finite element method, and a directed design strategy for the generation of unit cells is proposed. Regarding the second challenge, the implementation of these metamaterials in base isolation systems is explored, thereby proposing a novel pathway for the development of passive protection systems with enhanced seismic mitigation capabilities.

¹Doctoral Thesis

²Universidad Industrial de Santander, Faculty of Physical-Mechanical Engineering, School of Mechanical Engineering, Bucaramanga, Colombia.

Introducción

Colombia enfrenta un panorama desafiante en términos de amenaza sísmica, con aproximadamente el 83 % de su población concentrada en zonas de amenaza sísmica clasificadas como intermedia y alta amenaza (Asociación Colombiana de Ingeniería Sísmica, 2010, 2023; Torres León, 2019). Esta condición no solo pone en riesgo la infraestructura urbana, sino también la vida de millones de personas, especialmente en zonas cercanas a fallas activas como la de Bucaramanga-Santa Marta, donde se han registrado sismos históricos de gran magnitud (Asociación Colombiana de Ingeniería Sísmica, 2023; Torres León, 2019). Adicionalmente, la alta proporción de viviendas informales (estimada en un 60 %), agrava la vulnerabilidad, destacando la importancia de encontrar soluciones efectivas para mitigar el impacto de estos eventos (Asociación Colombiana de Ingeniería Sísmica, 2023).

En este contexto, los sistemas de protección sísmica (SPS) surgen como una herramienta fundamental en ingeniería estructural para reducir el riesgo de daño y colapso de edificaciones producto de los sismos (Spencer Jr y Soong, 1999; Soong y Spencer, 2000). El riesgo es la probabilidad de que se produzcan daños, ligados a los factores amenaza y vulnerabilidad. Desde el punto de vista del diseño, se permite que la estructura sufra un daño considerable pero no su colapso ni la pérdida de vidas. De esta forma, el empleo de SPS busca minimizar los daños estructurales y no estructurales al igual que controlar la afectación estructural.

Los SPS se dividen en cuatro categorías: sistemas pasivos (SP), activos (SA), híbridos (SH) y semiactivos (SS) (Soong y Spencer, 2000; Forrai et al., 2001; Datta, 2003). Los SP son dispositivos que no requieren fuentes externas de energía y están diseñados para reducir la respuesta dinámica de la estructura (Spencer Jr y Soong, 1999; Braz-César y Barros, 2013). Los SA, por otro lado, generan fuerzas de control mediante el uso de fuentes de energía externa para contrarrestar la respuesta sísmica de la edificación (Soong y Spencer, 2000; Spencer Jr y Soong, 1999; Datta, 2003). Los SH combinan las características de los sistemas pasivos y activos, mejorando así el control estructural

mediante la sinergia de ambos enfoques. Finalmente, los SS no aplican fuerzas de control directas, pero tienen la capacidad de ajustar sus propiedades dinámicas en tiempo real para reducir la respuesta de la estructura ante un evento sísmico (Soong y Spencer, 2000; Spencer Jr y Soong, 1999).

En los últimos años, investigaciones realizadas por Fabbrocino et al. (2015); Fraternali et al. (2015); Fabbrocino y Carpentieri (2017); Fabbrocino y Amendola (2017); Fraternali et al. (2018) han impulsado el desarrollo y perfeccionamiento de una tecnología para protección sísmica innovadora basada en metamateriales (MM), específicamente los pentamodales. Esta tecnología es una alternativa disruptiva que no solo permite mejorar los SPS convencionales, sino que también abre nuevas posibilidades en el diseño de sistemas nuevos como: las fundaciones compuestas, sistemas resonantes, barreras sísmicas, entre otros (Fabbrocino et al., 2015; Brûlé et al., 2017d,a). Los MM son estructuras meticulosamente diseñadas, compuestas por arreglos periódicos de bloques o células que presentan propiedades mecánicas que superan, o difieren significativamente de sus materiales constituyentes (Bertoldi et al., 2017; Florijn et al., 2014). Durante la última década, los MM han transformado el campo de la ciencia de materiales (Florijn et al., 2014; Li y Gao, 2016; Kadic et al., 2019), posibilitando el control específico de propiedades ópticas (Soukoulis y Wegener, 2011), acústicas (Cummer et al., 2016), térmicas (Schittny et al., 2013b) y mecánicas (Yu et al., 2018).

La implementación de MM ha permitido el desarrollo de propiedades y comportamientos inusuales en sistemas convencionales, como los coeficientes de Poisson negativos (Vogiatzis et al., 2017; D'Alessandro et al., 2018) y las estructuras con una alta relación K/G (relación entre el módulo volumétrico K y módulo de corte G) (Kadic et al., 2012; Schittny et al., 2013a). Estas características son especialmente útiles en aplicaciones de aislamiento de vibraciones. En particular, los metamateriales mecánicos (mMM) auxéticos han demostrado ser altamente eficientes en el desvío y aislamiento de las vibraciones entrantes, además de la generación de bandas de parada bien definidas, es decir, rangos de frecuencia en los cuales la propagación de vibraciones es inhibida (Ungureanu et al., 2015). Los mMM con una alta relación K/G adoptan un enfoque análogo al de los SPS clásicos, permitiendo un desacoplamiento parcial entre la estructura y su fundación.

Este desacoplamiento atenúa de manera significativa la transmisión de vibraciones, convirtiendo a estos mMM en una alternativa para el desarrollo de nuevos SPS. La incorporación de mMM no solo ha optimizado el desempeño de nuevos sistemas, sino que también ha impulsado el diseño de soluciones innovadoras en aislamiento sísmico. En este contexto, Fabbrocino et al. (2015); Fabbrocino y Carpentieri (2017); Fabbrocino y Amendola (2017) han abordado el desarrollo de dispositivos de aislamiento sísmico basados en mMM pentamodales, abriendo nuevas perspectivas en la protección estructural frente a eventos sísmicos.

Asimismo, autores como Brûlé et al. (2017a,d); Achaoui et al. (2016, 2017); Saoud et al. (2020) han investigado en profundidad el uso de mMM en el aislamiento de vibraciones sísmicas, desarrollando SPS alternativos, como ya se mencionó, basados en las fundaciones compuestas, sistemas resonantes y barreras sísmicas que complementan los sistemas clásicos o el presentado por Fabbrocino et al. (2015). Esta línea de estudio ha dado origen al concepto de metamateriales sísmicos (MMS), también denominados escudos sísmicos, cuyo objetivo es mitigar la vulnerabilidad estructural frente a eventos sísmicos. Para ello, se han propuesto estrategias como la reflexión y redirección de ondas sísmicas buscando la reducción de su impacto en la estructura.

Aunque la optimización de los SPS mediante mMM y el desarrollo de conceptos como los MMS representan enfoques innovadores, persisten limitaciones relevantes que deben ser consideradas. En este sentido, el desarrollo de MMS, como los propuestos por Brûlé et al. (2017a,d) y Achaoui et al. (2016, 2017), aunque prometedor, se encuentra aún en una fase inicial de validación de viabilidad. Esta etapa requiere mayor profundización, especialmente debido a su principal restricción: la escala decamétrica de las células que componen estos dispositivos. Por otro lado, la aplicación de mMM, como los pentamodales presentados por Fabbrocino et al. (2015) y Fraternali et al. (2015), o los auxéticos estudiados por Ungureanu et al. (2015), también permanecen en una fase de validación preliminar. Hasta la fecha, no se han desarrollado estudios experimentales enfocados en el análisis detallado del comportamiento mecánico de estas estructuras, ni se ha evaluado su desempeño bajo condiciones reales de servicio.

No obstante, la mayor falencia identificada en la literatura revisada corresponde al escaso

desarrollo de nuevos mMM. En particular, se observa una notable falta de atención al diseño de nuevas celdas unitarias, omitiendo aspectos fundamentales como el tipo de MM, su topología, fracción de volumen, célula base y su disposición espacial. En numerosos estudios (Yu et al., 2018), como el desarrollado por Zhang et al. (2022) se aborda la construcción mMM jerárquicos añadiendo gradualmente un pequeño cuadrado autosimilar basado en una celda unitaria cuadrada convencional. Por otro lado, Cummer et al. (2016) exploran diversos diseños y configuraciones estructurados de mMM acústicos, a partir del empleo de topologías predefinidas, que permiten manipular las ondas sonoras. Estas topologías predefinidas son cruciales para lograr las propiedades acústicas deseadas, incluidos los índices de refracción negativos. Asimismo en el estudio de Fraternali et al. (2018) se discute el uso de mMM predefinidos, concretamente las redes pentamodales. Sin embargo, en todos los estudios mencionados, se opta por la adaptación de mMM ya existentes en lugar de desarrollar nuevas topologías optimizadas, lo cual restringe considerablemente la exploración y hallazgo de mMM desconocidos en este campo emergente.

En este contexto, esta tesis aborda de manera directa dos problemáticas fundamentales: 1) los procesos de generación de mMM y 2) su aplicación en sistemas de protección sísmica (SPS), específicamente en sistemas de protección (SP) tipo aislador de base. Para la primera problemática, se propone una metodología integral que combina la optimización topológica (TO), la homogenización numérica (NH), el análisis en elasticidad lineal y no lineal geométrica (NLFEM), así como una formulación específica para el diseño topológico de mMM adaptados a esta aplicación. Las principales contribuciones de esta investigación, tanto teóricas como numéricas y aplicadas, incluyen: la generación de nuevas células de mMM no reportadas previamente, la evaluación comparativa de distintos enfoques de funciones objetivo (OF), la implementación computacional completa en lenguaje FORTRAN para la obtención automática de topologías, y la aplicación directa de los mMM desarrollados en un sistema aislador de base. Este enfoque representa un avance significativo respecto a estudios previos, ya que evita la simple adaptación de mMM existentes y permite el diseño dirigido de nuevas topologías con propiedades específicas. En cuanto a la segunda problemática, la implementación de estos mMM en el diseño de SPS constituye una propuesta innovadora que amplía

el alcance de esta línea temática. Este trabajo complementa y extiende investigaciones previas como las desarrolladas por Fabbrocino et al. (2015) y Fraternali et al. (2015), al incorporar nuevas estructuras optimizadas orientadas a mejorar el desempeño dinámico frente a solicitaciones sísmicas.

El documento se encuentra organizado de la siguiente forma, el capítulo 1 presenta los objetivos (generales y específicos) definidos en esta investigación, el alcance y los productos; el capítulo 2 contiene el estado del arte de los MM, enfocado en los mMM, presentado un análisis conciso de la literatura disponible, el origen y, finalmente, una clasificación de los mMM existentes. El capítulo 3 contiene el fundamento matemático del método de elementos finitos (FEM) elástico lineal, elástico no lineal geométrico (NLFEM) y una explicación breve del código desarrollado en FORTRAN (GNU Project, 2024) con su respectiva validación. El capítulo 4, aborda de forma general el concepto de optimización, se presenta el fundamento matemático del proceso de TO para un sistema elástico lineal, elástico no lineal geométrico y el código desarrollado en FORTRAN (GNU Project, 2024) con su respectiva validación. En el capítulo 5, se presenta la generación de las células MM y su extensión para el desarrollo de un aislador sísmico de base. En el capítulo 6, se hace un análisis detallado de los aisladores generados usando mMM. Finalmente, en el capítulo 7 se presentan las conclusiones de la investigación desarrollada.

1 Objetivos

Este capítulo presenta los objetivos generales y específicos de la investigación, el alcance del estudio y los principales productos obtenidos. La investigación tiene un enfoque teórico-numérico se centra en el diseño de mMM para su aplicación un dispositivo de aislamiento sísmico de base. El proceso generativo del mMM se fundamenta en técnicas de TO evolutiva multiobjetivo. Además, se incluyen los desarrollos computacionales y académicos derivados de esta investigación.

1.1 Objetivos generales

1. Aplicar optimización topológica evolutiva multiobjetivo en el diseño de un dispositivo de aislamiento de base conformado por metamateriales.

1.2 Objetivos específicos

1. Desarrollar una interfaz para acoplar el programa de elementos finitos no lineal geométrico y el programa de optimización topológica multiobjetivo.
2. Diseñar el metamaterial y el dispositivo de aislamiento sísmico usando optimización topológica evolutiva multiobjetivo.
3. Determinar el efecto de las funciones objetivo en la respuesta mecánica de un dispositivo de aislamiento de base conformado por metamateriales.
4. Comparar el desempeño mecánico del aislador sísmico de base conformado por metamateriales con dispositivos reportados en la literatura.

1.3 Alcance de la investigación

1. Para el diseño del aislador sísmico de base se trabajó un modelo elástico lineal y no lineal geométrico.
2. Se desarrollará una interfaz que acople el programa de elementos finitos no lineales y la optimización multiobjetivo

3. El análisis y diseño del aislador y el metamaterial será teórico-numérico.

1.4 Productos de la investigación

1.4.1 Artículos en revistas indexadas

1. Automatic Design of Large-Scale Trusses: A Comparison Between Derivative-Free Algorithms (Ingeniería y Ciencia) Niño-Álvarez et al. (2022).
2. Passive seismic protection systems with mechanical metamaterials: A current review (Structural Engineering and Mechanics) Guevara-Corzo et al. (2022b).
3. How does the initial cell configuration influence the final topology in a metamaterial generation process? (Latinamerican Journal of Solid and Structures) Guevara-Corzo et al. (2024).

1.4.2 Congresos

1. Inteligencia computacional en el diseño óptimo de estructuras tipo armadura (1er Congreso Internacional de Ingeniería civil y IV simposio innovar para crecer) Niño-Álvarez et al. (2019).
2. Metamateriales mecánicos como alternativa para generación de nuevos sistemas de aislamiento sísmico (X Congreso nacional de ingeniería sísmica) Guevara-Corzo et al. (2022a).
3. Optimal structural design of power transmission towers using multiobjective metaheuristic algorithms (XL Jornadas sudamericanas en ingenierías estructural) Niño-Álvarez et al. (2024).

1.4.3 Otros productos

1. Participación en el evento de divulgación científica "1era Versión de Escuela de Avances en Ingeniería Sísmica - EAVIS" en calidad de Coordinador de grupo (Foco: Optimización)
2. Desarrollo de un Software en FORTRAN para FEA considerando no linealidad geométrica, TO considerando no linealidad geométrica y un generador de metamateriales mecánicos (disponibles en repositorio de Github).
3. Codirección de tres (3) trabajos de grado de pregrado "Evaluación del efecto de aisladores de base elastoméricos en el comportamiento dinámico de una edificación de baja altura"

Ayala-Rangel y Ramos-Carreño (2021), "Estudio paramétrico del comportamiento histerético de disipadores de placas ranuradas usando las herramientas de ANSYS Workbench" Suárez-Marín y Báez-Vargas (2022) y " Validación de la eficiencia de metamateriales mecánicos en aislamiento de vibraciones sometidos a un ensayo de transmisibilidad" Pérez-García (2023).

2 Estado del arte

Este capítulo presenta un análisis exhaustivo del estado del arte relacionado con los mMM y su aplicación en SPS. Se inicia con un análisis bibliométrico detallado utilizando herramientas como VOSviewer (Van Eck y Waltman, 2010) y la base de datos SCOPUS, que permitió identificar a los autores más influyentes, sus redes de colaboración y las principales líneas de investigación en los campos de los mMM y los MMS.

Posteriormente, se aborda el origen y evolución de los MM, destacando su desarrollo en distintas disciplinas como la óptica, acústica y mecánica. Se profundiza en la clasificación de los mMM según sus propiedades mecánicas asociadas al módulo de Young, módulo de corte y compresibilidad, incluyendo estructuras como micro/nano armaduras, sistemas quirales, MM origami, pentamodales, auxéticos, entre otros.

El capítulo analiza igualmente los SPS clásicos (pasivos, activos, semiactivos e híbridos), abordando sus principios de funcionamiento y principales limitaciones. Seguidamente, se introduce el concepto de sistemas de protección sísmica basados en mMM, los cuales se clasifican en dos grandes categorías: sistemas de aislamiento y sistemas resonantes. Se describen sus fundamentos operativos, ventajas potenciales y los desarrollos más relevantes en la literatura reciente, con especial atención a los mMM pentamodales y auxéticos, dada su capacidad superior para modificar la propagación de ondas sísmicas. Para una descripción más detallada de la metodología de recopilación y análisis, se sugiere consultar la publicación correspondiente al estado del arte (Guevara-Corzo et al., 2022b).

2.1 Análisis bibliométrico

En el desarrollo de esta investigación, el primer paso fue hacer una recopilación exhaustiva de la literatura y la elaboración de un estado del arte. Se llevó a cabo una revisión minuciosa de la literatura disponible, enfocándose en un análisis bibliométrico riguroso de los mMM y su aplicación en protección sísmica (MMS). El objetivo principal fue identificar a los autores más relevantes, aquellos con mayor número de citas, explorar sus redes de colaboración y filtrar los documentos

más influyentes. Para el análisis bibliométrico, se utilizó la base de datos SCOPUS y el software VOSviewer (Van Eck y Waltman, 2010). La recopilación y análisis de la literatura se limitaron exclusivamente a artículos científicos y congresos.

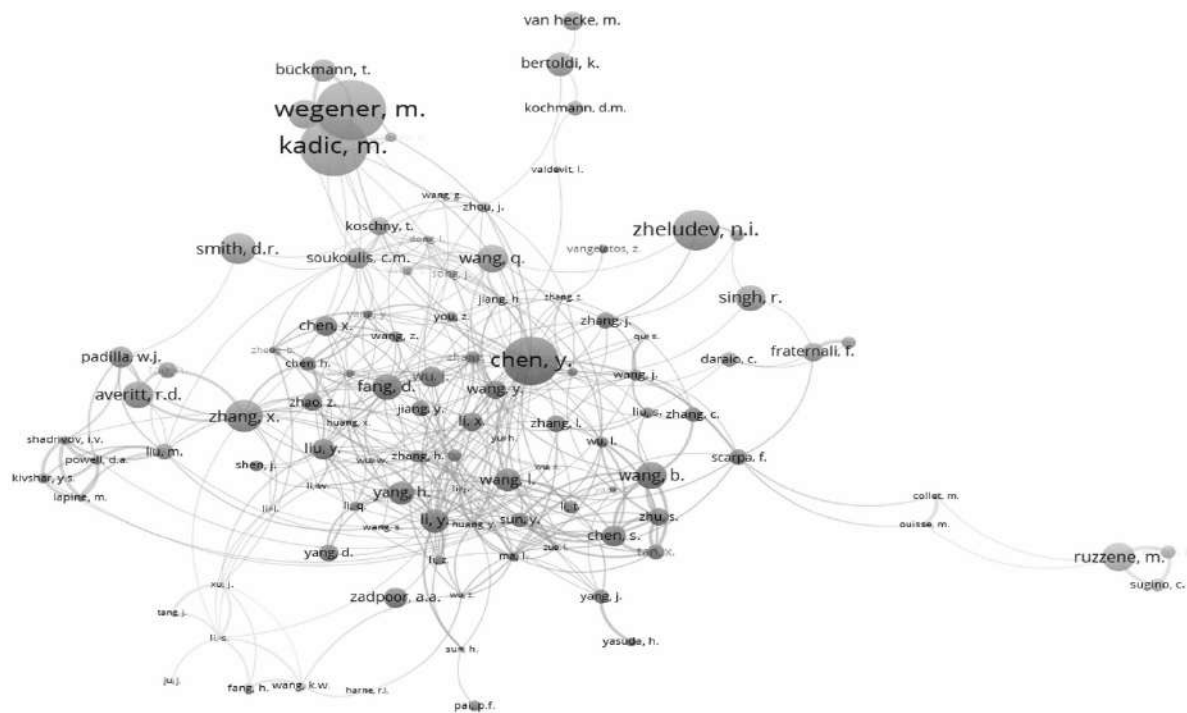
En una fase inicial, se aplicó un primer filtro de búsqueda con el término *Mechanical metamaterial*, lo que permitió identificar 1621 documentos. Posteriormente, se utilizó un segundo filtro que excluyó a autores con menos de seis publicaciones, con el fin de centrarse en aquellos con mayor producción y trayectoria en el campo de los mMM. Se estableció una red de correlación en la que se asignó un peso basado en el número de citas, lo cual se refleja en los resultados presentados en la Figura 1. Este proceso permitió refinar el análisis y concentrarse en los autores más influyentes del campo.

Este análisis inicial resultó crucial para identificar autores destacados en el campo, como Wegener, Kadic, Bückman, Bertoldi, Chen, Zhang y Wang, entre otros. Conocer las contribuciones más relevantes de estos autores permitió filtrar a homónimos, clasificar sus líneas de investigación e identificar sus avances. Además, este proceso también destacó la importancia de autores como Sigmund, Andreassen y Aage, quienes, aunque no se enfocan exclusivamente en mMM como su principal área de estudio, han desempeñado un papel clave en el desarrollo de modelos numéricos aplicables a esta tecnología.

En un segundo análisis, enfocado en los SPS, se utilizó el término de búsqueda *Seismic metamaterial*, lo que permitió identificar 145 documentos. Dado que esta búsqueda es más específica, se aplicó un criterio de filtrado más flexible, omitiendo a los autores con menos de dos publicaciones. Los resultados de este análisis se muestran en la Figura 2, proporcionando una visión clara de los investigadores más influyentes en este campo emergente.

En esta fase, se identificaron los principales referentes en el campo de los MMS, destacando a Brûlé, Enoch y Guenneau, reconocidos por su liderazgo en la investigación actual de este ámbito. No obstante, es importante señalar que, aunque el primer análisis incluyó a autores vinculados específicamente a aplicaciones sísmicas, como Fabbrocino, Fraternali, Bertoldi y Van Hecke, estos no aparecen reflejados en el segundo análisis. Los resultados de ambos estudios bibliométricos

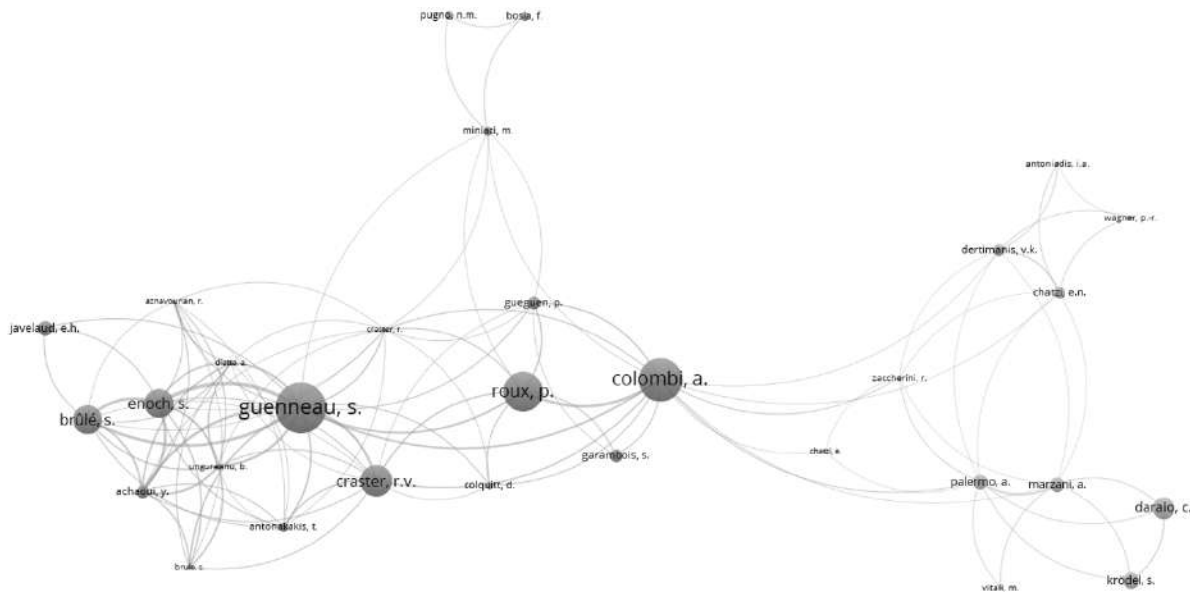
Análisis de correlación de VOSviewer con peso en la cantidad de citas de los documentos recopilados con "Mechanical metamaterial"



evidencian la relativa juventud de esta línea de investigación, al tiempo que destacan su prometedor potencial en el campo de los MMS. A continuación, se presenta el estado del arte basado en los documentos recopilados.

Los MM son estructuras de tipo celular desarrolladas por el hombre con propiedades mecánicas contra intuitivas o adaptables que difieren de las propiedades del material que las constituye (Bertoldi et al., 2017; Kadic et al., 2019). Las propiedades que se desarrollan en los MM, son producto de la manipulación de su topología, donde se busca una distribución particular de la materia

Análisis de correlación de VOSviewer con peso en la cantidad de citas de los documentos recopilados con "Seismic metamaterial"



que conforma la estructura con el fin de obtener una determinada propiedad (Bertoldi et al., 2017; Yu et al., 2018).

El primer autor que presentó el concepto de MM fue Bosc (1898) en sus trabajos de refracción y polarización de ondas electromagnéticas. Posteriormente, Veselago (1968) en el campo de la óptica, planteó la forma de generar un material con un índice de refracción negativo, concepto que años después fue profundizado y desarrollado por autores como Smith et al. (2004) y Pendry (2000). Posteriores investigaciones desarrollaron MM en campos como la acústica (Maldovan, 2013; Cummer et al., 2016; Dong et al., 2019), mecánica (Shim et al., 2013; Muhlestein y Haberman, 2016) y sísmica (Fabbrocino et al., 2015; Fabbrocino y Carpentieri, 2017; Fabbrocino y Amendola, 2017; Zeng et al., 2020).

2.3 Metamateriales Mecánicos

A partir de los MM, surgió una línea centrada únicamente en la manipulación de propiedades mecánicas (los mMM) (Bertoldi et al., 2017; Kadic et al., 2019). En los últimos años, esta área de investigación ha cobrado relevancia, iniciando con contribuciones de autores como Milton (1992); Milton y Cherkaev (1995); Milton (2016), quienes demostraron la viabilidad de manipular las propiedades mecánicas a voluntad. Específicamente, han señalado que mediante la formulación de microestructuras que combinen materiales de resistencia dispar (uno muy fuerte y otro muy débil), es factible generar una gama de propiedades elásticas deseables (Milton y Cherkaev, 1995).

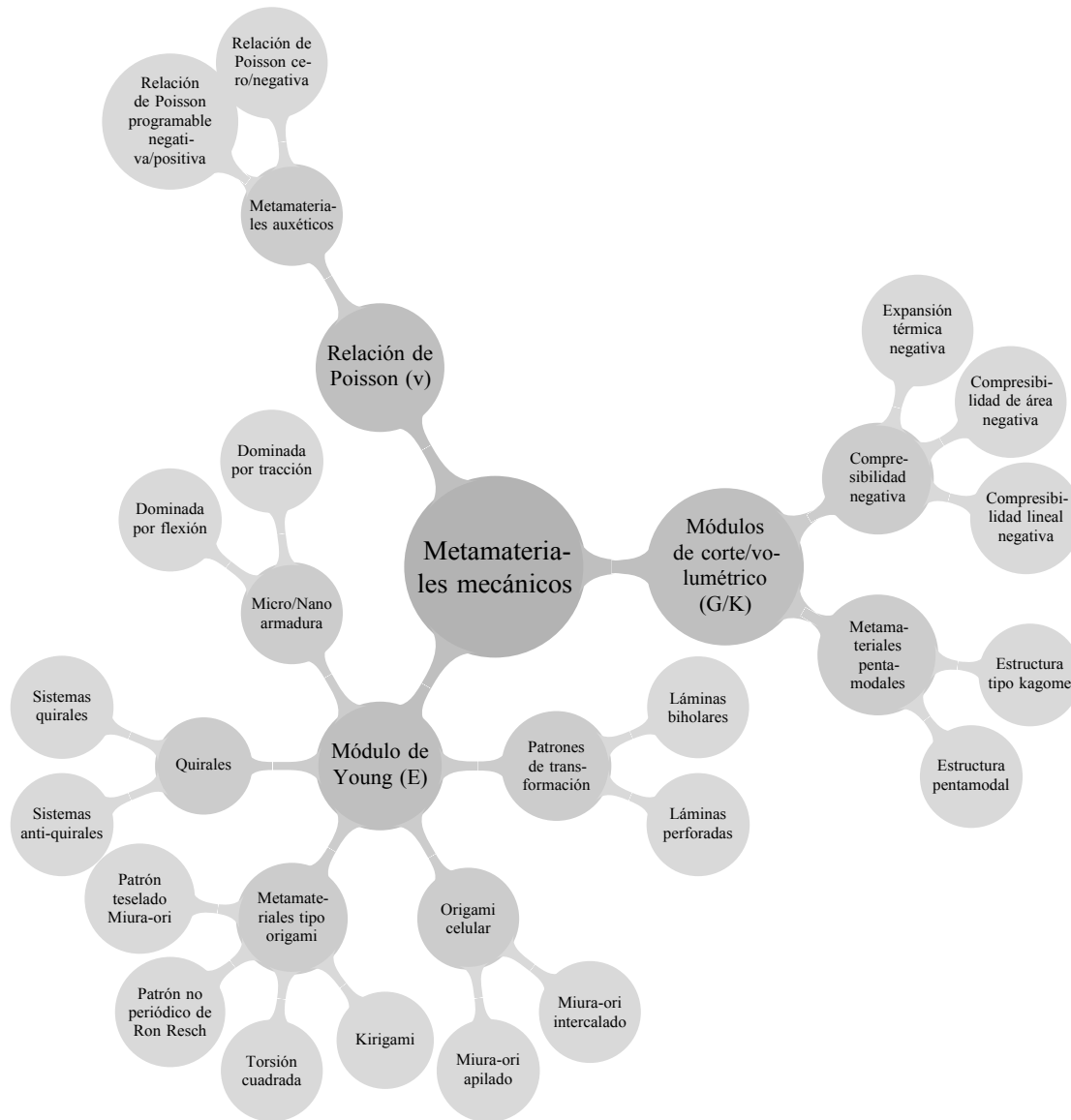
A partir de las contribuciones de Milton (1992); Milton y Cherkaev (1995); Milton (2016), se desarrollaron trabajos sobre estructuras con propiedades mecánicas poco comunes. Estas incluyen, estructuras con un módulo de Poisson nulo o negativo (Milton, 1992; Shim et al., 2013; Jiang y Li, 2018), una configuración con un módulo de cortante nulo (Kadic et al., 2012; Bückmann et al., 2014b), y módulos de compresibilidad nula o negativa (Xie et al., 2014). Adicionalmente, permitió el desarrollo de mMM microestructurados (Fleck et al., 2010), mMM ultraligeros y ultra rígidos (Zheng et al., 2014, 2016).

Debido al rápido crecimiento y progreso de los mMM en diversas áreas, se han realizado esfuerzos significativos para su clasificación. Autores como Bertoldi et al. (2017); Yu et al. (2018) han hecho una exploración de los distintos mMM presentados y ha desarrollado una clasificación basada en sus propiedades mecánicas, el tipo de célula y el patrón de distribución que adoptan dentro del volumen (ver Figura 3). Cada uno de los siguientes mMM se trata en detalle en las siguientes secciones.

2.3.1 Metamateriales asociados al módulo de Young (E)

De acuerdo a Yu et al. (2018), los mMM asociados al módulo de Young, son relacionados frecuentemente con las estructuras ligeras o ultraligeras, se clasifican en 5 categorías que son: micro o nano armaduras, quiral, MM origami, origami celular y finalmente los patrones de transformación.

2.3.1.1 Micro/nano armaduras. Este tipo de mMM consiste en una estructura celular conformada por un entramado de elementos tipo celosía o viga, con frecuencia conformada por un

Figura 3
Clasificación de mMM


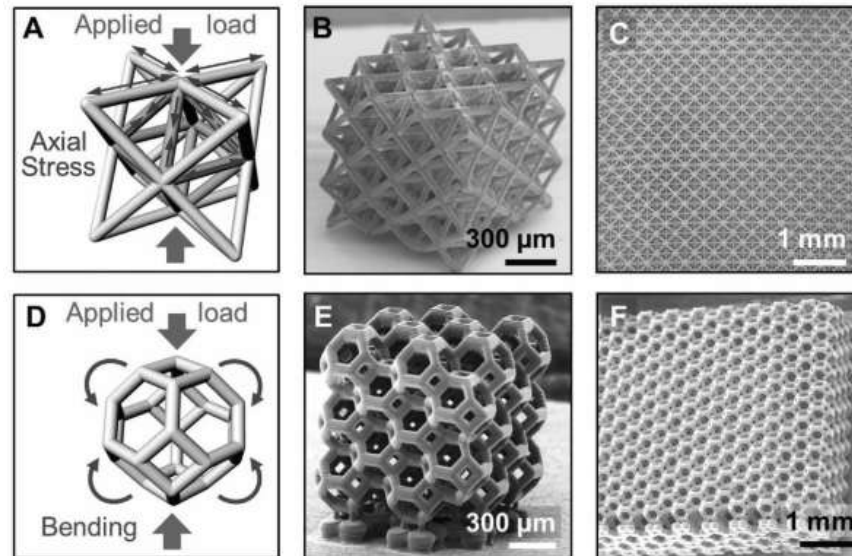
Nota. Adaptado de: Yu et al. (2018)

número considerablemente alto de elementos (Fleck et al., 2010). Este mMM por la forma en la que está estructurado, presenta densidades formidablemente bajas en relación con el material que las constituyen, razón por la cual denomina como mMM ultraligeros (Zheng et al., 2014; Kadic et al., 2019) (ver Figura 4).

Una parte fundamental del proceso de diseño de esta clase de mMM, implica la cuidadosa configuración y distribución de los elementos constituyentes de la célula, antes de su disposición en el volumen correspondiente (Fleck et al., 2010).

Figura 4

Metamateriales de tipo Micro/nano armadura



Nota. Adaptado de: Zheng et al. (2014)

El diseño de las células se lleva a cabo mediante dos filosofías distintas. En una de ellas, los elementos se distribuyen de tal manera que la mayor parte de las cargas se transmiten y distribuyen como cargas axiales a lo largo de todos los elementos, similar al comportamiento de una armadura. En la otra filosofía, se establece la célula de modo que las cargas se distribuyan y sean soportadas mediante la flexión generada en los elementos de la célula, similar al comportamiento de un sistema de vigas. (Zheng et al., 2014; Yu et al., 2018).

Estos mMM, al estar fundamentalmente basado en un entramado similar a una armadura, tienden a ser ultraligeros y altamente eficientes. No obstante, presentan la limitación de que su rigidez está fuertemente influenciada por la densidad relativa y la arquitectura celular, es decir, por la disposición espacial de los vacíos en el sólido (Lakes, 1993; Gibson y Ashby, 1997). Desde

una perspectiva topológica, la configuración de este mMM puede clasificarse como estructuras de células abiertas o cerradas (Gibson y Ashby, 1997; Queheillalt y Wadley, 2005), con una estructura estocástica u ordenada (Torrents et al., 2012), y además pueden presentar microestructuras heterogéneas o regulares.

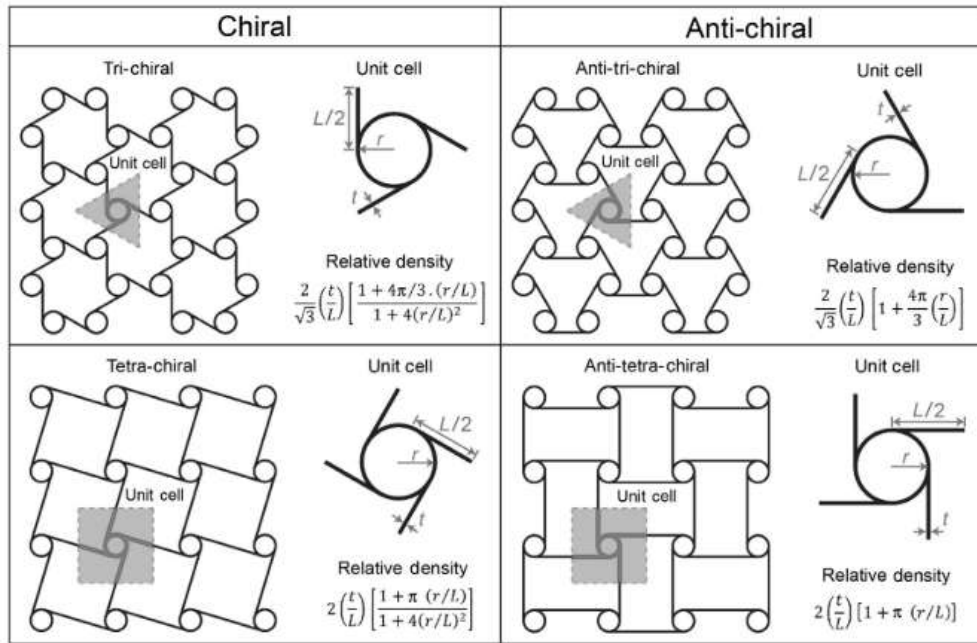
2.3.1.2 Metamateriales quirales. Este mMM basa su desarrollo en la quiralidad de sus células, una propiedad geométrica que permite modificar las propiedades mecánicas de la estructura. La quiralidad se refiere a la asimetría de los objetos que no pueden superponerse con su imagen especular. En otras palabras, un objeto quiral no puede transformarse en su reflejo mediante rotaciones o traslaciones simples. Este tipo de mMM fue propuesto por Wojciechowski (1989), posteriormente implementado y mejorado por autores como Prall y Lakes (1997); Pozniak y Wojciechowski (2014), entre otros.

La célula mMM usualmente consiste en un cilindro o elemento central denominado nodo, con ligamentos unidos tangencialmente, exhibiendo una simetría rotacional de un determinado orden. Dependiendo de su configuración estas son clasificadas como diestras o siniestras (Grima et al., 2008; Mousanezhad et al., 2016). Adicionalmente, los mMM quirales de acuerdo a la distribución de sus células, pueden dividirse en sistemas quirales y antiquirales (Grima et al., 2008; Alderson et al., 2010) (ver Figura 5), donde las células conectadas entre sí con nodos en lados opuestos de los ligamentos constituye un sistema quiral (Lorato et al., 2010; Spadoni y Ruzzene, 2012), y las células conectadas entre sí con nodos en el mismo lado de los ligamentos constituye un sistema antiquiral (Gatt et al., 2013; Chen et al., 2013).

Autores como Mousanezhad et al. (2016) han encontrado que la quiralidad (concretamente los antiquirales) es una forma altamente efectiva de desarrollar comportamientos auxéticos, siendo actualmente la estructura más usada para desarrollar este tipo de comportamiento mecánico (Grima et al., 2008; Spadoni y Ruzzene, 2012; Shim et al., 2013; Mousanezhad et al., 2016; Bertoldi et al., 2017). Adicionalmente, los mMM quirales se han usado con éxito en diferentes aplicaciones, como los anti-tetra-quirales en el desarrollo de una estructura con un comportamiento de expansión térmica negativo (Miller et al., 2010; Gatt et al., 2013; Pozniak y Wojciechowski, 2014), los hexa-quirales o

Figura 5

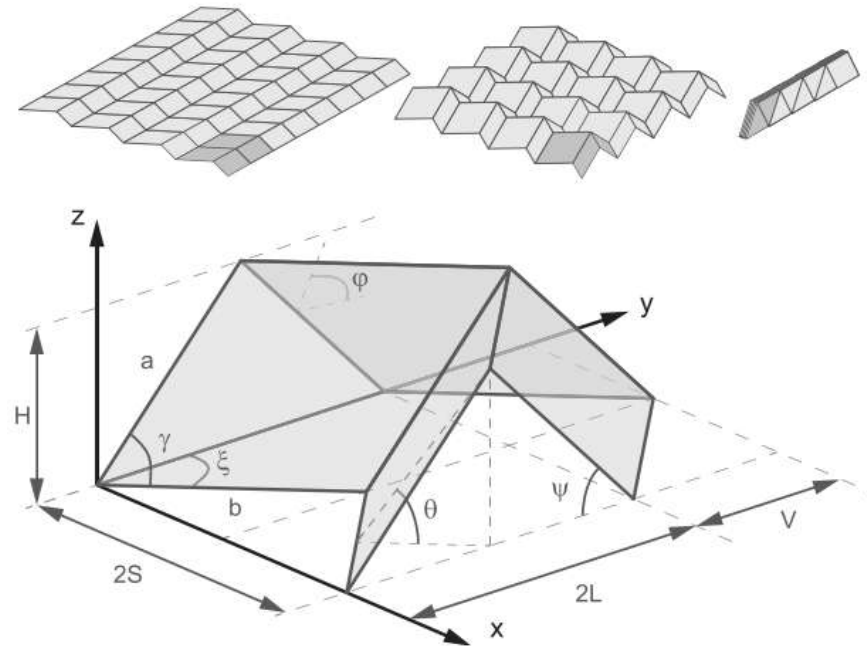
Metamaterial Quiral y Antiquiral



Nota. Adaptado de: Mousanezhad et al. (2016)

tetra-quirales en aplicaciones acústicas (Spadoni y Ruzzene, 2012; Bacigalupo y Gambarotta, 2016) por citar algunos ejemplos.

2.3.1.3 Metamateriales de origami. Los mMM Origami y Kirigami están inspirados en el arte de origen japonés que consiste en la creación de formas decorativas hechas a partir del doblado (origami) o corte (kirigami) del papel. Más allá de su finalidad artística, este enfoque se ha adaptado al diseño de mMM mecánicos ultraligeros con propiedades mecánicas ajustables y reprogramables (Song et al., 2012; Schenk y Guest, 2013; Wei et al., 2013; Lv et al., 2014; Hanna et al., 2014; Silverberg et al., 2014; Waitukaitis et al., 2015). La línea de investigación en MM basados en origami busca manipular y generar estructuras complejas partiendo de materiales bidimensionales (como el papel). Los mMM de origami se clasifican en cuatro categorías principales: el patrón Miura-ori, el patrón de Ron Resch, el patrón de giro cuadrado y los mMM basados en kirigami (Yu et al., 2018).

Figura 6*Metamaterial de tipo Miura-ori**Nota.* Adaptado de: Schenk y Guest (2013)

El patrón de Miura-ori, propuesto por Miura (1975), profundizado por autores como Wei et al. (2013); Schenk y Guest (2013); Lv et al. (2014), corresponde a un mMM basado una estructura plegada periódicamente en un patrón en espiga (Lv et al., 2014; Waitukaitis et al., 2015). La estructura se compone de células idénticas con pliegues convexos y cóncavos con cuatro crestas coordinadas. Los vértices se forman cuando cuatro pliegues se intersecan, donde los cuatro vértices adyacentes se unen a paralelepípedos que están dispuestos con simetría de inversión (Schenk y Guest, 2013) (ver Figura 6).

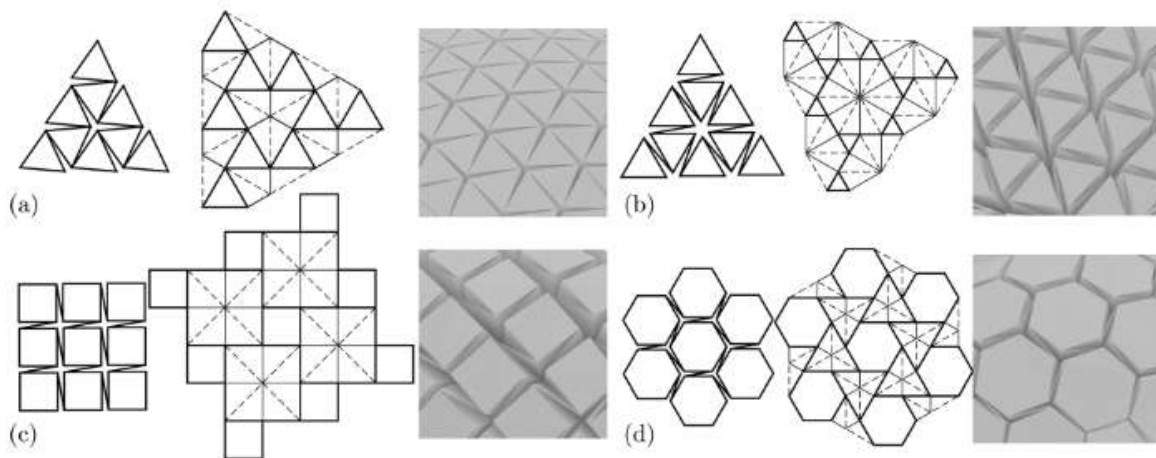
Dentro de las múltiples aplicaciones que tiene el patrón Miura-Ori, se resalta la obtención de estructuras con comportamientos auxéticos (Yasuda y Yang, 2015). Múltiples estudios en mMM basados en Miura-ori, revelaron que la estructura de cáscara plegada, proporciona una relación de Poisson negativa para las deformaciones dentro del plano y una relación de Poisson positiva para

la flexión fuera del plano (Schenk y Guest, 2013; Wei et al., 2013). Sumado a lo anterior, se han podido obtener estructuras basadas en el patrón Miura-Ori con un amplio rango de coeficientes de expansión térmica (Boatti et al., 2017).

El patrón de Ron Resch fue propuesto por Resch (1968, 1970); Resch y Christiansen (1970) y estudiado profundamente por autores como Tachi (2013); Lv et al. (2014) entre otros. Esta estructura es desarrollada con base en una serie de teselaciones de origami, mediante la inserción de un pliegue en forma de estrella (ver Figura 7). Este patrón de origami ha demostrado tener una alta capacidad de carga a compresión. Este mMM se caracteriza por la capacidad de las estructuras con simetrías de orden superior para soportar cargas significativamente mayores, como lo demuestra el estudio de Lv et al. (2014). Adicionalmente, también se han mostrado potenciales aplicaciones en el desarrollo de estructuras de absorción de energía (Chen et al., 2019).

Figura 7

Metamaterial de tipo Ron Resch



Nota. Adaptado de: Tachi (2013)

El patrón de giro cuadrado, también llamado por algunos autores como patrón de torsión cuadrado, es el menos común de todos los mMM de tipo origami. Para desarrollar el plegado del patrón de torsión cuadrada, es necesario considerar dos modos distintos de deformación, correspondientes al plegado y la flexión de facetas. En otras palabras, el giro en este patrón no puede ser

desarrollado únicamente con el pliegue, haciendo de este un mMM conflictivo comparado con otros mMM de Origami (Silverberg et al., 2014, 2015).

Finalmente, el mMM de kirigami corresponde a un patrón en el que la estructura se genera a partir del doblado (origami) y corte (kirigami). Este MM a diferencia de los mencionados anteriormente, resalta por la versatilidad en la generación de células y geometrías complejas (Neville et al., 2016). Recientemente, se ha estudiado el efecto de la estructura del mMM origami en el comportamiento elástico de nano compuestos (Shyu et al., 2015) y el uso de mMM reconfigurables, basados en origami, con rigidez variable sintonizable (Tang et al., 2017). También, se ha empleado, de forma exitosa, en el control de ondas de flexión y en la reflexión de ondas electromagnéticas.

2.3.1.4 Origami celular. Este mMM se inspira en la *snapología*, que corresponde a la creación de figuras decorativas en papel al igual que el origami y el kirigami, con la diferencia que este se fabrica a partir de figuras (módulos) más sencillos que se distribuyen siguiendo un determinado patrón. Esta forma de estructura origami celular se desarrolla siguiendo dos enfoques que son: un origami celular siguiendo un patrón de apilamiento uniforme (Schenk y Guest, 2013; Li y Wang, 2015; Le et al., 2020) o con un patrón intercalado o variable (Tachi y Miura, 2012; Filipov et al., 2015) (ver Figura 8).

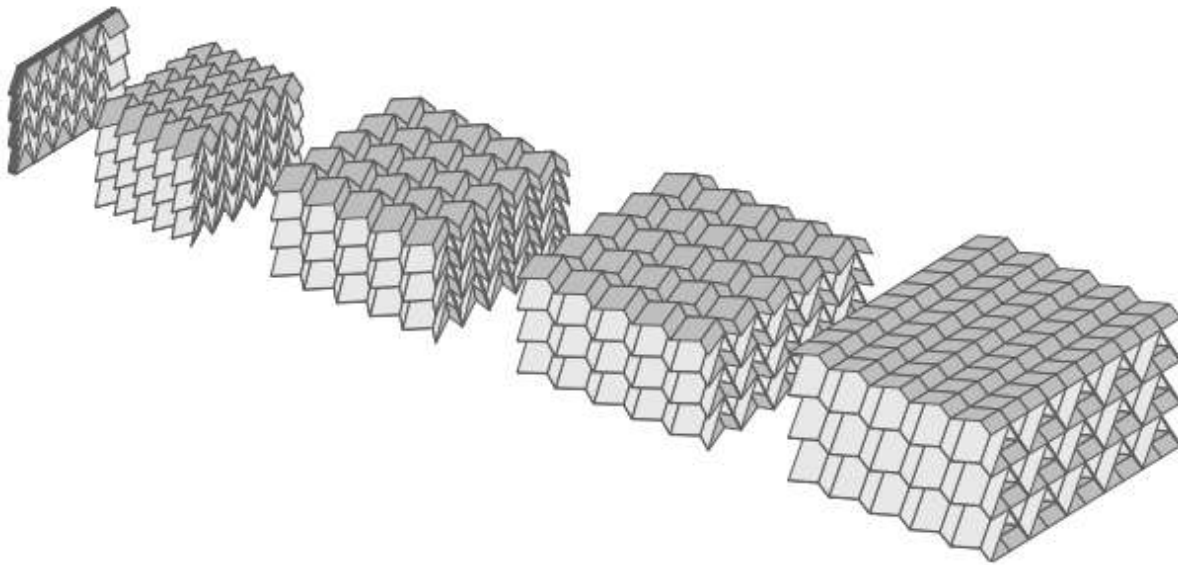
El origami con patrón de apilamiento, corresponde a una estructura modular de capas (módulos) apiladas de forma consecutiva, usualmente conformadas por patrones Miura-ori (Schenk y Guest, 2013). Este patrón de mMM ha demostrado experimentalmente resultados prometedores y mucho potencial en aplicaciones de absorción de impactos (Schenk y Guest, 2013; Yuan et al., 2019). Adicionalmente, producto de la estética y su capacidad de desarrollar estructuras con posibilidad de plegado, ha tenido un amplio uso en la generación de estructuras abatibles y múltiples aplicaciones en arquitectura (Yang et al., 2019).

El patrón de intercalado, entrelazado y en algunos textos denominado patrón tubular, es una estructura que combina las teselaciones del origami con un determinado el patrón (Tachi y Miura, 2012; Cheung et al., 2014; Filipov et al., 2015). Este patrón, por sus capacidades mecánicas, posibilidad de plegado y modos de deformación, ha sido estudiado en arquitectura en el desarrollo

de estructuras ligeras (Filipov et al., 2015; Yang et al., 2019). Sin embargo, esta línea al igual que el origami con patrón de apilamiento, sigue estando en desarrollo, concentrada en profundizar la búsqueda de la relación entre la configuración geométrica y la respuesta mecánica global de toda la estructura.

Figura 8

Metamaterial de origami de patrón de apilamiento



Nota. Adaptado de: Schenk y Guest (2013)

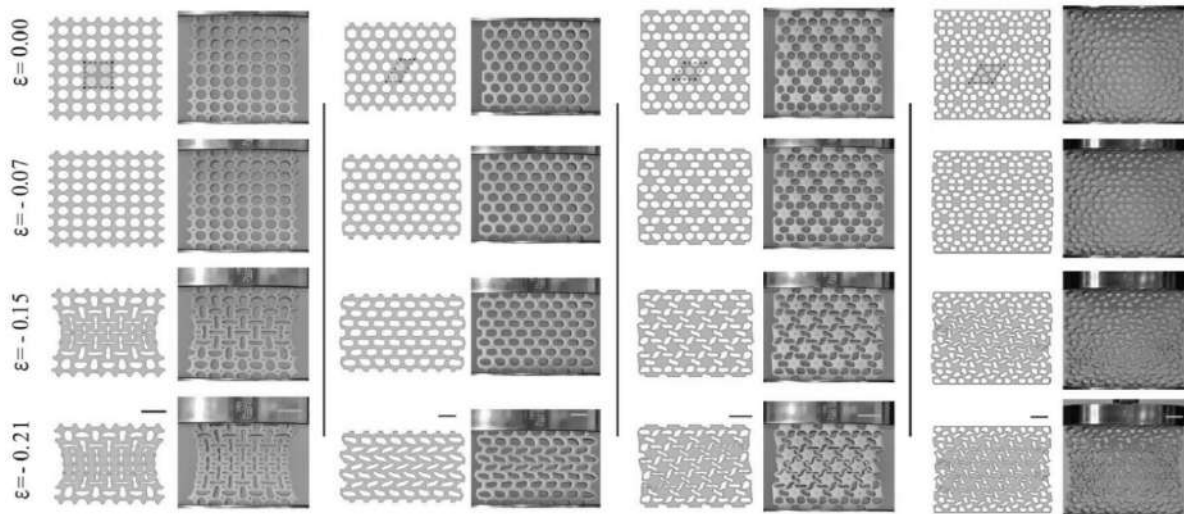
2.3.1.5 Patrones de transformación. Este mMM es la topología más versátil. Se caracterizan por ser estructuras generalmente simples, replicadas de manera uniforme o variable, con el propósito de manipular las propiedades mecánicas del sólido (Yu et al., 2018). En comparación las presentadas anteriormente, esta clase de mMM es más adaptable, lo que facilita la creación de estructuras con comportamientos auxéticos (Vogiatzis et al., 2017), compresibilidad nula o negativa (Xie et al., 2014), o siendo capaz de poder manipular de forma conveniente la relación esfuerzo-deformación (Shim et al., 2013; Bertoldi et al., 2017) entre muchos otros posibles comportamientos (ver Figura 9).

Lamentablemente, este mMM es altamente sensible a la forma y distribución de las células

en todo el volumen, lo que a menudo restringe las estructuras disponibles (Shim et al., 2013; Florijn et al., 2014; Shan et al., 2014; Bertoldi et al., 2017; Yu et al., 2018). Sin embargo, esta limitación no impide el desarrollo de estructuras complejas, como las células tipo giro propuestas por Chen et al. (Chen et al., 2019), u otras estructuras similares obtenidas por Ai y Gao (2019). Adicionalmente, varios autores (Ai y Gao, 2019; Gao et al., 2019; Zhang y Khandelwal, 2019) han empleado procesos de TO basados en los trabajos de Bendsøe y Kikuchi (1988); Suzuki y Kikuchi (1991), para la obtención de mMM auxéticos bidimensionales, mediante el empleo de análisis isogeométrico.

Figura 9

Metamaterial con patrón de transformación



Nota. Adaptado de: Shim et al. (2013)

2.3.2 Metamateriales asociados al módulo de cortante (G) y volumétrico (K)

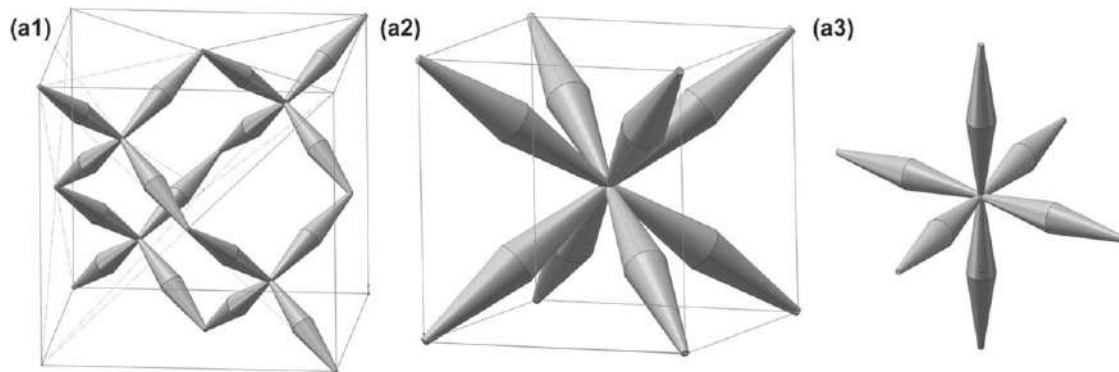
En este caso, existen dos variantes: los pentamodales y los mMM con compresibilidad negativa. Los pentamodales se distinguen por desarrollar una relación K/G muy alta, que algunos autores describen como un módulo de cortante en desaparición. Esta característica implica un módulo de cortante efectivo considerablemente inferior al módulo de compresibilidad. Por otro lado, los mMM con compresibilidad negativa son estructuras que, al someterse a presiones hidrostáticas, se expanden o comprimen en dirección opuesta a la aplicación de la presión.

2.3.2.1 Metamaterial pentamodal. Inicialmente teorizados por Milton y Cherkaev (1995); Sigmund (1995, 2000); Milton et al. (2006), y posteriormente refinados por investigadores como Kadic et al. (2012); Schittny et al. (2013a); Norris (2014); Gurtner y Durand (2014), suelen representarse como microestructuras tridimensionales similares a un tipo microarmadura. Estas emulan una configuración de "modo único", donde la respuesta mecánica está dominada por un único tipo de deformación (caracterizada por un tensor de elasticidad con un único valor propio positivo mientras que los demás son nulos). Este diseño permite que el material sea casi incompresible en una dirección (como los fluidos) y extremadamente débil frente a esfuerzos cortantes, dotándolo de propiedades ideales para aplicaciones en acústica y manipulación de ondas (ver Figura 10).

En el ámbito dinámico, los materiales pentamodales actúan como "metafluidos acústicos", capaces de manipular ondas con aplicaciones que incluyen dispositivos de aislamiento sísmico (Fabbrocino et al., 2015; Fraternali et al., 2015) y tecnologías de camuflaje acústico (Jiang et al., 2009), incluso en entornos submarinos.

Figura 10

Metamateriales de doble cono de tipo cúbica centrada en la cara extendida (a1), cúbica centrada en el cuerpo (a2) y cúbica simple (a3)



Nota. Adaptado de: Wang et al. (2017)

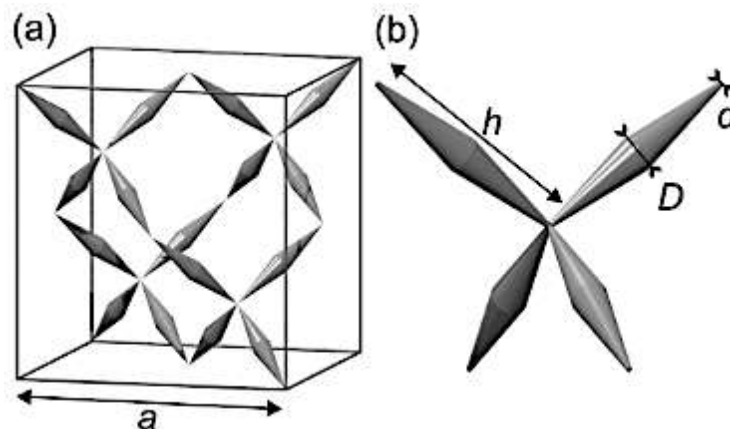
Los estudios experimentales y fabricación de este tipo de mMM se concretaron hasta principios del año 2012, liderados por autores como Martin et al. (2012); Kadic et al. (2013); Bückmann

et al. (2014a, 2015), entre otros. Estos investigadores propusieron un modelo ajustado de célula pentamodal de tipo tipo diamante basado en una geometría de doble cono (ver Figura 11), utilizando técnicas de manufactura aditiva. Aunque mantiene la geometría original propuesta por Milton y Cherkaev, el modelo de Wegener presenta ligeras variaciones en las zonas de conexión.

La aplicación de los mMM pentamodales en aislamiento sísmico ha demostrado resultados prometedores. Investigadores como Fraternali et al. (2015); Fabbrocino et al. (2015); Fabbrocino y Amendola (2017); Fraternali et al. (2018) y otros, han comparado su comportamiento esfuerzo-deformación con sistemas comerciales como los aisladores elastoméricos LRB (Laminated Rubber Bearing), evidenciando un desempeño comparable.

Figura 11

Metamaterial pentamodal



Nota. Adaptado de: Kadic et al. (2013)

Por otra parte, el mMM Kagome, también clasificado dentro de los mMM pentamodales, corresponde a una estructura basada en una configuración de celosía (Wills et al., 2002; Wicks y Hutchinson, 2004), inicialmente investigada por el grupo de Torquato (Hyun y Torquato, 2002). Este tipo de mMM, asociado tanto a la red Kagome (Hyun y Torquato, 2002) como a otras redes isostáticas periódicas (Mao y Lubensky, 2011; Chen et al., 2014; Mao et al., 2015), ha mostrado resultados prometedores en diversas aplicaciones, tal como han reportado autores como Vitelli

(2012); Kane y Lubensky (2013); Paulose et al. (2015). No obstante, esta línea de investigación continúa en una etapa temprana de desarrollo, enfocándose actualmente en la extrapolación de geometrías bidimensionales hacia configuraciones tridimensionales, con el objetivo de obtener mMM cuyas propiedades mecánicas se asemejen al comportamiento de un fluido ideal.

2.3.2.2 Compresibilidad negativa. El módulo de compresibilidad, se define como el cambio relativo de volumen de un sólido (o fluido) respecto a un cambio de presión hidrostática (Xie et al., 2014). La presencia de un módulo de compresibilidad negativo implica que el material, al ser sometido a tracción en sus caras, experimenta una reducción de volumen, mientras que al ser comprimido, su volumen aumenta (Baughman et al., 1998; Nicolaou y Motter, 2012). Este tipo de mMM se clasifica en tres categorías: mMM con compresibilidad lineal negativa, mMM con compresibilidad de área negativa y mMM con expansión térmica negativa (Yu et al., 2018).

Este comportamiento se ha observado principalmente en estructuras de tipo panal de abeja y espumas (Baughman et al., 1998). Por otro lado, los mMM con compresibilidad de área negativa son estructuras con una propiedad poco común que implica una contracción bidireccional cuando se someten a una tensión unidireccional (Cai et al., 2015). Finalmente, los mMM con expansión térmica negativa son aquellos en los que la estructura se contrae en una o más direcciones cuando se aplica calor, en lugar de expandirse como es típico. Este comportamiento puede parecer contraintuitivo, pero es inherente a la estructura del material y no a sus componentes individuales (Munn, 1972; Lakes y Wojciechowski, 2008; Goodwin et al., 2008).

2.3.3 Metamateriales asociados a la relación de Poisson (ν)

Esta clasificación únicamente contiene los mMM auxéticos, que agrupan las estructuras con un coeficiente de Poisson negativo o nulo, siendo este la relación (o ratio) de las deformaciones longitudinales y transversales de un material al ser sometido a una tensión.

2.3.3.1 Metamateriales auxéticos. Los MM auxéticos, corresponden a las estructuras que por su configuración geométrica o la topología de sus células, desarrollan un coeficiente de Poisson negativo (Wojciechowski, 1989; Yu et al., 2018; Kadic et al., 2019). Dentro de este tipo de mMM, se podrían establecer dos clases que son los MM auxéticos constantes y los variables. El primer

tipo corresponde a un MM con un coeficiente de Poisson negativo o cero, que es homogéneo en todo el sólido y no presenta variación. El segundo tipo también llamado discretizado, corresponde a un MM en donde el coeficiente puede ser manipulado a conveniencia en el volumen del sólido, usualmente desarrollando una estrategia similar a la de los mMM con patrones de transformación.

Esta clase de mMM es relacionado con frecuencia con los mMM antiquirales, ya que corresponde a la estructura más común para desarrollar una célula con un coeficiente de Poisson negativo. Sin embargo, este comportamiento se ha obtenido con múltiples estructuras como las tipo origami (Yasuda y Yang, 2015), panal de abejas (Zhang y Khandelwal, 2019), o en estructuras mucho más completas como las desarrolladas por autores como Bückmann et al. (2014a) y otros .

2.4 Sistemas de protección sísmica

Los sistemas de protección sísmica se han establecido como una medida necesaria para el control y reducción del riesgo sísmicos de las diferentes estructuras civiles. En las siguientes subsecciones se presentarán los sistemas clásicos de protección sísmica y los sistemas de protección sísmica basados en mMM.

2.4.1 *Sistemas de protección sísmica clásicos*

Los SPS clásicos, son unos dispositivos que buscan aumentar la capacidad que tiene la estructura de soportar un evento sísmico. Estos sistemas se clasifican en 4 grandes grupos que son: pasivos (SP); activos (SA); semiactivos (SS) e híbridos (SH) (Spencer Jr y Soong, 1999; Soong y Spencer, 2000; Datta, 2003; Jung et al., 2004; Braz-César y Barros, 2013).

Los SP, también denominados sistemas de control pasivo de vibraciones, constituyen una de las cuatro principales estrategias de mitigación de respuesta estructural ante eventos sísmicos. Estos sistemas se basan en la incorporación de dispositivos especializados dentro de la estructura, cuya función es modificar sus propiedades mecánicas (como la rigidez o la capacidad de disipación de energía) con el objetivo de reducir las solicitaciones inducidas por el movimiento del terreno. Los sistemas de protección sísmica pasivos son actualmente los más utilizados a nivel mundial debido a su alta confiabilidad, bajo requerimiento de mantenimiento, y la ausencia de necesidad de fuentes de energía externas para su funcionamiento. Además, su implementación ha demostrado ser efectiva

en una amplia variedad de tipologías estructurales, lo que los convierte en una opción robusta y versátil para el diseño sismorresistente.

Los SA corresponden a una serie de dispositivos que ubicados en la estructura que desarrollan fuerzas de control, con el fin de manipular y reducir la respuesta de la estructura ante un sismo. Las fuerzas de control son aplicadas mediante actuadores integrados a sensores, controladores y procesadores de toda la información en tiempo real. Los SH que básicamente son una combinación de los dos sistemas anteriormente mencionados, con el propósito de usar lo mejor de las dos alternativas y mejorar la eficiencia del control de la estructura y, por ende, su desempeño ante el sismo. Finalmente, los SS a diferencia de los dos anteriormente mencionados, no aplican fuerzas de control a la estructura, sin embargo, el sistema posee propiedades variables que pueden ser manejadas para reducir la respuesta del sistema estructura ante el sismo. Una clasificación detallada y desglosada se presenta en la figura 12

Dentro los sistemas de protección sísmica, los sistemas pasivos han gozado de gran popularidad e interés (Kitamura et al., 2004), siendo una de las alternativas más simples, prácticas y económicas. Alrededor de 23000 estructuras a nivel mundial se han protegido mediante sistemas pasivos de protección sísmica (aislamiento de base y disipación de energía) en alrededor de 30 países (Martelli et al., 2014). Los países en los que más se han empleado los SPS son Japón, Italia, USA China y Rusia. Se usan para vientos y sismos fuertes, frecuentes y moderados. Por otro lado, Morales-Beltran y Paul (2015) reportaron 80 edificaciones equipadas con sistemas activos, y semi activos. Los datos indican una preferencia sustancial por los sistemas pasivos de protección sísmica en todo el mundo. Los sistemas activos, semiactivos e híbridos, aunque menos numerosos, se están estudiando y aplicando cada vez más, sobre todo en Japón, debido a sus avanzadas prestaciones. Sin embargo, como se muestra en Micheli et al. (2017), los costos iniciales de construcción y los de ciclo de vida son, consistentemente, mas elevados para sistemas activos y semi activos que para los pasivos. Este último sistema de protección se clasifica en 3 tipos, siendo: aisladores; disipadores y sistemas resonantes.

Los sistemas de aislamiento sísmico, son unos dispositivos que buscan desacoplar la super-

Figura 12

Clasificación de SPS clásicos.



Nota. Adaptado de: Braz-César y Barros (2013)

estructura de su fundación/cimientos, con el fin de reducir la interacción suelo estructura y por ende reducir su respuesta ante el sismo (Ng y Xu, 2006; Chen et al., 2006; Calvi y Calvi, 2018; Luca y Guidi, 2019). Dentro de los sistemas de aislamiento, los más populares son los elastoméricos que se subdividen en LRB (Laminated Rubber Bearing) y HDRB (High Damping Rubber Bearing) y el péndulo de fricción.

Por otro lado el uso de sistema disipadores busca aumentar el amortiguamiento que tienen la estructura, reduciendo su respuesta ante el sismo (Pong y Tsai, 1995; Symans et al., 2008; Oviedo y Duque, 2009). Este SPS en la práctica consiste en la instalación de un sistema de amortiguadores

mediante unos elementos de soporte. En este SPS, los tipos de amortiguadores más usados son: amortiguadores de fluido viscoso, amortiguadores sólido visco elástico, amortiguadores metálicos y amortiguadores de fricción.

Algunas limitaciones y retos de los sistemas pasivos de disipación de energía en edificaciones incluyen: los amortiguadores histéricos, pueden sufrir deformaciones plásticas durante los terremotos, lo que requiere inspecciones continuas o periódicas y su eventual sustitución (Abarkane et al., 2019). A pesar de las numerosas investigaciones realizadas, la aplicación de dispositivos pasivos de disipación de energía en estructuras de hormigón sigue siendo poco estudiada, lo que indica la necesidad de mejorar continuamente su diseño y desarrollo.

Finalmente, los sistemas resonantes, corresponden a un dispositivo con una masa considerablemente alta que es sintonizada buscando que esta vibre con la misma frecuencia natural de la estructura, con el fin que, al momento del sismo, esta genere una fuerza opuesta a la excitación de la estructura, disminuyendo la respuesta de la estructura ante el sismo (Jangid, 1995; Jabary y Madabhushi, 2015). Dentro de los sistemas resonantes están el TMD (Tuned Mass Damper), TLD (Tuned Liquid Damper) y TLCD (Tuned Liquid Column Damper).

Los sistemas resonantes destacan por su alta eficiencia en la protección de estructuras de gran altura sometidas a cargas de viento, como se evidencia en el trabajo de Weber et al. (2019). Además, han demostrado ser mecanismos efectivos para la disipación de energía (Lin et al., 2010) y representan una alternativa costo-efectiva con bajos requerimientos de mantenimiento (Konar y Ghosh, 2021). Sin embargo, como SPS, presentan limitaciones asociadas a su naturaleza de parámetros fijos, lo que dificulta su adaptación a frecuencias de excitación variables (Weber et al., 2019). Asimismo, su implementación suele requerir espacios amplios y masas considerables (Weber et al., 2019; Salimi et al., 2021), y el ajuste preciso de su frecuencia de trabajo puede ser un proceso complejo, dado que implica la optimización de parámetros geométricos críticos (Altay et al., 2014).

Estos SPS son el punto de partida de una alternativa fundamentada en la aplicación de tecnologías como los mMM. Estos avances, ha posibilitado el desarrollo de nuevos enfoques en el ámbito del aislamiento y la protección sísmica. Estos serán examinados en detalle en el próximo

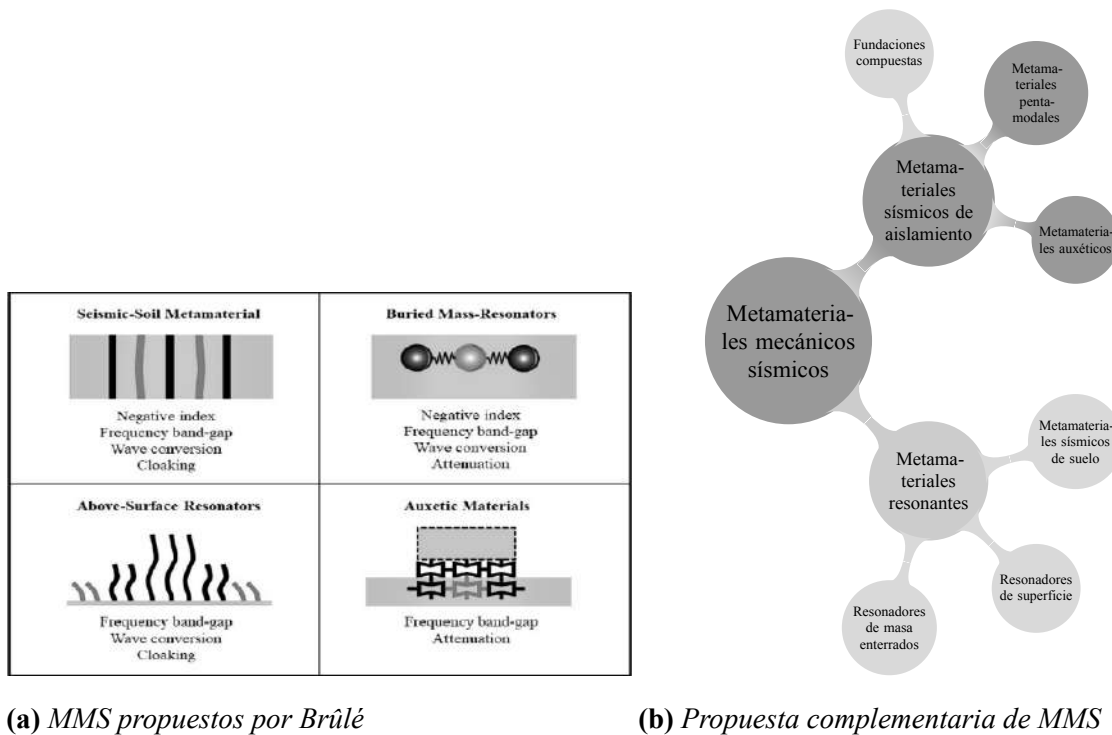
capítulo.

2.4.2 *Sistemas de protección sísmica con metamateriales*

Corresponden a la aplicación de mMM en la protección sísmica de edificaciones (Brûlé et al., 2020), se conocen también como MMS. Su principio de funcionamiento se basa en modificar la propagación de las ondas sísmicas y reducir su impacto en las estructuras, generalmente a través de intervenciones en el suelo o la fundación. Según Brûlé et al. (2020), estos sistemas pueden agruparse en cuatro categorías: MM sísmicos de suelo, resonadores de superficie, resonadores de masa enterrados y MMS auxéticos. No obstante, a partir del análisis de la literatura para esta investigación, se propone una clasificación complementaria que distingue dos grandes grupos: sistemas de aislamiento y sistemas resonantes. En el primer grupo se incluyen los MM sísmicos de suelo, los resonadores de superficie y los resonadores de masa enterrados, mientras que en el segundo se agrupan los MM auxéticos, los MM pentamodales y las fundaciones compuestas (ver Figura 13).

2.4.2.1 Los metamateriales sísmicos de suelo. Consiste en una serie de elementos, normalmente cilíndricos (aunque existen variantes con secciones diferentes a la circular (Achaoui et al., 2017)), con sección hueca o maciza (Brûlé et al., 2013, 2017a), que se insertan en el suelo con el propósito de modificar la propagación de las ondas sísmicas. Estos buscan alterar el comportamiento de las ondas sísmicas utilizando principios como la ley de Bragg (Brûlé et al., 2017a; Achaoui et al., 2017), basándose en los conceptos analizados en los estudios clásicos de Veselago (1968); Pendry (2000); Smith et al. (2004). Esto implica el control de la fase de la onda grupal de salida, así como de las ondas transmitidas y reflejadas.

Estos arreglos reducen la amplitud de las ondas en un rango de frecuencias altas del espectro de Fourier, lo cual resulta prometedor para estructuras de baja altura. Además, proporcionan una reducción en las amplificaciones dentro del espectro de respuesta elástica, como se demostró en un experimento a escala real llevado a cabo por la empresa Menard (Brûlé et al., 2013, 2017c). En dicho experimento, se logró una reflexión total, lo que permitió el control de la trayectoria de las ondas mediante una anisotropía especialmente diseñada, así como la atenuación por disipación de

Figura 13
Clasificación de MMS

(a) MMS propuestos por Brûlé

(b) Propuesta complementaria de MMS

Nota. Adaptado de: Brûlé et al. (2020)

energía.

2.4.2.2 Los resonadores de superficie. Este sistema consiste en una serie de elementos, típicamente cilíndricos, dispuestos en la superficie de manera similar a un bosque (Brûlé et al., 2020, 2017c). La disposición de estos elementos en la superficie conlleva a una conversión de ondas superficiales a ondas de cizallamiento masivas o a filtros de ondas superficiales con bandas de separación, pero con una frecuencia superior (Brûlé et al., 2020; Colombi et al., 2016b).

Este tipo de MMS, que actúa como una barrera, ha demostrado ser efectivo en la atenuación y desvío de ondas sísmicas superficiales (Colombi et al., 2016b; Zeng et al., 2020). Sin embargo, existen diversos aspectos que deben ser considerados. Uno de los más relevantes es la suposición de una conexión perfecta entre el resonador y el suelo, una condición ideal difícil de lograr, especialmente en

suelos blandos, lo que reduce significativamente la efectividad del mMM. Otro aspecto importante es que los mMM suelen modelarse con materiales lineales, elásticos, homogéneos e isotrópicos, lo cual no refleja adecuadamente la complejidad del suelo ni las propiedades no lineales de los materiales sometidos a cargas sísmicas intensas. Además, aunque estos sistemas se basan en mecanismos de resonancia local (lo que permite que sus dimensiones sean pequeñas en comparación con la longitud de onda), muchos de los mMM propuestos se encuentran en escalas decamétricas. En términos prácticos, esto implica que la excavación e instalación de resonadores de gran tamaño no es trivial y puede representar desafíos logísticos y económicos considerables. Finalmente, cabe destacar que no se han abordado ciertos efectos fundamentales, como la interacción con ondas incidentes en distintos ángulos, el comportamiento frente a múltiples tipos de ondas sísmicas (S, P, Love), o las influencias derivadas de condiciones de borde no ideales e irregularidades topográficas (Colombi et al., 2016a; Palermo y Marzani, 2018).

2.4.2.3 Los resonadores de masa enterrados. Estos dispositivos son similares a los SP resonantes de masa sintonizada mencionados en secciones anteriores (ver Figura 12). Ambos operan bajo un principio similar: la incorporación de un sistema oscilatorio sintonizado a una frecuencia específica, generalmente baja. La principal diferencia radica en la ubicación del dispositivo: mientras que los SPS clásicos se integran dentro de la estructura, este tipo de sistema de masa sintonizada se instala en el terreno, es decir, actúa de forma desacoplada de la estructura. El funcionamiento se basa en que, ante una excitación externa, la masa del sistema entra en resonancia en dirección opuesta al movimiento del suelo. Esta respuesta desfasada genera fuerzas inerciales que contribuyen a atenuar la transmisión de vibraciones hacia la estructura (Achaoui et al., 2016; Brûlé et al., 2020).

Este tipo de sistema aún se encuentra en fase de desarrollo, lo que impone ciertas limitaciones. Entre los principales desafíos se encuentran los elevados costos asociados, las escalas requeridas para su fabricación, y la dificultad inherente a los sistemas resonantes para lograr bandas de atenuación amplias y eficientes (Achaoui et al., 2016; Brûlé et al., 2020).

2.4.2.4 Los metamateriales sísmicos auxéticos. Este tipo de MMS se localiza generalmente en una zona específica de la estructura, frecuentemente en la fundación o en su entorno

inmediato. Trabajos como el presentado por Ungureanu et al. (2015) han demostrado que, debido a su topología particular, estos MMS tienen la capacidad de influir en la propagación de ondas sísmicas dentro del rango de 1 Hz a 40 Hz, lo que los posiciona como candidatos prometedores para SP de aislamiento. Adicionalmente, se ha evidenciado que una placa estructurada con mMM auxéticos puede suprimir completamente las vibraciones de una edificación en frecuencias de resonancia específicas (como 1 Hz, 9 Hz, 17 Hz y 37 Hz), y que la transmisión de ondas a través de una cimentación con MMS auxético se reduce en al menos 10 dB en comparación con una cimentación convencional, independientemente de la frecuencia de la onda incidente.

No obstante, el estudio se limita a un análisis elástico, y aunque el MMS mostró un buen desempeño, los autores destacan que su comportamiento varía de forma significativa en función de su topología. En particular, en el caso analizado, dicha variación depende del ángulo de incidencia auxética del mMM (el ángulo de incidencia α).

2.4.2.5 Los metamateriales pentamodales en aislamiento sísmico. Investigaciones recientes, como la de Li y Zhang (2022), han demostrado que los mMM pentamodales pueden exhibir bandas de parada en bajas frecuencias mediante la variación de las dimensiones internas de las celdas unitarias hexagonales que los componen. De manera complementaria, el estudio de Huang et al. (2021) reporta que la relación entre el módulo de compresibilidad y el módulo de corte (K/G) en el mMM pentamodal analizado supera un valor de 300, lo que representa un incremento significativo respecto a los materiales convencionales.

En los últimos años, junto con la clasificación de sistemas propuesta por Brûlé et al. (2020), se ha evidenciado un creciente interés en la aplicación de mMM en SPS clásicos, así como en el desarrollo de nuevas técnicas constructivas, como la manufactura aditiva. Esta última ha permitido la fabricación de estructuras con geometrías complejas, facilitando la implementación de nuevos sistemas de protección sísmica fundamentados en principios tradicionales. En este contexto, autores como Fabbrocino et al. (2015); Fabbrocino y Amendola (2017) han contribuido significativamente al perfeccionamiento de los sistemas clásicos mediante la incorporación de mMM, particularmente pentamodales, en el diseño de aisladores sísmicos de base.

Los mMM pentamodales se destacan por su comportamiento mecánico caracterizado por la presencia de cinco modos de deformación "blandos" (soft modes), que les permiten soportar predominantemente esfuerzos de compresión, comportándose como un fluido frente a esfuerzos de corte. Esta elevada blandura al cortante implica una resistencia muy baja al movimiento lateral relativo, lo cual es favorable en sistemas de aislamiento sísmico que requieren admitir grandes desplazamientos sin acumulación de fuerzas internas (Fabbrocino y Amendola, 2017).

No obstante, estos mMM aún requieren estudios más profundos, ya que existen aspectos que no han sido plenamente abordados. Uno de los principales es que la mayoría de las investigaciones se concentran en sus propiedades acústicas y vibratorias, sin considerar en detalle la integridad estructural global del material, su resistencia frente a cargas estáticas o cíclicas prolongadas, la fatiga o su durabilidad en condiciones operativas reales. Además, las estructuras pentamodales pueden ser intrínsecamente frágiles debido a la delgadez de sus conexiones y a la configuración de sus elementos estructurales, diseñados precisamente para facilitar los modos blandos. Esta condición podría comprometer su durabilidad y su comportamiento frente a cargas cíclicas severas. Si bien las propiedades pentamodales son atractivas en el régimen lineal, el comportamiento del material bajo grandes deformaciones no suele ser abordado con profundidad en los estudios iniciales, lo que podría limitar su confiabilidad en escenarios extremos.

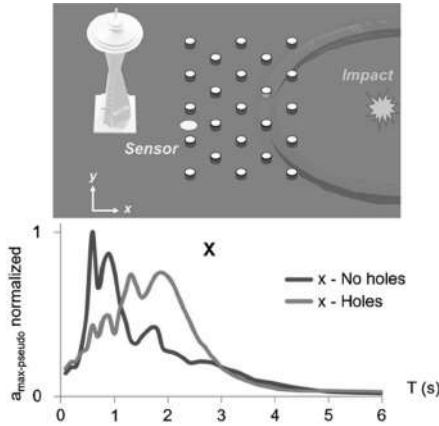
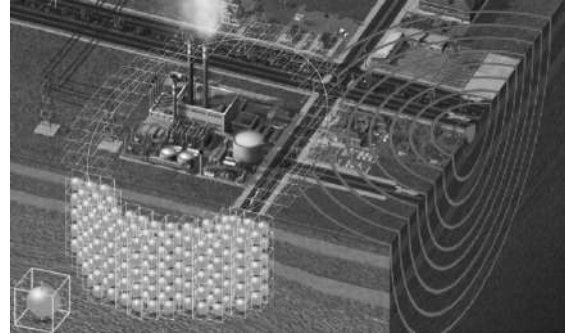
Aunque es necesario someter estos dispositivos a evaluaciones más rigurosas, dado que esta línea de investigación aún se encuentra en una etapa temprana, los resultados obtenidos hasta ahora han sido alentadores. Diversos estudios han evidenciado que los sistemas basados en mMM pentamodales podrían representar una alternativa de alto desempeño frente a los sistemas tradicionales de aislamiento sísmico elastomérico (Fabbrocino et al., 2015).

2.4.2.6 Fundaciones compuestas con Metamateriales. Otra alternativa de aplicar mMM en el aislamiento sísmico son las fundaciones compuestas, inicialmente formuladas como un sistema de múltiples capas de suelo (Brûlé et al., 2020, 2017b; Huang et al., 2017), y posteriormente presentada como una fundación compuestas por autores como Mu et al. (2020). Este enfoque de aislamiento se centra en una fundación superficial compuesta por múltiples capas. Este tipo de

MMS, como el desarrollado por autores como Witarto et al. (2018), ha demostrado ser efectivo en el desarrollo de bandas de parada. Algunos investigadores, como Casablanca et al. (2018), han mejorado esta forma de aislamiento mediante la incorporación de MMS y sistemas resonantes (Finocchio et al., 2014; Casablanca et al., 2018), lo que ha permitido el desarrollo de filtros efectivos.

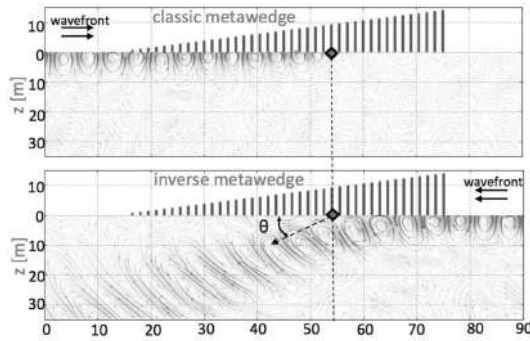
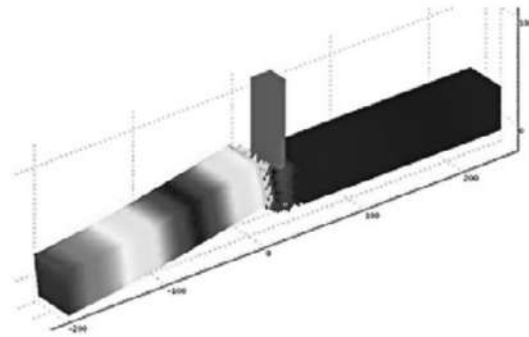
Aunque todos los MMS previamente descritos pueden desempeñar un papel relevante en la mitigación del impacto sísmico (ver Figura 14), en esta tesis se ha decidido centrar el análisis en los mMM auxéticos y pentamodales. Esta decisión responde al principal objetivo del estudio, que se centra en la generación de nuevos mMM en lugar de la adaptación de configuraciones existentes. Asimismo, en este trabajo se propone investigar el diseño de estructuras laminadas compuestas por capas con distintas geometrías celulares, con el objetivo de evaluar su comportamiento frente a distintas sollicitaciones sísmicas.

Los mMM auxéticos, caracterizados por un coeficiente de Poisson negativo, destacan por su notable capacidad de alterar la propagación de ondas sísmicas. Por su parte, los mMM pentamodales, con su elevada relación K/G , ofrecen un gran potencial para el desarrollo de soluciones avanzadas de aislamiento. Al restringir el estudio a estos dos tipos, se busca profundizar en su diseño, análisis y optimización con el fin de explorar su aplicabilidad como elementos clave en tecnologías de SPS de nueva generación.

Figura 14
Metamateriales sísmicos (MMS)

(a) MMS de suelo

(b) MMS Resonadores enterrados

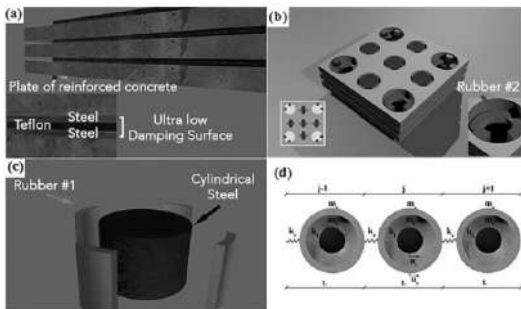
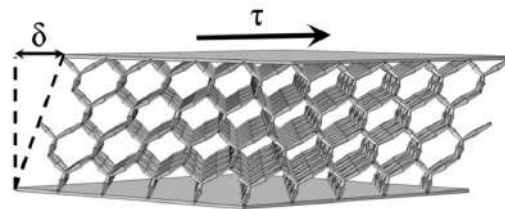
Nota. Tomado de: Brûlé et al. (2020)

Nota. Tomado de: Achaoui et al. (2016)


(c) MMS Resonadores superficiales

(d) MMS auxéticos

Nota. Tomado de: Colombi et al. (2016b)

Nota. Tomado de: Ungureanu et al. (2015)


(e) MMS fundaciones compuestas

(f) MMS Pentamodal

Nota. Tomado de: Casablanca et al. (2018)

Nota. Tomado de: Fabbrocino et al. (2015)

3 Método de elementos finitos

En este capítulo se presenta la teoría y los conceptos de la mecánica del continuo que fundamentan el FEM, aplicado a una formulación basada en deformaciones. Se comienzan abordando los conceptos y relaciones fundamentales para establecer las ecuaciones del método. El desarrollo del FEM se realiza considerando elasticidad lineal y no lineal geométrica. La presentación teórica persigue un objetivo doble: definir el FEM empleado en esta investigación y facilitar al lector las bases requeridas para comprender la lógica y la arquitectura del código computacional desarrollado en FORTRAN (GNU Project, 2024). El capítulo culmina con una descripción de la herramienta computacional desarrollada, sus módulos y los repositorios donde se encuentra disponible el código.

3.1 Equilibrio del sistema

En el FEM, las ecuaciones que rigen el equilibrio de un sólido son fundamentales para modelar su respuesta frente a cargas externas y condiciones de contorno. Por esto, es necesario formular rigurosamente las expresiones que describen tanto el equilibrio interno como el equilibrio en el contorno del dominio. Como punto de partida, se considera el análisis del equilibrio interno mediante la evaluación de un elemento diferencial sometido a un estado de esfuerzos en un sistema bidimensional (ver Figura 15).

Siendo b una carga volumétrica, e el espesor (constante), σ el esfuerzo en las caras, el equilibrio en ambas direcciones sigue las ecuaciones,

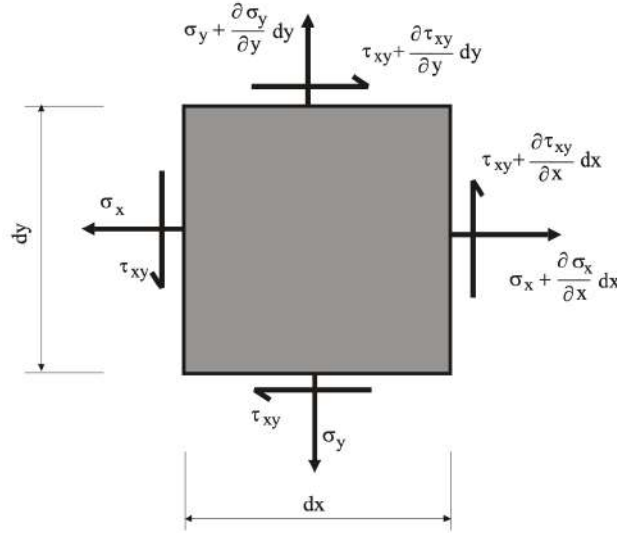
$$-\sigma_{xx}edy - \sigma_{xy}edx + \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}dx\right)edy + \left(\sigma_{xy} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}dy\right)edx + b_x edxdy = 0 \quad (1)$$

$$-\sigma_{yy}edx - \sigma_{xy}edy + \left(\sigma_{yy} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}dy\right)edx + \left(\sigma_{xy} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}dx\right)edy + b_y edxdy = 0 \quad (2)$$

Simplificando ambas expresiones, se obtiene el sistema de ecuaciones.

Figura 15

Equilibrio en elemento diferencial bidimensional.



$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + b_x = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + b_y = 0 \quad (4)$$

Finalmente, este sistema de ecuaciones se puede expresar de forma compacta (aplicable a un caso tridimensional) con la expresión.

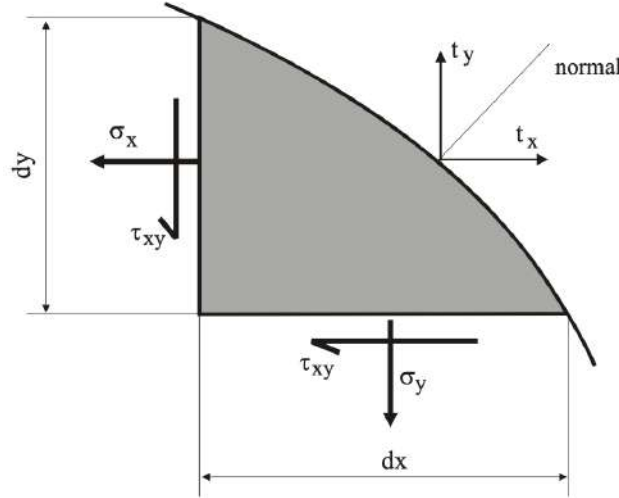
$$\nabla \cdot [\sigma] + \{b\} = 0 \quad (5)$$

Considerar que la expresión es aplicable tanto a materiales elásticos lineales como no lineales. Por otro lado, en el contorno pueden existir cargas externas aplicadas, definidas por el vector t . Si toma como punto de partida un caso bidimensional en el contorno sujeto a una carga superficial (ver Figura 16).

Siendo t_x y t_y , las cargas en el contorno en ambas direcciones y l y m los cosenos directores, el equilibrio sigue las ecuaciones.

Figura 16

Equilibrio en el contorno en elemento diferencial bidimensional.



$$t_x = l\sigma_{xx} + m\sigma_{xy} \quad (6)$$

$$t_y = l\sigma_{xy} + m\sigma_{yy} \quad (7)$$

Esta expresión escrita de forma compacta tiene la forma.

$$\{t\} = [\sigma] \cdot \{n\} \quad (8)$$

Siendo n el vector unitario normal a la superficie.

3.2 Relación desplazamiento-deformación

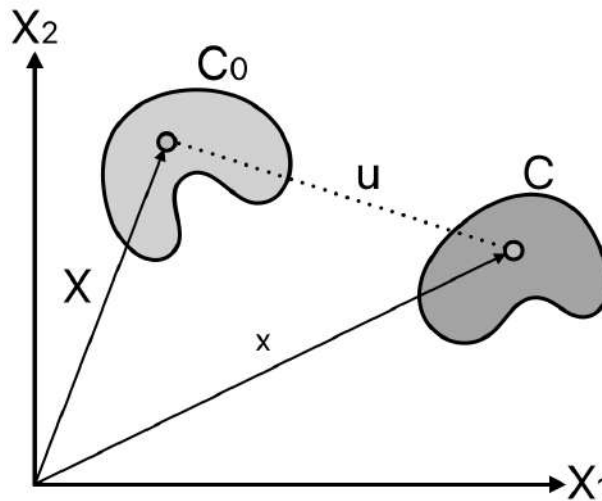
En el FEM, la relación entre los campos de desplazamientos y deformaciones constituye un componente esencial del marco matemático, ya que permite vincular el movimiento de los puntos materiales del cuerpo con la respuesta interna del medio continuo. El campo de desplazamientos describe la variación espacial de la posición de cada partícula del sólido como resultado de la aplicación de cargas externas o condiciones de contorno. A partir de este campo, mediante operaciones de diferenciación espacial, se obtienen las componentes del tensor de deformación, el cual cuantifica

los cambios relativos, es decir, las deformaciones inducidas en el cuerpo.

Esta relación es indispensable para la formulación de las ecuaciones de equilibrio y la aplicación de las leyes constitutivas que rigen el comportamiento del material. Para su análisis, considerar un sólido bidimensional con una configuración de referencia C_0 en el cual una partícula cualquiera del cuerpo ocupa la posición X , referida al sistema cartesiano (X_1, X_2) de coordenadas materiales. Después de la aplicación de las cargas el sólido se deforma y asume una nueva configuración C , en la cual la partícula ahora ocupa la posición x (Figura 17).

Figura 17

Relación entre la configuración de referencia C_0 (sin deformación) y una configuración actual C (deformada)



El desplazamiento u de la partícula respecto a la configuración de referencia es.

$$\{u\} = \{x\} - \{X\} \quad (9)$$

El desplazamiento se puede abordar a partir de las dos configuraciones. El primer abordaje se hace respecto a la configuración de referencia C_0 este abordaje se denominada formulación Lagrangiana total. De esta forma, las coordenadas actuales o deformada de la partícula (x_1, x_2) se expresan en términos de las coordenadas de referencia (X_1, X_2) . Por otro lado, el segundo abordaje

se hace respecto a la configuración actual C o deformada, este abordaje se denomina formulación Lagrangiana actualizada en donde las coordenadas iniciales de la partícula (X_1, X_2) se expresan en termino de las coordenadas actuales (x_1, x_2) . De esta forma, el desplazamiento siguen las ecuaciones.

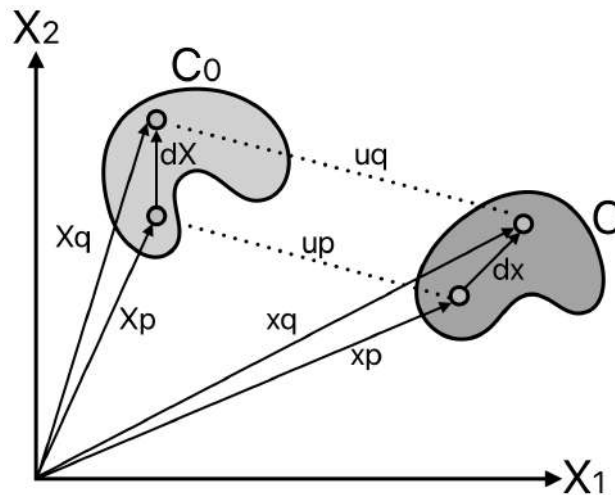
$$\{u(X, t)\} = \{x(X, t)\} - \{X\} \quad (10)$$

$$\{u(x, t)\} = \{x\} - \{X(x, t)\} \quad (11)$$

Por otro lado, para abordar la deformación, considerar un solido bidimensional con dos puntos (P y Q). En donde X_p y X_q corresponden a los vectores posición para la configuración de referencia C_0 y x_p y x_q para la configuración actual C . Adicionalmente se establece que la posición de Q relativa a P está dada por un vector elemental dX para la configuración actual y dx para la deformada (ver Figura 18).

Figura 18

Deformación de un tramo PQ entre la configuración de referencia C_0 (sin deformación) y una configuración actual C (deformada)



$$\{dX\} = \{X_q\} - \{X_p\} \quad (12)$$

$$\{dx\} = \{x_q\} - \{x_p\} \quad (13)$$

La relación que hay entre el segmento dX y dx esta definida por un tensor bipunto denominado tensor de gradiente de deformación (F) definido como.

$$[F] = \frac{dx}{dX} \quad (14)$$

El tensor F también se puede definir a partir de desplazamientos medidos en la configuración de referencia, resultado en la expresión.

$$[F] = \frac{dx}{dX} = \frac{d(u(X, t) + X)}{dX} = \frac{du(X, t) + dX}{dX} = \frac{du}{dX} + I \quad (15)$$

Siendo I el tensor Identidad. Retomando nuevamente los puntos P y Q separados por dX en la configuración de referencia y dx en la configuración actual. La distancia entre los puntos para las dos configuraciones son.

$$(dS)^2 = dX \cdot dX \quad (16)$$

$$(ds)^2 = dx \cdot dx = (F \cdot dX) \cdot (F \cdot dX) = dX^T \cdot (F^T \cdot F) \cdot dX = dX^T \cdot C_c \cdot dX \quad (17)$$

Siendo C_c el tensor de Cauchy-Green por la derecha definido como.

$$C_c = F^T \cdot F \quad (18)$$

Por otro lado, la diferencia del cuadrado de las distancias entre P y Q que ocurre mientras el cuerpo se deforma de la configuración de referencia a la actual puede ser expresado.

$$(ds)^2 - (dS)^2 = 2dX \cdot E_g \cdot dX \quad (19)$$

Siendo E_g el tensor de deformación de Green-Lagrange definido como.

$$E_g = \frac{1}{2}F^T \cdot F - I = \frac{1}{2}(C_c - I) \quad (20)$$

De igual forma, considerando el cambio de cuadrado de la distancia entre P y Q respecto a la configuración actual se obtiene.

$$(ds)^2 - (dS)^2 = 2dx \cdot E_e \cdot dx \quad (21)$$

Siendo e el tensor de deformación de Euler-Almansi definido como,

$$E_e = \frac{1}{2}(I - F^{-T} \cdot F^{-1}) = \frac{1}{2}(I - B^{-1}) \quad (22)$$

Siendo B el tensor de Cauchy y su inversa es el tensor de deformaciones de Cauchy-Green por la izquierda (B_{izq}). Este ultimo se puede definir a partir del tensor de gradiente de deformación de la forma.

$$F^{-1} = \frac{dX}{dx} = \frac{d(x - u(x, t))}{dx} = I - \frac{du}{dx} \quad (23)$$

$$B^{-1} = F^{-T} \cdot F^{-1} \quad (24)$$

$$B_{izq} = F \cdot F^T \quad (25)$$

3.3 Relación tensión-deformación y modelo constitutivo

La relación tensión-deformación describe cómo los esfuerzos (tensiones) se vinculan con las deformaciones en un material. Dependiendo del enfoque del problema, se emplean diferentes

ecuaciones. En un caso elástico-lineal, donde se asumen pequeñas deformaciones, la relación entre tensiones y deformaciones sigue la ley de Hooke, basada en el tensor de deformación infinitesimal descrita como.

$$\sigma = C : \varepsilon \quad (26)$$

Siendo C el tensor de rigidez elástica del material y ε el tensor de deformación. En un caso elástico con no linealidad geométrica, es necesario definir los tensores de Piola-Kirchhoff, fundamentales para analizar problemas con grandes deformaciones, ya que permiten describir las tensiones en función de la configuración inicial del material. Existen tres tipos de tensores: el tensor de Kirchhoff (τ), el primer tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff (P) y el segundo tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff (S).

El tensor de Kirchhoff (τ) mide el esfuerzo interno en un sólido deformado. A diferencia del tensor de Cauchy, que se refiere a tensiones en la configuración deformada, el tensor de Kirchhoff incluye los efectos volumétricos de la deformación. Se define mediante la siguiente ecuación.

$$\tau = J\sigma \quad (27)$$

Siendo J la matriz Jacobiana definida por la ecuación.

$$J = \det(F) \quad (28)$$

El primer tensor de Piola-Kirchhoff que es un tensor mixto que relaciona la configuración inicial (no deformada) con las tensiones en la configuración deformada. Este se define con la ecuación.

$$P = J\sigma \cdot F^{-T} \quad (29)$$

Finalmente, el segundo tensor de Piola-Kirchhoff, es un tensor ordinario simétrico que permite

plantear el problema elástico sobre la configuración inicial. Este se usa para describir las tensiones en la configuración de referencia en términos del tensor de tensiones de Cauchy y se define como.

$$S = F^{-1} \cdot J \sigma \cdot F^{-T} \quad (30)$$

La respuesta del material se define usando el modelo material de Saint-Venant-Kirchhoff que es un modelo constitutivo Hiperelástico. Este es esencialmente una extensión de las leyes elásticas (ley de Hooke) adaptado para grandes deformaciones en donde se reemplaza el esfuerzo por el segundo tensor Piola-Kirchhoff y la deformación lineal por el tensor deformación de Green-Lagrange resultando en la ecuación.

$$S = C : E_g \quad (31)$$

Finalmente, en el modelo material de Saint-Venant-Kirchhoff la función de energía potencial de deformación elástica está dada por la ecuación.

$$W = \frac{1}{2} E_g : S \quad (32)$$

3.4 FEM elástico Lineal

Para abordar un análisis por elementos finitos (FEA) en elasticidad lineal, es esencial tener en cuenta las relaciones previamente establecidas, ya que conforman las ecuaciones fundamentales del problema: las ecuaciones de equilibrio, las de compatibilidad, las constitutivas, y las condiciones de contorno (BC). A continuación, se describen cada una de ellas.

$$\text{Equilibrio: } \nabla \cdot \sigma + b = 0 \quad (33)$$

$$\text{Compatibilidad: } \{\varepsilon\} = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla^T u) \quad (34)$$

$$\text{Constitutiva: } [\sigma] = [C] \{\varepsilon\} \quad (35)$$

$$\text{BC - Newman: } [\sigma] \cdot \{n\} = \{t_0\} \in \partial\Omega_\sigma \quad (36)$$

$$\text{BC - Dirichlet: } \{u\} = \{u_0\} \in \partial\Omega_\sigma \quad (37)$$

Estas ecuaciones y condiciones se combinan en el marco del FEM para obtener soluciones aproximadas a los problemas en elasticidad.

3.4.1 *Formulación variacional del FEM*

El planteamiento variacional del FEM en la mecánica de sólidos deformables se fundamenta en el principio de Hamilton o el principio de mínima energía potencial. Este establece que un sistema dinámico seguirá un trayecto tal que la acción sea estacionaria. En este contexto, la acción se define como la integral del Lagrangiano a lo largo del tiempo entre dos puntos dados. El Lagrangiano, por su parte, es la función que describe la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial del sistema.

En un problema estático, el principio se adapta para encontrar la configuración de equilibrio del sistema, es decir, la posición en la que las fuerzas y momentos netos son nulos. En este caso, se trabaja con la energía potencial almacenada en el sistema, y la condición de equilibrio se expresa como la anulación de la derivada de la energía potencial total con respecto a las coordenadas generalizadas. Esto conduce a las ecuaciones de equilibrio, que son ecuaciones diferenciales parciales que determinan las posiciones de equilibrio.

Para un cuerpo elástico, la energía potencial total (Π_p) se define como la diferencia de la energía de deformación interna del cuerpo (Π) y la energía potencial de las fuerzas externas (W). La formulación se desarrolla a partir de la ecuación:

$$\Pi_p(u, v, w) = \Pi(u, v, w) - W(u, v, w) \quad (38)$$

Considerando que el cuerpo elástico soporta un conjunto de cargas conservativas, siendo su volumen Ω y su área superficial Γ . La expresión de la energía potencial total es:

$$\begin{aligned} \Pi_p = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \{\epsilon\}^T [C] \{\epsilon\} - \{\epsilon\}^T [C] \{\epsilon_0\} + \{\epsilon\}^T \{\sigma_0\} \right) d\Omega \\ - \int_{\Omega} \{u\}^T \{b\} d\Omega - \int_{\Gamma} \{u\}^T \{t\} d\Gamma - \{U\}^T \{P\} \end{aligned} \quad (39)$$

3.4.2 Formulación matricial del problema

El FEM se desarrolla partiendo de la energía potencial total en un cuerpo elástico lineal, que sigue la ecuación:

$$\begin{aligned} \Pi_p = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \{\epsilon\}^T [C] \{\epsilon\} - \{\epsilon\}^T [C] \{\epsilon_0\} + \{\epsilon\}^T \{\sigma_0\} \right) d\Omega \\ - \int_{\Omega} \{u\}^T \{b\} d\Omega - \int_{\Gamma} \{u\}^T \{t\} d\Gamma - \{U\}^T \{P\} \end{aligned} \quad (40)$$

Considerando la discretización del dominio en un conjunto de FE. La energía potencial total puede calcularse a partir de la energía asociada a cada elemento finito de la forma.

$$\begin{aligned} \Pi_p = \sum_{e=1}^{ne} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \{\epsilon\}^T [C] \{\epsilon\} d\Omega - \sum_{e=1}^{ne} \int_{\Omega} \{\epsilon\}^T [C] \{\epsilon_0\} d\Omega + \sum_{e=1}^{ne} \int_{\Omega} \{\epsilon\}^T \{\sigma_0\} d\Omega \\ - \sum_{e=1}^{ne} \int_{\Omega} \{u\}^T \{b\} d\Omega - \sum_{e=1}^{ne} \int_{\Gamma} \{u\}^T \{t\} d\Gamma - \{U\}^T \{P\} \end{aligned} \quad (41)$$

Considerando que la expresión que define las deformaciones es posible reescribirla de forma simplificada como:

$$\{\epsilon\} = [L]\{u\} = [L][N]\{u^e\} = [B_L]\{u^e\} \quad (42)$$

Siendo $[B_L]$ la matriz de derivadas de funciones de forma, $[N]$ la matriz de funciones de forma (desarrolladas con elementos isoparamétricos) y $[L]$ un operador diferencial de la forma.

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (43)$$

Sustituyendo esta expresión en cada uno de los términos que componen la expresión del funcional de energía potencial total, se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} \frac{1}{2} \{\epsilon\}^T [C] \{\epsilon\} d\Omega &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} ([B_L]\{u^e\})^T [C] ([B_L]\{u^e\}) d\Omega \\ &= \frac{1}{2} \{u^e\}^T \left[\int_{\Omega_e} [B_L]^T [C] [B_L] d\Omega \right] \{u^e\} = \frac{1}{2} \{u^e\}^T [K^e] \{u^e\} \end{aligned} \quad (44)$$

Siendo:

$$\int_{\Omega_e} \{\epsilon\}^T [C] \{\epsilon_0\} d\Omega = \{u^e\}^T \left[\int_{\Omega_e} [B_L]^T [C] [\epsilon_0] d\Omega \right] = \{u^e\}^T f_{\epsilon_0}^e \quad (45)$$

$$\int_{\Omega_e} \{\epsilon\}^T \{\sigma_0\} d\Omega = \{u^e\}^T \left[\int_{\Omega_e} [B_L]^T \{\sigma_0\} d\Omega \right] = \{u^e\}^T f_{\sigma_0}^e \quad (46)$$

$$\int_{\Omega_e} \{u\}^T \{b\} d\Omega = \{u^e\}^T \left[\int_{\Omega_e} [N]^T \{b\} d\Omega \right] = \{u^e\}^T f_b^e \quad (47)$$

$$\int_{\Gamma_e} \{u\}^T \{t\} d\Gamma = \{u^e\}^T \left[\int_{\Omega_e} [N]^T \{t\} d\Gamma \right] = \{u^e\}^T f_t^e \quad (48)$$

La expresión de la energía potencial total del sistema puede presentarse de forma simplificada con la ecuación:

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{ne} \{u^e\}^T [K^e] \{u^e\} - \sum_{e=1}^{ne} \{u^e\}^T \{f^e\} - \{U\}^T \{P\} \quad (49)$$

Las sumatorias ($\sum_{e=1}^{ne}$) representan el ensamblado de matrices de elemento por la adición de cada cada valor con respecto a la numeración de los grados de libertad globales. Finalmente aplicando la condición estacionaria de la energía potencial total, se obtiene la expresión.

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial U} = 0 \rightarrow [K] \{u\} = \{f\} \quad (50)$$

3.5 FEM elástico no-lineal geométrico

El método de elementos finitos no lineal geométrico (NLFEM) es fundamental para el estudio de estructuras sujetas a grandes deformaciones. En esta investigación, se adopta una formulación Lagrangiana para capturar estos efectos con mayor precisión. En NLFEM, varias ecuaciones del modelo requieren modificaciones, siendo el ajuste más significativo el de la ecuación de equilibrio, que se expresa como:

$$F_{ext} - F_{int} = 0 \quad (51)$$

donde F_{ext} representa las fuerzas externas aplicadas sobre la estructura y F_{int} las fuerzas internas derivadas de los esfuerzos en la configuración actual. En términos generales, la condición de equilibrio debe cumplirse en todo momento, tanto en análisis estáticos como dinámicos, lo que implica que la variable temporal t puede tomar cualquier valor desde el inicio hasta el instante final del estudio. Sin embargo, en un análisis estático donde no se consideran efectos temporales más allá de la definición del nivel de carga, el tiempo t actúa únicamente como un parámetro que representa

diferentes pasos de carga y, por ende, distintas configuraciones estructurales. Como consecuencia, la formulación del modelo de NLFEM se rige por el siguiente conjunto de ecuaciones.

$$\text{Equilibrio: } F_{ext} - F_{int} = 0 \quad (52)$$

$$\text{Compatibilidad (Green-Lagrange): } \{E_g\} = \frac{1}{2}(C_c - I) \quad (53)$$

$$\text{Compatibilidad (Euler-Almansi): } \{E_e\} = \frac{1}{2}(I - B^{-1}) \quad (54)$$

$$\text{Constitutiva: } [\sigma] = [C] \{E\} \quad (55)$$

$$\text{B.C. - Newman: } [\sigma] \cdot \{n\} = \{t_0\} \in \partial\Omega_\sigma \quad (56)$$

$$\text{B.C. - Dirichlet: } \{u\} = \{u_0\} \in \partial\Omega_\sigma \quad (57)$$

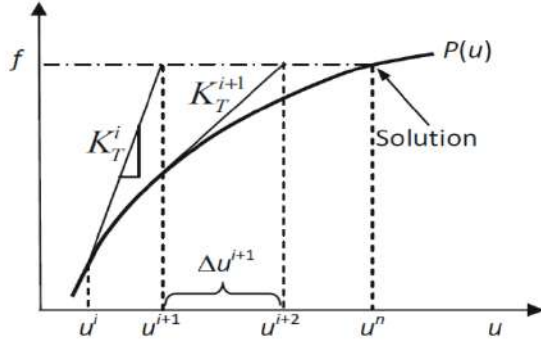
3.5.1 El método de Newton-Raphson

El principal desafío en la formulación del NLFEM es la resolución de las ecuaciones no lineales que describen el comportamiento mecánico de la estructura. La rigidez varía a lo largo del proceso de carga, y el camino hacia el equilibrio puede ser estable o inestable. Para abordar esta complejidad, se emplea el método de Newton-Raphson, el cual ofrece una convergencia rápida, siempre que la estimación inicial se encuentre dentro de la zona de atracción y no se produzca divergencia.

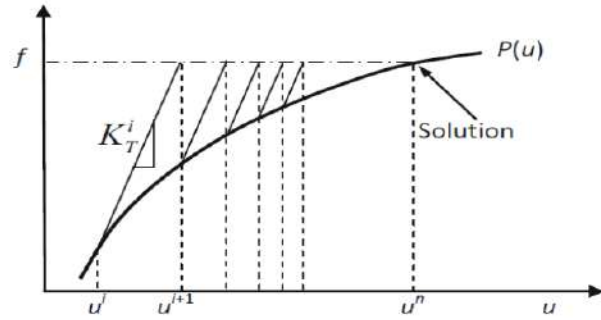
Este método consiste en aproximar la solución mediante iteraciones sucesivas, en las cuales se ajusta una recta tangente a la curva de la función en un punto dado. La intersección de esta recta con el eje x se toma como la nueva estimación de la raíz, refinándose en cada iteración hasta alcanzar una solución satisfactoria. En este contexto, la función representa la relación Fuerza-Desplazamiento. La figura 19 presenta un esquema simplificado que ilustra el funcionamiento del método de Newton-Raphson y su abordaje en tres enfoques distintos.

Figura 19

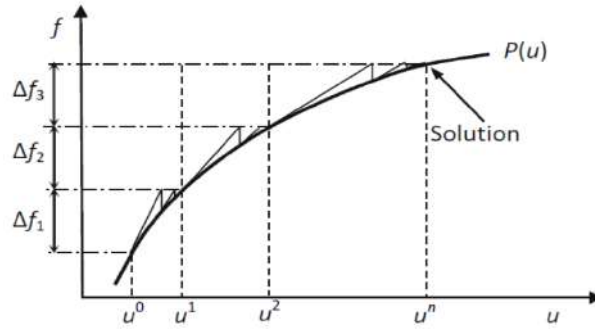
Método de Newton-Raphson y sus respectivas variaciones.



(a) Esquema de iteración del método de Newton-Raphson clásico



(b) Esquema de iteración del método de Newton-Raphson modificado



(c) Esquema de iteración del método de Newton-Raphson incremental

Dentro de las variaciones presentadas, las que son frecuentemente usadas son el enfoque clásico que en este contexto es usado en una formulación Lagrangiana total y el enfoque incremental corresponde a la formulación Lagrangiana Incremental, en esta investigación no se abordó el enfoque modificado (ver Figura 19). Para la aplicación del método de Newton-Raphson, se define la función de búsqueda (Ψ) que corresponde a un vector de desequilibrio mecánico definido como.

$$\Psi = \Psi(u) = P(u) - F \quad (58)$$

Siendo P y F el vector de cargas internas y externas respectivamente. El método numérico parte configuración inicial del sistema.

$$u_n = 0 \quad (59)$$

Adicionalmente, se debe definir un paso incremental para la carga externa en donde.

$$P = \sum_{i=1}^n \Delta P_i \quad (60)$$

Considerando que el vector de fuerzas internas P se obtiene con la expresión.

$$P = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_e} [B]^T \{\sigma\} d\Omega \quad (61)$$

El Newton-Raphson comienza barriendo los i-incrementos de carga e internamente se abordan las k-iteraciones del criterio de convergencia. El proceso comienza con la estimación inicial del desplazamiento para el incremento actual u_i^k (usualmente se usa el desplazamiento obtenido del incremento de carga anterior). Posteriormente se calcula la fuerza interna basada en la estimación actual de los desplazamientos (P_i^k) seguido del vector de disequilibrio mecánico (Ψ). Luego se obtiene la matriz de rigidez tangente (K_T) calculado con la expresión.

$$K_T = \frac{\partial \Psi}{\partial u} \quad (62)$$

Al resolver el sistema lineal se obtiene la corrección definida como.

$$\Delta u = K_T^{-1} \Psi \quad (63)$$

Finalmente se actualiza los desplazamientos para el respectivo estado de cargas usando la expresión

$$u_i^{k+1} = u_i^k + \Delta u \quad (64)$$

Este procedimiento se repite hasta lograr un aceptable grado de precisión. Para esto, se verifica si $|\Psi|$ es menor que un umbral de tolerancia predefinido. Si se cumple esta condición, se considera que el ciclo ha convergido y se avanza al siguiente incremento de carga. En caso contrario, se repite la iteración. Para el cálculo de la matriz de rigidez, se decidió utilizar la linealización presentada por Bathe (Bathe, 2006), donde se establece que.

$$[K] = [K_{mat}] + [K_{geo}] \quad (65)$$

Siendo K_{mat} la matriz de rigidez material y K_{geo} la matriz de rigidez geométrica. La rigidez material relaciona los incrementos de las fuerzas nodales con el incremento de los desplazamientos debido a la respuesta del material. La forma de la rigidez material es idéntica a la matriz de rigidez en la formulación lineal elástica del FEM. Por otro lado, La rigidez geométrica considera el estado actual de esfuerzos y los efectos geométricos de la deformación (incluyendo rotación y alargamiento), esta también es llamada matriz de esfuerzo inicial.

$$K_{mat} = \int_{\Omega} [\hat{B}]^T [C] [\hat{B}] d\Omega \quad (66)$$

$$K_{geo} = I \int_{\Omega} [H]^T [S] [H] d\Omega \quad (67)$$

3.5.2 Formulación Lagrangiana total

La Formulación Lagrangiana Total se basa en el sistema de referencia original, es decir, todas las variables y ecuaciones se describen en función de la configuración inicial o de referencia del cuerpo. Esto significa que las posiciones, deformaciones y tensiones se expresan respecto a la configuración no deformada. Para abordar esta formulación con el método de Newton-Raphson, se requieren los tensores F , C_c , E_g y S definidos en secciones anteriores. Por otro lado, para el cálculo de la matriz de rigidez material y geométrica requieren definir $\hat{B}$, H y S siendo.

$$[\hat{B}] = [B_L] + [B_{NL}] \quad (68)$$

En donde B_L corresponde a la matriz B definida en el FEM elástico lineal, adicionalmente,

$$[H] = \begin{bmatrix} dN_{1,1} & 0 & 0 & dN_{2,1} & 0 & 0 & \cdots & dN_{n,1} & 0 & 0 \\ dN_{1,2} & 0 & 0 & dN_{2,2} & 0 & 0 & \cdots & dN_{n,2} & 0 & 0 \\ dN_{1,3} & 0 & 0 & dN_{2,3} & 0 & 0 & \cdots & dN_{n,3} & 0 & 0 \\ 0 & dN_{1,1} & 0 & 0 & dN_{2,1} & 0 & \cdots & 0 & dN_{n,1} & 0 \\ 0 & dN_{1,2} & 0 & 0 & dN_{2,2} & 0 & \cdots & 0 & dN_{n,2} & 0 \\ 0 & dN_{1,3} & 0 & 0 & dN_{2,3} & 0 & \cdots & 0 & dN_{n,3} & 0 \\ 0 & 0 & dN_{1,1} & 0 & 0 & dN_{2,1} & \cdots & 0 & 0 & dN_{n,1} \\ 0 & 0 & dN_{1,2} & 0 & 0 & dN_{2,2} & \cdots & 0 & 0 & dN_{n,2} \\ 0 & 0 & dN_{1,3} & 0 & 0 & dN_{2,3} & \cdots & 0 & 0 & dN_{n,3} \end{bmatrix} \quad (69)$$

$$[B_{NL}] = \begin{bmatrix} F_{1,1}dN_{1,1} & F_{2,1}dN_{1,1} & F_{3,1}dN_{1,1} & \cdots & F_{1,1}dN_{n,1} & F_{2,1}dN_{n,1} & F_{3,1}dN_{n,1} \\ F_{1,2}dN_{1,2} & F_{2,2}dN_{1,2} & F_{3,2}dN_{1,2} & \cdots & F_{1,2}dN_{n,2} & F_{2,2}dN_{n,2} & F_{3,2}dN_{n,2} \\ F_{1,3}dN_{1,3} & F_{2,3}dN_{1,3} & F_{3,3}dN_{1,3} & \cdots & F_{1,3}dN_{n,3} & F_{2,3}dN_{n,3} & F_{3,3}dN_{n,3} \\ (F_{1,1}dN_{1,2} & (F_{2,1}dN_{1,2} & (F_{3,1}dN_{1,2} & \cdots & (F_{1,1}dN_{n,2} & (F_{2,1}dN_{n,2} & (F_{3,1}dN_{n,2} \\ +F_{1,2}dN_{1,1}) & +F_{2,2}dN_{1,1}) & +F_{3,2}dN_{1,1}) & & +F_{1,2}dN_{n,1}) & +F_{2,2}dN_{n,1}) & +F_{3,2}dN_{n,1}) \\ (F_{1,3}dN_{1,2} & (F_{2,3}dN_{1,2} & (F_{3,3}dN_{1,2} & \cdots & (F_{1,3}dN_{n,2} & (F_{2,3}dN_{n,2} & (F_{3,3}dN_{n,2} \\ +F_{1,2}dN_{1,3}) & +F_{2,2}dN_{1,3}) & +F_{3,2}dN_{1,3}) & & +F_{1,2}dN_{n,3}) & +F_{2,2}dN_{n,3}) & +F_{3,2}dN_{n,3}) \\ (F_{1,3}dN_{1,1} & (F_{2,3}dN_{1,1} & (F_{3,3}dN_{1,1} & \cdots & (F_{1,3}dN_{n,1} & (F_{3,3}dN_{n,1} & (F_{3,3}dN_{n,1} \\ +F_{1,1}dN_{1,3}) & +F_{2,1}dN_{1,3}) & +F_{3,1}dN_{1,3}) & & +F_{1,1}dN_{n,3}) & +F_{3,1}dN_{n,3}) & +F_{3,1}dN_{n,3}) \end{bmatrix} \quad (70)$$

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{1,1} & S_{1,2} & S_{1,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{1,2} & S_{2,2} & S_{2,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{1,3} & S_{2,3} & S_{3,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{1,1} & S_{1,2} & S_{1,3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{1,2} & S_{2,2} & S_{2,3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{1,3} & S_{2,3} & S_{3,3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{1,1} & S_{1,2} & S_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{1,2} & S_{2,2} & S_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{1,3} & S_{2,3} & S_{3,3} \end{bmatrix} \quad (71)$$

3.5.3 Formulación Lagrangiana actualizada

En la Formulación Lagrangiana Actualizada, el Newton-Raphson se hace de forma incremental (varios pasos de carga) en donde el sistema de referencia se actualiza continuamente. Las variables y ecuaciones se describen respecto a la configuración deformada en el último paso de la iteración, es decir, se trabaja en la configuración actual del cuerpo en cada paso del análisis. Para abordar esta formulación con el método de Newton-Raphson, se requieren los tensores F , B_{izq} , E_e y σ . Al igual que en la formulación anterior, para el calculo de la matriz de rigidez material y geométrica requieren definir $\hat{B}$, H y S_σ . $\hat{B}$ corresponde a la matriz B definida en el FEM elástico lineal, B_{NL} es la misma presentada en la formulación Lagrangiana total y por último S_σ .

$$[S_\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{1,1} & \sigma_{1,2} & \sigma_{1,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{1,2} & \sigma_{2,2} & \sigma_{2,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{1,3} & \sigma_{2,3} & \sigma_{3,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{1,1} & \sigma_{1,2} & \sigma_{1,3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{1,2} & \sigma_{2,2} & \sigma_{2,3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{1,3} & \sigma_{2,3} & \sigma_{3,3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{1,1} & \sigma_{1,2} & \sigma_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{1,2} & \sigma_{2,2} & \sigma_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{1,3} & \sigma_{2,3} & \sigma_{3,3} \end{bmatrix} \quad (72)$$

La matriz S_σ sería similar a la presentara en la formulación Lagrangiana total con la diferencia que esta obtiene los esfuerzos de Cauchy.

3.6 Código numérico desarrollado en FORTRAN

El código desarrollado en FORTRAN para realizar FEA lineal y no lineal geométrico (ver Figuras 20 y 21) está estructurado de manera modular. Cada módulo agrupa subrutinas, funciones y variables específicas orientadas a la ejecución de distintos procedimientos. La arquitectura inicia con un módulo base que contiene las funciones esenciales para el análisis, seguido de un módulo dedicado al desarrollo del método de elementos finitos (FEM), en el cual se implementan todas las subrutinas necesarias para los cálculos presentados en este capítulo. Finalmente, se incorpora un módulo de postprocesado, que genera archivos en formato EnSight (Computational Engineering International, 2023) para la visualización de los resultados.

El programa soporta análisis en dos y tres dimensiones y es compatible con diferentes tipos de elementos finitos (incluyendo Tria3, Tria6, Quad4, Quad8, Tetra4, Tetra10, Hexa8 y Hexa20). Inicialmente, el sistema de ecuaciones se resolvía mediante las librerías BLAS y LAPACK en su versión optimizada. Sin embargo, para mejorar la eficiencia en el uso de memoria y reducir el tiempo de cómputo, el sistema fue reformulado como un sistema disperso. Para ello, se desarrolló un módulo adicional que, mediante una estructura de tipo INTERFACE, integra las rutinas de las

librerías HSL-MA87 y HSL-MA86 (HSL, 2023), encargadas de la resolución del sistema mediante factorización de Cholesky dispersa y factorización directa dispersa respectivamente.

Las Figuras 20 y 21 presentan los diagramas de flujo correspondientes al desarrollo del FEM bajo los supuestos de elasticidad lineal y elasticidad geométricamente no lineal, respectivamente. El código completo se encuentra disponible en repositorios de GitHub (Guevara-Corzo, 2024c,a).

Figura 20

Diagrama de flujo del proceso de FEM en elasticidad lineal

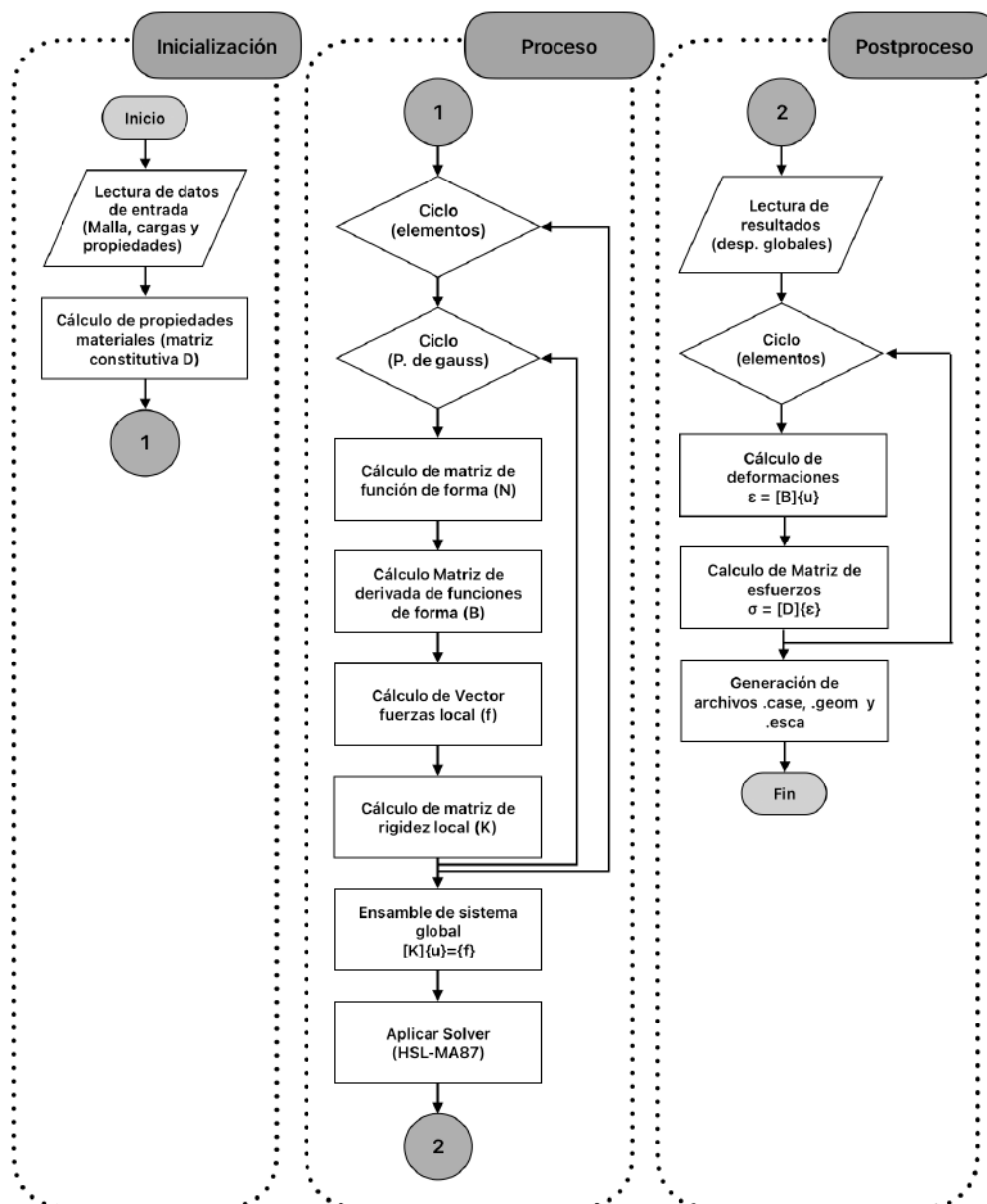
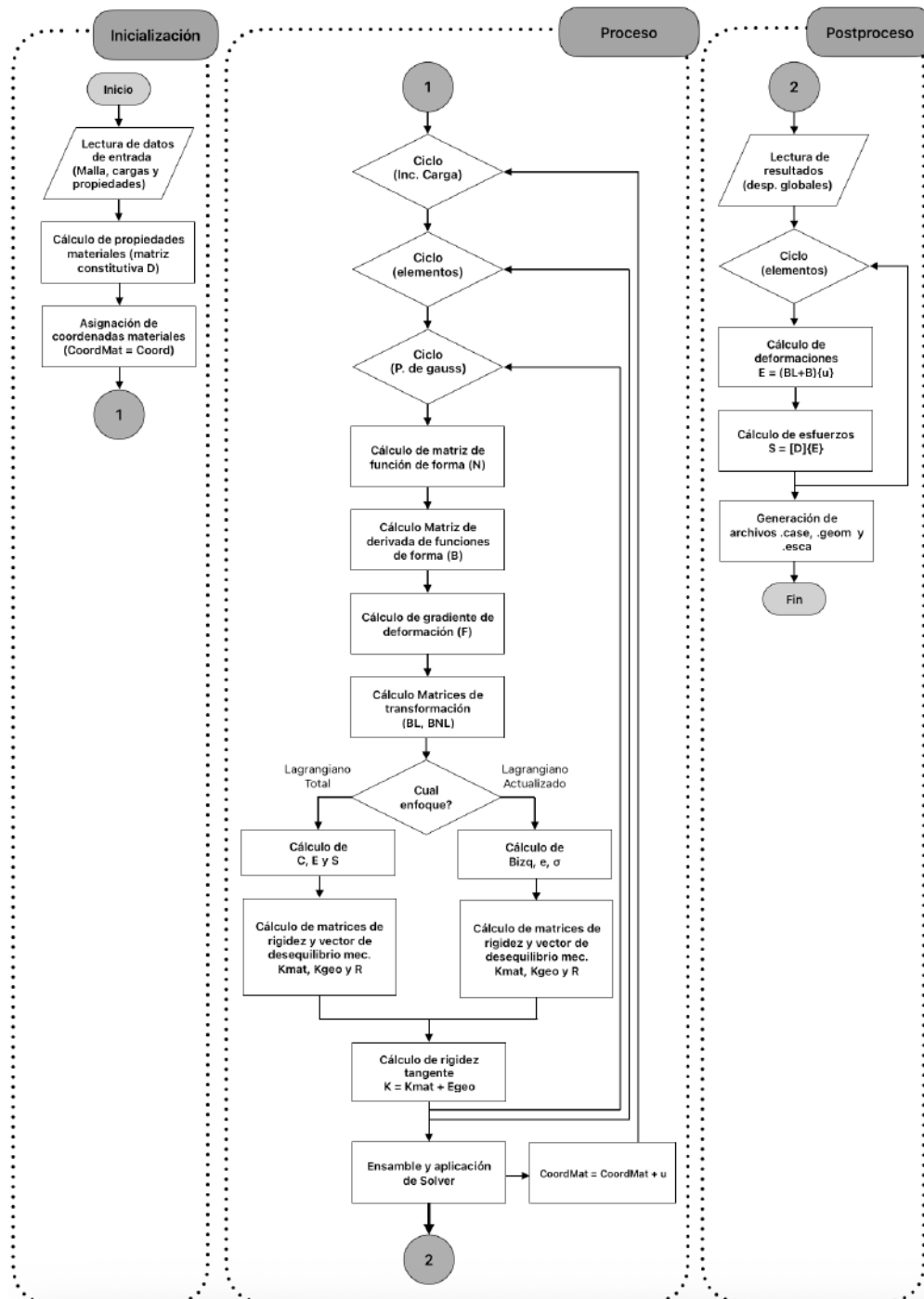


Figura 21

Diagrama de flujo del proceso de FEM en elasticidad con no linealidad geométrica



3.6.1 *Librerías y dependencias*

En el desarrollo del código se usaron las librerías BLAS (Basic Linear Algebra Subprograms) (Blackford et al., 2002), LAPACK (Linear Algebra Package) (Anderson et al., 1999), OpenMP (Open Multi-processing) (Chandra et al., 2001), METIS (Karypis, 2011) y los códigos para resolver sistemas dispersos MA86 y MA87 de HSL (Harwell Subroutine Library) (HSL, 2023) administradas por el Science and Technology Facilities Council (STFC) del Reino Unido (usados con autorización y únicamente con propósitos académicos). Se usó CMAKE (Kitware, Inc., 2023) y el compilador GNU Fortran (Gfortran) (GNU Project, 2024) y finalmente para la visualización de los resultados se optó por usar el programa de código abierto ParaView (Ayachit, 2005).

4 Optimización topológica

Este capítulo introduce el concepto de optimización como un proceso matemático para identificar la mejor solución (minimizando o maximizando un objetivo) en un espacio de búsqueda, sujeta a restricciones específicas. Se exploran las diversas clasificaciones de problemas de optimización según sus características, como la naturaleza de algoritmo y la función objetivo (OF), específicamente el tipo de modelo de la función objetivo (mono-objetivo o multi-objetivo).

El capítulo se centra en la optimización topológica (TO), una rama de la optimización estructural que busca determinar la distribución óptima de material dentro de un dominio de diseño para cumplir con un conjunto de requisitos funcionales y restricciones. Se describen las metodologías más comunes de OT, como el método ESO/BESO (Evolutionary Structural Optimization y Bidirectional Evolutionary Structural Optimization) y el método de nivel-set (Level Set Method) y se profundiza en el método de densidad de la penalización SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization). Se presentará el planteamiento matemático general de un problema de TO, incluyendo su función objetivo, restricciones de desigualdad y la necesidad de introducir la sensibilidad en el proceso de optimización para guiar la redistribución del material.

Finalmente, el capítulo abordará la optimización topológica lineal y no lineal geométrica, destacando la importancia de considerar los efectos de no linealidad geométrica en las estructuras. Se discutirán las técnicas para incorporar estos efectos en el proceso de TO y se presentarán ejemplos para ilustrar (y validar) la diferencia entre las optimizaciones lineal y no lineal, mostrando cómo el comportamiento no lineal puede influir sustancialmente en la topología final de la estructura optimizada.

4.1 Concepto de optimización

Matemáticamente, el problema de optimización puede ser presentado de la forma:

$$\text{Función obj.: } \text{Min} \rightarrow F(x) = z \quad (73)$$

Sujeto a

$$\text{Espacio de Búsqueda: } x_i^L < x_i < x_i^U \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (74)$$

$$\text{Rest. Fun. Igualdad: } h_k(x_i) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (75)$$

$$\text{Rest. Fun. Desigualdad: } g_j(x_i) \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (76)$$

Siendo, x_i las variables de búsqueda, $F(x_i)$ la OF, $g_j(x_i)$ las funciones de desigualdad, $h_k(x_i)$ las funciones de igualdad, x_i^L el limite inferior de búsqueda y x_i^U el limite superior de búsqueda. Los algoritmos de optimización se dividen en dos grandes categorías: los algoritmos clásicos, también conocidos como técnicas determinísticas, y los algoritmos heurísticos (ver Figura 22), o técnicas estocásticas (probabilísticas o aproximadas) (López, 2013). Los algoritmos clásicos se basan en fundamentos matemáticos rigurosos, lo que les permite encontrar soluciones óptimas de manera rápida y eficiente en problemas bien definidos. Sin embargo, su principal limitación es la tendencia a converger en óptimos locales, especialmente cuando se enfrentan a funciones objetivo complejas con múltiples mínimos o máximos.

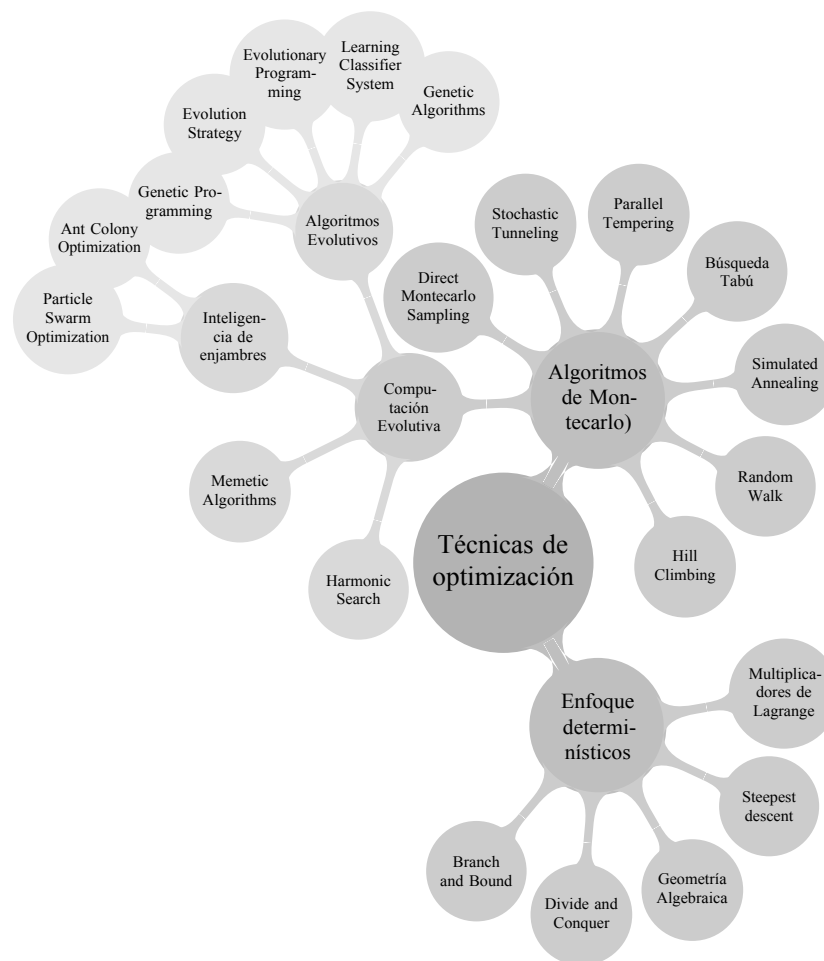
Por otro lado, los algoritmos heurísticos emplean componentes estocásticos que les permiten explorar el espacio de soluciones de forma más amplia y diversa. A diferencia de los métodos clásicos, no derivan de un análisis matemático formal, sino que están inspirados en principios empíricos o en el conocimiento del problema. Estas técnicas suelen proporcionar soluciones factibles y cercanas al óptimo, aunque no garantizan su convergencia al óptimo global. En este contexto, una solución heurística se define como aquella que se presume satisfactoria en términos de factibilidad y optimalidad, sin precisar de manera exacta el grado alcanzado de estas características.

Muchos algoritmos heurísticos se inspiran en fenómenos naturales, como el comportamiento colectivo de enjambres (por ejemplo, el algoritmo de optimización por enjambre de partículas, PSO (Kennedy y Eberhart, 1995)), la recombinación genética (algoritmos genéticos (Holland, 1975)) o el proceso físico de enfriamiento de metales (temple simulado (Kirkpatrick et al., 1983)). Estas

técnicas, aunque más versátiles y diseñadas para abordar una amplia variedad de problemas, destacan por su facilidad de implementación y capacidad de paralelización. Sin embargo, suelen implicar un mayor costo computacional en comparación con los métodos clásicos. Este mayor requerimiento de recursos puede hacer que su uso sea poco práctico en ciertos escenarios donde las limitaciones de hardware o tiempo de cómputo son significativas.

Figura 22

Taxonomía general de las principales técnicas de optimización existentes



Fuente: adaptado de López (2013)

En este contexto, el término *evolutivo*, presente en el título de esta investigación, puede inducir a confusión debido a las diversas connotaciones que adquiere según el ámbito en el que se

utilice. Frecuentemente, se asocia con los algoritmos evolutivos, que son métodos de optimización heurística inspirados en procesos biológicos como la selección natural, el cruce, la mutación y la reproducción (López, 2013). Sin embargo, en el ámbito de la TO, el término *evolutivo* adopta un significado distinto. En este trabajo, hace referencia a un proceso incremental y gradual en el que la topología de la estructura optimizada se modifica de manera progresiva y adaptativa, pero sin involucrar las operaciones clásicas de cruce o mutación propias de los algoritmos evolutivos tradicionales. Este enfoque enfatiza una evolución estructural basada en la mejora continua de la distribución de material, más que en la adaptación biológica asociada con los algoritmos evolutivos convencionales, esto se va abordar con profundidad en la sección 4.3 y 4.4.

4.2 Enfoques de optimización multiobjetivo

La optimización con un único objetivo presenta limitaciones importantes, ya que puede ignorar variables y aspectos relevantes, lo que restringe su aplicabilidad en problemas con alta complejidad o cercanos a situaciones reales. Para superar estas limitaciones, es esencial considerar la optimización multiobjetivo.

La optimización multiobjetivo generalmente se aborda desde dos enfoques. El primero implica explorar y analizar todo el espacio de búsqueda disponible, enfocándose en identificar un conjunto de soluciones no dominadas o no inferiores. Estas soluciones se caracterizan porque una mejora en un objetivo implica necesariamente una degradación en otro. Este enfoque permite obtener una visión más detallada del comportamiento de las soluciones a lo largo de las distintas funciones objetivo, representado gráficamente por el frente de Pareto. Al adoptar este enfoque, el planteamiento inicial se transforma, lo que permite una mejor comprensión y manejo de las múltiples metas involucradas, este enfoque de optimización puede ser presentado de la forma:

$$\min \rightarrow F(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)] \quad (77)$$

Sujeto a

$$\text{Espacio de Búsqueda: } x_i^L < x_i < x_i^U \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (78)$$

$$\text{Rest. Fun. Igualdad: } h_k(x_i) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (79)$$

$$\text{Rest. Fun. Desigualdad: } g_j(x_i) \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (80)$$

Siendo $F(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)]$ el vector con las n-funciones objetivo a optimizar. Este enfoque de optimización permite que, al finalizar el proceso, el usuario no obtenga una única solución, sino un conjunto igualmente válido y óptimo de posibles alternativas, permitiéndole seleccionar la más adecuada según sus necesidades. Sin embargo, esta metodología conlleva un elevado costo computacional, lo que limita considerablemente su aplicación en problemas de gran escala. Aunque ha demostrado ser efectiva en algunos casos, como en la optimización de estructuras tipo armadura (Niño-Álvarez et al., 2022), pero su implementación en estructuras más complejas no es recomendable debido al aumento considerable de los costos computacionales (tiempos de computo) (Tabatabaei et al., 2015; Mokarram y Banan, 2018; Mores et al., 2023).

Por otro lado, existe un enfoque práctico para la optimización multiobjetivo que consiste en reducir la dimensionalidad del problema mediante la asignación de un peso relativo a cada OF. Este método utiliza un vector de pesos que representa la contribución relativa de cada OF en el proceso de optimización. Al aplicar esta técnica, el problema de múltiples objetivos se transforma en un solo objetivo equivalente, lo que simplifica la tarea de optimización. Este procedimiento se puede formular como sigue:

$$\min \rightarrow F_e(x) = [f_i][w_i] = w_1 f_1(x) + w_2 f_2(x) + \dots + w_n f_n(x) \quad (81)$$

Sujeto a.

$$\text{Espacio de Búsqueda: } x_i^L < x_i < x_i^U \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (82)$$

$$\text{Rest. Fun. Igualdad: } h_k(x_i) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (83)$$

$$\text{Rest. Fun. Desigualdad: } g_j(x_i) \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (84)$$

donde F_e es la OF equivalente, $[f_i]$ es el vector de OFs y $[w_i]$ es el vector de pesos. Aunque este enfoque de optimización multiobjetivo es ligeramente restrictivo, ha demostrado ser una alternativa eficaz en el diseño de estructuras sometidas a múltiples estados de carga. Autores como Bendsøe y Sigmund (2004) han utilizado con éxito este método para la generación de estructuras mediante optimización topológica bajo diferentes condiciones de carga. Además, este enfoque permite la aplicación de los algoritmos previamente discutidos. Sin embargo, presenta una limitación clave: la selección del vector de pesos, que depende de las características específicas del problema y de las necesidades del usuario.

Los algoritmos mencionados (ver Figura 22) han sido implementados con éxito en procesos de TO y estructural por autores como Millán Páramo (2013, 2020); Niño-Álvarez (2020); Niño-Álvarez et al. (2022). No obstante, su eficacia disminuye en problemas con un gran número de variables, ya que, en muchos casos, no logran mejorar significativamente el rendimiento de la estructura obtenida o requieren un mayor tiempo de cómputo. Debido a estas desventajas, los enfoques heurísticos suelen ser menos utilizados en la TO, prefiriéndose algoritmos matemáticamente robustos como el MMA (Method of Moving Asymptotes) (Svanberg, 1987), OC (Optimality Criteria) (Bendsøe y Sigmund, 2004), y GCMMA (Globally Convergent MMA) (Svanberg, 2007), que han demostrado ser más eficientes y ampliamente utilizados en la literatura.

Para esta investigación, se optó por un enfoque multiobjetivo basado en pesos, dado que ofrece un mejor rendimiento computacional al simplificar el proceso de optimización a un único problema condensado, en lugar de múltiples procesos simultáneos, como ocurre con el enfoque de frente de Pareto. Además, se eligió el algoritmo MMA (Svanberg, 1987), desarrollado por Svanberg,

por su eficacia en la resolución de problemas no lineales con múltiples restricciones además de ser un algoritmo popular en los procesos de TO (3992 citaciones entre 2015-2025 en web of science).

4.3 Optimización topológica en elasticidad lineal

La TO es una herramienta computacional que ha ganado popularidad en los últimos años aplicaciones en diversos campos de la ingeniería. Desde su formulación por Bendsøe y Kikuchi (1988), numerosos autores, institutos y empresas la han adoptado como un proceso indispensable en la generación de diseños de alto desempeño. La implementación de este método numérico se ha extendido a distintas ramas de la ingeniería como el diseño de estructuras y materiales (Paulino y Leonel, 2022; Fernandes et al., 2015; Marjani et al., 2018).

Uno de los enfoques de TO más utilizado es el SIMP (*Solid Isotropic Microstructure with Penalization*) (Bendsøe y Kikuchi, 1988; Bendsøe, 1989; Bendsøe y Sigmund, 2004) formulación por Bendsøe y Kikuchi (1988). El método SIMP utiliza una función de penalización para representar la densidad del material en cada elemento finito de la estructura. Esta función varía entre 0 (sin material) y 1 (con material) y puede ser ajustada para controlar la densidad del material en cada elemento. Este enfoque en particular resalta por la flexibilidad y estabilidad durante el proceso de optimización, aunque en modelos complejos puede desarrollar zonas grises (no genera una topología claramente definida). Posteriormente, este método fue refinado por Rozvany et al. (1992); Sigmund (1994, 1995); Bendsøe y Sigmund (2004), generando nuevos enfoques basados en el SIMP como el el SIMPI (*SIMP method with PDE-filtering*), SIMPII (*SIMP method using time-advancing scheme*), SIMPIII (*SIMP method with convolution filter*) (Yago et al., 2022).

Además de SIMP, se desarrollaron técnicas igualmente eficaces, como ESO (*Evolutionary Structural optimization*) y BESO (*Bi-directional Evolutionary Structural Optimizacion*), desarrollados por Xie y Steven (1993); Querin et al. (1998), respectivamente. El BESO, en particular, introduce la característica bidireccional que permite una búsqueda más eficiente de topologías óptimas. Este resalta por su eficiencia y rapidez, sin embargo en modelos complejos, suele llegar a desarrollar islas (sólidos completamente aislados) o tener problemas de estabilidad. De la misma forma que con el SIMP, estos enfoques evolutivos fueron los precursores de nuevos enfoques como el Hard-kill

ESO y Soft-kill BESO presentadas por Zhu et al. (2007); Huang y Xie (2007, 2009, 2010).

Gran parte de los trabajos enfocados en TO emplean alguno de los tres enfoques más consolidados: SIMP, ESO o BESO (Jihong et al., 2021). No obstante, también se han desarrollado métodos alternativos y versátiles, tales como el LSM (*level set method*) (Wei et al., 2018), el MMC (*Moving Morphable Components*) (Zhang et al., 2016), y el VARTOP (*variational topology optimization*) (Yago et al., 2022; Oliver et al., 2019; Yago et al., 2021). Asimismo, existen enfoques basados en algoritmos heurísticos, como el SA o el PSO (Marjani et al., 2018; Garcia-Lopez et al., 2011), y otros más recientes que incorporan el uso de redes neuronales, destacando los trabajos de Sasaki y Igarashi (2019); Sosnovik y Oseledets (2019); Kallioras et al. (2020), por mencionar algunos. El modelo de TO, considerando un sólido en elasticidad lineal, suele formularse como un problema de minimización expresado de la siguiente forma:

$$\text{Función obj.: } \text{Min} \rightarrow C_p(\rho_e) \quad (85)$$

$$\text{Equilibrio: } \left(\sum_{e=1}^N K_e(\rho_e^p) \right) u = f \quad (86)$$

$$\text{Rest. volumen: } \sum_{e=1}^N v_e \rho_e \leq V_{lim} \quad (87)$$

$$\text{Lim. densidades: } 0 < \rho_{min} \leq \rho_e \leq 1 \quad (88)$$

El término $C_p(\rho_e)$ es el *Compliance*, que es una medida de la flexibilidad de la estructura bajo las cargas aplicadas. En términos sencillos, el C_p es la inversa de la rigidez de la estructura: cuanto mayor sea el compliance, mayor será la deformación para una carga dada, lo que indica una estructura más flexible. Matemáticamente, el compliance se define como el trabajo externo realizado por las fuerzas aplicadas para deformar la estructura, y puede expresarse como:

$$C_p = \{F\}^T \{u\} \quad (89)$$

En los procesos de TO, el C_p se utiliza frecuentemente como la OF a minimizar. La razón detrás de esto es que, al minimizar C_p , se maximiza la rigidez de la estructura, ya que una menor C_p , implica menores deformaciones bajo las mismas cargas, lo que resulta en una estructura más rígida. Es importante señalar que, el C_p no está limitado únicamente a una métrica energética, ya que la OF también puede estar vinculada a otros parámetros, como esfuerzos, desplazamientos o características dinámicas del sistema.

4.3.1 *Formulación para un dominio discretizado*

Los procesos de TO se centran en determinar la distribución óptima material en el espacio (discretizado), es decir, determinar qué puntos del espacio deben ser puntos de material y qué puntos deben estar vacíos. Si se considera una representación problema, la estructura corresponde al espacio de búsqueda del problema de optimización. Dado que esta debe ser discretizada por elementos finitos, cada uno de estos píxeles (o vóxeles) corresponde a una variable en la que se debe establecer un estado, sea lleno, vacío o un intermedio entre ambos. Para el problema de optimización descrito anteriormente, se establece una penalización para simular el estado de las variables definido por la ecuación:

$$E = \Omega_{mat} E^0 \quad (90)$$

Siendo E el módulo de elasticidad del material influido por el vector de densidades, Ω_{mat} la densidad del material y E^0 el módulo de elasticidad del material (sin penalizar), en donde.

$$\int_{\Omega} \Omega_{mat} \delta \Omega \leq V \quad (91)$$

Esta ultima desigualdad establece un límite V en la cantidad de material a disposición, de modo que el diseño de mínimo cumplimiento es para un volumen limitado (fijo). En síntesis, el problema de diseño para el dominio fijo se formula como un problema de dimensionamiento, modificando la matriz de rigidez para que dependa continuamente de una función que se interpreta como una densidad de material. Adicionalmente, es necesario que el proceso de TO de lugar a

diseños compuestos casi en su totalidad por regiones con material o vacías. Una forma eficiente de lograr esta distribución es la penalización presentada en el método SIMP propuesto por Bendsøe y Sigmund (2004), haciendo que las ecuaciones necesarias para aplicar un proceso de TO son:

$$\text{Penalización: } E = \rho(x)^p E^0 \quad (92)$$

$$\text{Rest. volumen: } \int_{\Omega} \rho(x) \delta \Omega \leq V_{lim} \quad (93)$$

$$\text{Lim. densidades: } 0 \leq \rho(x) \leq 1, \quad \forall x \in \Omega \quad (94)$$

Siendo ρ el vector de densidades y p el factor de penalización. Se optó por el uso del enfoque SIMP por su facilidad de implantar, la estabilidad del proceso y la penalización que promueve diseños binarios (es decir, elementos que son casi completamente sólido o vacío), en lugar de soluciones grises intermedias. Sin la penalización, es probable que la optimización resulte en elementos con densidades parciales, lo cual no es práctico.

4.3.2 *Análisis de sensibilidad*

El análisis de sensibilidad en los procesos de TO permite evaluar cómo varía la OF frente a pequeñas fluctuaciones en los parámetros de diseño, representados por el vector de densidad. Este análisis es crucial para determinar cómo deben ajustarse las densidades de los elementos a fin de mejorar la eficiencia del diseño.

El procedimiento consiste en formular el problema de diseño como un problema de optimización, donde las variables de diseño influyen directamente en el campo de desplazamientos. Estos desplazamientos están implícitamente definidos por las variables de diseño a través de la ecuación de equilibrio. El análisis de sensibilidad, que es fundamental en este proceso, implica calcular las derivadas de los desplazamientos respecto a las variables de diseño. Para este cálculo, se parte del modelo original:

$$Min \rightarrow C_p(\rho_e) = F^T u \quad (95)$$

Sujeto a.

$$\text{Equilibrio: } \left(\sum_{e=1}^N K_e(\rho_e^p) \right) u = f \quad (96)$$

$$\text{Rest. volumen: } \sum_{e=1}^N v_e \rho_e \leq V_{lim} \quad (97)$$

$$\text{Lim. densidades: } 0 < \rho_{min} \leq \rho_e \leq 1 \quad (98)$$

Un enfoque usado para abordar el análisis de sensibilidad en TO se presenta en los trabajos de Bendsøe y Sigmund (2004). Reescribiendo la función $C_p(\rho_e)$ como una función cero, se obtiene:

$$C_p(\rho_e) = f^T u - \hat{u}^T (K u - f) \quad (99)$$

Donde $\hat{u}$ es cualquier vector real arbitrario. Organizando los terminos, se obtiene:

$$\frac{\partial C_p}{\partial \rho_e} = (f^T - \hat{u}^T K) \frac{\partial u}{\partial \rho_e} - \hat{u}^T \frac{\partial K}{\partial \rho_e} u \quad (100)$$

Considerando el equilibrio del sistema ($f^T - \hat{u}^T K = 0$), la ecuación anterior se puede reescribir de la forma:

$$\frac{\partial C_p}{\partial \rho_e} = -\hat{u}^T \frac{\partial K}{\partial \rho_e} u \quad (101)$$

Finalmente, considerando la forma de penalización establecida inicialmente en el SIMP, es posible reemplazar el termino $\frac{\partial K}{\partial \rho_e}$ y obtener $\frac{\partial C_p}{\partial \rho_e}$ con la expresión:

$$\frac{\partial C_p}{\partial \rho_e} = -p \rho_e^{p-1} u^T K_e u \quad (102)$$

4.3.3 Criterio de optimalidad

Este algoritmo es ampliamente utilizado en procesos de TO y se basa en el método de los multiplicadores de Lagrange. Su principio fundamental consiste en que, dado un diseño y los desplazamientos correspondientes, las variables de diseño (asociadas a cada elemento de una malla de elementos finitos) se actualicen de forma independiente, siguiendo las condiciones necesarias de optimalidad. Retomando la formulación del problema de cumplimiento mínimo basado en el enfoque SIMP, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$Min \rightarrow l(u) \quad u \in U \quad (103)$$

Sujeto a las restricciones.

$$a_E(u, v) = l(v) \quad (104)$$

$$E = \rho(x)^p E^0 \quad (105)$$

$$\int_{\Gamma} \rho(x) \delta \Omega \leq V_{lim} \quad (106)$$

$$\rho_{min} \leq \rho(x) \leq 1, \quad \forall x \in \Omega \quad (107)$$

En el sistema de ecuaciones, se ha definido un límite inferior ρ_{min} (usualmente toma el valor de $\rho_{min} = 10e - 3$) en la densidad para evitar una singularidad en el equilibrio. Usando multiplicadores de Lagrange, $\Lambda, \lambda^-, \lambda^+$, correspondiente a la restricción de fracción de volumen, límite inferior y límite superior de la densidad respectivamente. Las condiciones necesarias para la optimalidad para el dimensionamiento de la variable ρ , son sujetas a condiciones de estacionariedad para la función de Lagrange definida como:

$$L = l(u) - (a_E(u, \bar{u}) - l(\bar{u})) + \Lambda \left(\int_{\Omega} \rho(x) \delta\Omega - V \right) + \int_{\Omega} \lambda^+ (\rho(x) - 1) \delta\Omega + \int_{\Omega} \lambda^- (\rho_{min} - \rho(x)) \delta\Omega \quad (108)$$

Siendo $\bar{u}$ el multiplicador de Lagrange para la condición de equilibrio. Considerando que $\rho > \rho_{min} > 0$, las condiciones de optimalidad respecto a las variaciones del campo de desplazamientos u se expresan como:

$$\frac{\delta E_{ijkl}}{\delta \rho} \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{kl}(u) = \Lambda + \lambda^+ - \lambda^- \quad (109)$$

Con las condiciones de conmutación.

$$\lambda^- \geq 0, \quad \lambda^+ \geq 0, \quad \lambda^- (\rho_{min} - \rho(x)) = 0, \quad \lambda^+ (\rho(x) - 1) = 0 \quad (110)$$

Adicionalmente, considerando para las condiciones intermedias, se puede escribir como.

$$p\rho(x)^{P-1} E_{ijkl}^0 \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{kl}(u) = \Lambda \quad (111)$$

Para esta ecuación, el término del lado izquierdo (similar a la densidad de energía de deformación) es constante e igual a Λ para todas las densidades intermedias. Se trata pues, de una condición que es similar a la condición de diseño totalmente tensionado en el diseño plástico. Como se espera que las áreas con alta energía sean demasiado bajas en rigidez, se propone el siguiente esquema de actualización de tipo punto fijo para la densidad.

$$\rho_{k+} = \begin{bmatrix} \max((1 - \varsigma)\rho_k, \rho_{min}) & si & \rho_k B_k^\eta \leq \max((1 - \varsigma)\rho_k, \rho_{min}) \\ \min((1 - \varsigma)\rho_k, 1) & si & \min((1 - \varsigma)\rho_k, 1) \leq \rho_k B_k^\eta \\ \rho_k B_k^\eta & & \text{de lo contrario} \end{bmatrix} \quad (112)$$

Siendo ρ_k el valor de la variable densidad, k la iteración y β viene dado por la expresión:

$$B_k = \Lambda_k^{-1} p \rho(x)^{p-1} E_{ijkl}^0 \varepsilon_{ij}(u_k) \varepsilon_{kl}(u_k) \quad (113)$$

Aunque el OC es ampliamente utilizado en la implementación de procesos de TO relativamente simples, destacándose por su eficiencia y bajo costo computacional. El OC no es recomendable para la generación de mMM, que es el enfoque principal de esta investigación. En muchos casos, el MMA es preferido por su eficiencia, robustez y capacidad para adaptarse a problemas complejos, así como por su simplicidad en la implementación. Aunque el OC es fundamental para definir los objetivos de diseño y es efectivo en casos sencillos, el MMA ofrece un marco más adecuado para abordar las complejidades de la optimización estructural y topológica en la práctica.

4.3.4 *Método de las asíntotas móviles*

El MMA es algoritmo desarrollado por Svanberg (1987), es una técnica ampliamente utilizada en la optimización topológica y estructural debido a su eficiencia y capacidad para manejar problemas no lineales y no convexos con múltiples restricciones. Se basa en la idea de que las restricciones pueden aproximarse mediante funciones lineales en regiones específicas del espacio de diseño. Estas regiones se denominan asíntotas móviles, y se desplazan a lo largo del proceso de optimización para adaptarse dinámicamente a la solución actual. Su funcionamiento se puede resumir en cuatro pasos técnicos fundamentales:

1. Aproximación local de la OF: En cada iteración, MMA aproxima el problema no lineal original a un problema más simple utilizando un modelo cuadrático local. Esto se logra mediante la aproximación de la OF y las restricciones en torno a la solución actual utilizando expansiones de Taylor de primer orden. El modelo cuadrático proporciona una aproximación eficaz para realizar ajustes en el diseño de manera que se mantenga cerca del comportamiento real del problema dentro de un rango limitado.
2. Generación de soluciones aproximadas: A partir de la aproximación cuadrática, MMA utiliza un algoritmo de optimización lineal para determinar los cambios en las variables de diseño. Estas soluciones aproximadas se calculan resolviendo el modelo cuadrático de forma eficiente,

permitiendo encontrar una mejora en las variables de diseño en cada iteración. Esta es la fase en la que el algoritmo ajusta de forma incremental los parámetros de diseño para optimizar la solución.

3. Control de pasos de optimización: MMA se basa en el concepto de pasos controlados a lo largo de la trayectoria de optimización. Para evitar grandes fluctuaciones, que podrían llevar a caer en óptimos locales, se aplica un control de los pasos de optimización mediante un parámetro llamado factor de movimiento. Este factor regula el tamaño de las modificaciones en cada iteración, asegurando que los pasos sean suficientemente pequeños para mejorar la solución sin perder el control sobre la evolución del diseño.
4. Actualización progresiva de la Solución: MMA es un proceso iterativo en el cual se actualizan progresivamente las variables de diseño, basándose en la aproximación cuadrática local. Cada nueva iteración toma la solución aproximada y la ajusta ligeramente, asegurando que se mueva hacia una solución óptima global. El enfoque gradual y adaptativo del MMA permite explorar el espacio de soluciones de manera más efectiva que los métodos que aplican grandes cambios, lo que ayuda a reducir el riesgo de quedar atrapado en óptimos locales.

El MMA, a pesar de ser un algoritmo muy eficiente para la optimización de problemas no lineales, no garantiza de manera directa evitar caer en óptimos locales. Sin embargo, su diseño y características permiten reducir la probabilidad de quedarse atrapado en óptimos locales en comparación con otros métodos. Algunos aspectos del MMA que contribuyen a evitar óptimos locales:

1. Uso de Aproximaciones Locales y Actualización de Asintotas: En cada iteración, MMA utiliza funciones de aproximación lineales y cuadráticas, pero lo hace de una manera adaptativa y dinámica. Las funciones de aproximación se actualizan en cada paso, lo que permite que el algoritmo explore más profundamente el espacio de soluciones y no quede estancado en soluciones subóptimas. Esta capacidad de actualizar las aproximaciones ayuda a moverse

fuera de los óptimos locales al permitir que las soluciones cambien más rápidamente cuando es necesario.

2. **Movimiento hacia Asintotas:** En lugar de hacer un salto brusco hacia el óptimo en cada paso, MMA realiza un movimiento gradual hacia el óptimo global. Al incorporar el principio de las asíntotas móviles, el método asegura que las aproximaciones sean siempre dirigidas hacia un área prometedora del espacio de diseño, ajustando las soluciones de manera incremental.
3. **Manejo de Restricciones:** MMA tiene un manejo eficiente de las restricciones en su proceso de optimización. Aunque los problemas con muchas restricciones tienen una mayor tendencia a caer en óptimos locales, el enfoque de MMA para tratar las restricciones puede ayudar a mantener el algoritmo dentro de regiones del espacio de diseño que podrían ser más robustas a las soluciones locales.
4. **Iteraciones y Modificación de Variables:** El algoritmo es flexible y permite cambios en las variables de diseño en cada iteración de manera que se reduce la posibilidad de estancarse. MMA evita estar demasiado centrado en una región local durante todo el proceso de optimización al permitir que las variables se ajusten progresivamente.

El desarrollo matemático del MMA se detalla con precisión en los trabajos de Svanberg (1987, 2007). También se encuentra el algoritmo GCMMA (*Globally Convergent Method of Moving Asymptotes*), que es una extensión del MMA, diseñada para abordar problemas de optimización más complejos, incluyendo restricciones no lineales y no convexas. GCMMA introduce una formulación más amplia de las asíntotas móviles, lo que le permite adaptarse a una variedad más amplia de problemas de optimización. Sin embargo, para el caso específico tratado en esta investigación, no se observó una mejora significativa en el desempeño en comparación con el MMA, por lo que resulta más práctico optar por este último. El código del algoritmo está disponible en varios repositorios en línea y fue inicialmente presentado en el lenguaje de programación MATLAB. Para mantener la consistencia con el código desarrollado en esta investigación, se ha adaptado a FORTRAN (Guevara-Corzo, 2024e).

4.3.5 Filtros de densidad

La aplicación del filtro desempeña un papel fundamental en los procesos de TO al suavizar y controlar la distribución de densidades de material en la estructura. En este contexto, el filtrado se utiliza para mejorar la calidad y viabilidad de las soluciones obtenidas, evitando problemas como las mallas grises (donde los elementos presentan densidades intermedias), el problema de *checkerboard* y los patrones de diseño no realizables debido a la resolución de la malla (Bendsøe y Sigmund, 2004).

Para este trabajo, se consideraron dos tipos de filtros: 1) un filtrado radial de sensibilidad, que ha demostrado ser una forma eficiente de garantizar la independencia de la malla al filtrar la información de sensibilidad del problema de optimización (Bendsøe y Sigmund, 2004; Liu y Tovar, 2014; Wu et al., 2021); y 2) un filtrado nodal de densidad, que se utilizó exclusivamente en el desarrollo del proceso de optimización para casos de no linealidad geométrica (Paulino y Leonel, 2022). Este último se presenta como una solución efectiva a la inestabilidad numérica del método de Newton-Raphson, que puede ser provocada por cambios abruptos en la densidad durante los procesos de TO.

4.3.5.1 Filtro radial de sensibilidad. El uso de este filtro se basa en modificar la sensibilidad de diseño de un elemento específico, basado en una media ponderada de las sensibilidades de los elementos en una vecindad fija. Este filtro es puramente heurístico, pero produce resultados claros (ver Figura 23). El esquema funciona modificando las sensibilidades de los elementos de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \hat{C}_p}{\partial \rho_k} = \frac{1}{\rho \sum_{i=1}^N \hat{H}_i} \sum_{i=1}^N \hat{H}_i \rho \frac{\partial C_p}{\partial \rho_k} \quad (114)$$

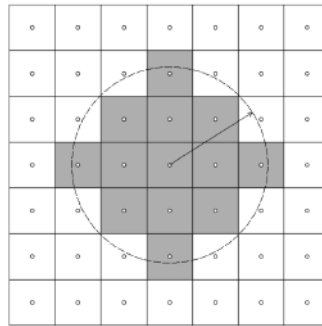
Siendo $\frac{\partial \hat{C}_p}{\partial \rho_k}$ la derivada ajustada producto del filtro, N corresponde al numero total de elementos finitos de la malla, r_{min} el radio minimo de filtrado. Por otro lado $\hat{H}_i$ se obtiene con la expresión:

$$\hat{H}_i = r_{min} - dist(k, i), \quad \{i \in N | dist(k, i) \leq r_{min}\} \quad (115)$$

Siendo $\hat{H}_i$ el operador de convolución y $dist(k, i)$ un operador que obtiene la distancia entre centroides de los elementos k e i (ver Figura 23).

Figura 23

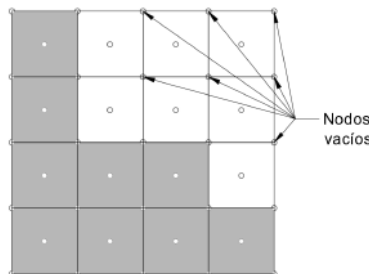
Representación de filtro radial de densidad



4.3.5.2 Filtro nodal de densidad. Este filtro corresponde a una búsqueda y eliminación de grados de libertad del sistema estructural. La acción del filtro consiste en analizar los elementos circundantes de cada uno de los nodos que componen el sistema de FE e identificar si los nodos están rodeados FE vacíos (donde todos tiene el valor de ρ_{min}) o se encuentran llenos o parcialmente llenos. En el caso de ser un nodo rodeado de vacío, se ingorará del FEA (ver Figura 24).

Figura 24

Representación de filtro nodal de densidad



En el desarrollo de un proceso de TO que considere no linealidades geométricas se puede

enfrentar problemas de inestabilidad numérica, lo que dificulta la obtención de topologías claras. Por ello, el uso de un filtro nodal de densidad es esencial para garantizar la estabilidad del proceso de optimización. Este filtro fue presentado originalmente por Bendsøe y Sigmund (2004) y ha sido utilizado con éxito por (Buhl et al., 2000; Paulino y Leonel, 2022; Zhao et al., 2023).

4.4 Optimización topológica en elasticidad no lineal geométrica

Cuando se considera la no linealidad geométrica en el modelo de TO, es necesario realizar ciertas modificaciones, especialmente en la ecuación de equilibrio. El modelo se rige por las ecuaciones:

$$\text{Función obj.: } \text{Min} \rightarrow C_p(\rho_e) \quad (116)$$

$$\text{Equilibrio: } g(u, \rho_e) = (F_{ext} - F_{int}(u, \rho_e)) \leq Tol \approx 0 \quad (117)$$

$$\text{Rest. volumen: } \sum_{e=1}^N v_e \rho_e \leq V_{lim} \quad (118)$$

$$\text{Lim. densidades: } 0 < \rho_{min} \leq \rho_e \leq 1 \quad (119)$$

En este sentido, gran parte de la formulación y planteamientos hasta aquí se mantienen, con la única variación del análisis de sensibilidad, ya que la condición de equilibrio cambia al considerar los efectos no lineales, se trabajará esta en el siguiente subcapítulo.

4.4.1 *Análisis de sensibilidad considerando no linealidad geométrica*

Para el desarrollo del análisis de sensibilidad considerando las no linealidades, habitualmente se desarrolla un procedimiento como el presentado por Buhl et al. (2000); Paulino y Leonel (2022) estableciendo el C_p con la expresión:

$$C_p(\rho_e) = F_{ext}^T u \quad (120)$$

Es posible establecer que:

$$\frac{\partial C_p(\rho)}{\partial \rho_e} = F_{ext}^T \frac{\partial u}{\partial \rho_e} \quad (121)$$

Ahora, para determinar $\frac{\partial u}{\partial \rho_e}$ es necesario utilizar multiplicadores de Lagrange, para esto es necesario reescribir la $C_p(\rho)$ añadiendo una función cero.

$$C_p(\rho) = F_{ext}^T u + \Lambda^T (g(u, \rho)) \quad (122)$$

Siendo F_{ext} y Λ independientes del desplazamiento, su derivada es igual a cero, de modo que la ecuación toma la forma:

$$\frac{\partial f_0}{\partial \rho_e} = F_{ext}^T \frac{\partial u}{\partial \rho_e} + \Lambda^T \left(\frac{\partial g(u, \rho)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \rho_e} + \frac{\partial g(u, \rho)}{\partial \rho_e} \right) \quad (123)$$

Siendo $\frac{\partial g(u, \rho)}{\partial \rho_e}$ igual a menos la matriz de rigidez tangencial (o matriz Hessiana). Considerando $g(u, \rho) = 0$ es posible establecer que:

$$(F_{ext}^T - \Lambda K) \frac{\partial u}{\partial \rho_e} = 0 \quad (124)$$

Resultando en un sistema de ecuaciones lineales de la forma:

$$K \Lambda = F_{ext}^T \quad (125)$$

De modo que el análisis de sensibilidad toma la forma:

$$\frac{\partial C_p(u)}{\partial \rho_e} = \Lambda \frac{\partial g(u, \rho)}{\partial \rho_e} \quad (126)$$

Conociendo el vector de desequilibrio mecánico, derivando al expresión se obtiene:

$$\frac{\partial g(u, \rho)}{\partial \rho_e} = \frac{\partial (F_{ext}^T - F_{int}^T)}{\partial \rho_e} = -p \rho_e^{p-1} \int_{\Omega} F_e^{int} d\Omega \quad (127)$$

Finalmente, resultando que el análisis de sensibilidad para el proceso de TO contemplando

no linealidad geométrica se desarrolla con la expresión:

$$\frac{\partial C_p}{\partial \rho_e} = -\Lambda^{-1} p \rho_e^{p-1} \int_{\Omega} F_e^{int} d\Omega \quad (128)$$

4.5 Programación en FORTRAN

Al momento de desarrollar al código de TO en FORTRAN, se siguió el mismo esquema modular, en el que se desarrollaron las subrutinas que contienen todos los procedimientos presentados en este capítulo (ver Figuras 20 y 21). Adicionalmente se utilizó como código esclavo la programación de FEA modificando ligeramente las rutinas, buscando implantar la penalización del SIMP. Las dependencias y características de este programa son las mismas presentadas al momento de exponer el FEA. En la figura 25 se presenta un diagrama de flujo mostrando el procedimiento seguido para el proceso de TO. Los códigos desarrollados para el proceso de TO están disponibles en repositorios en Github (Guevara-Corzo, 2024d,b).

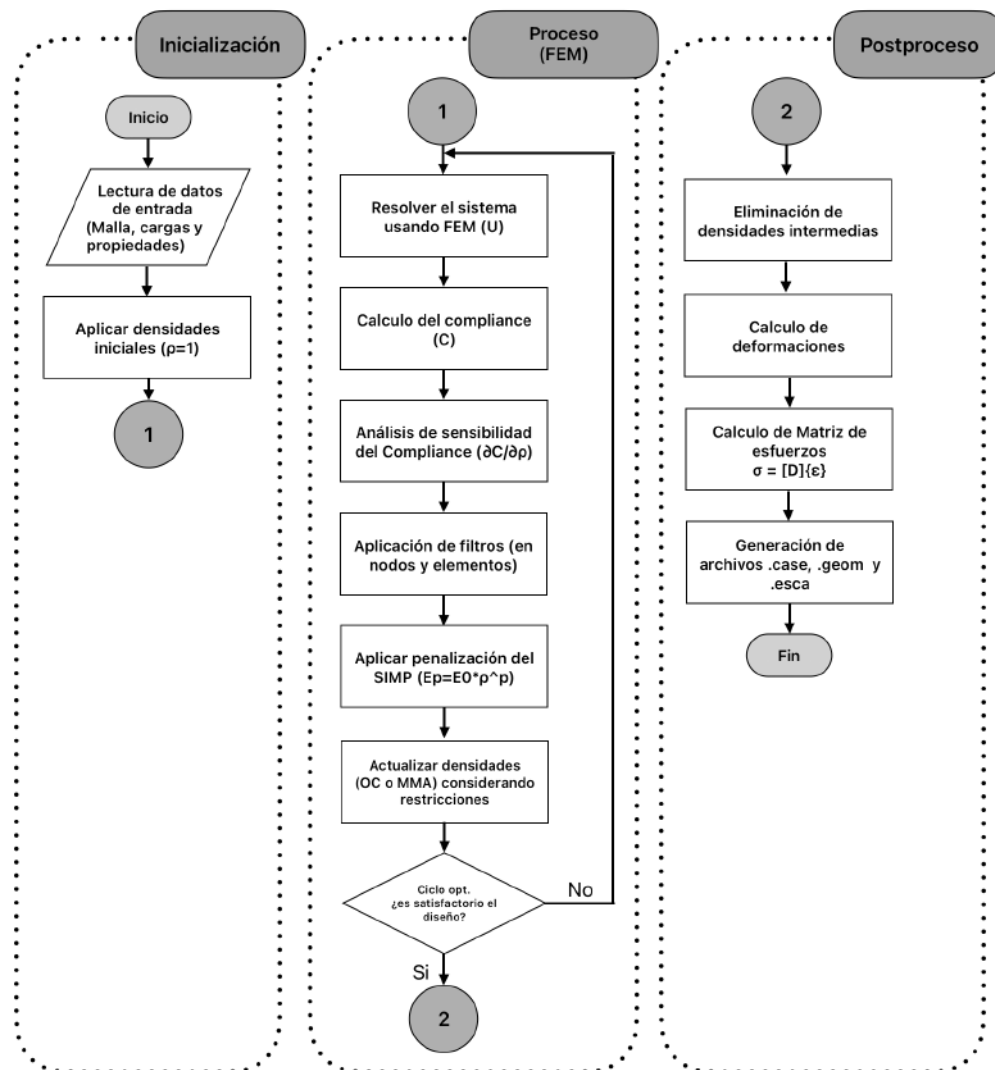
4.6 Ejemplos de validación de optimización topológica

Para la validación de la herramienta computacional de TO, se plantearon 3 vigas en voladizo usadas por autores como (Millán Páramo, 2013, 2020; Oliver et al., 2019; Yago et al., 2022) (ver Figura 26). Esta primera validación busca confirmar que, el comportamiento de la herramienta de análisis por elementos finitos y el algoritmo de optimización (MMA) sean correctos y se obtengan estructuras con una distribución óptima de material. Por otro lado, para la validación del proceso de TO con no linealidad geométrica, se consideraron 2 vigas usadas por autores como (Buhl et al., 2000; Paulino y Leonel, 2022) (ver Figura 27). A diferencia del caso elástico lineal, la validación es más compleja en análisis no lineal debido a que, es posible obtener múltiples resultados a partir de una misma estructura inicial. Para este caso, se consideró una carga pequeña cuyo resultado sería el mismo obtenido al hacer análisis lineal elástico y una (o varias) cargas superiores que debería alterar considerablemente las topologías finales. Para todas las vigas se consideró un $E = 2,5E + 5MPa$, un $\nu = 0,3$ y un espesor de $100mm$. La OF fue la energía por deformación y para el filtro se consideró un radio de 1.5 veces el tamaño máximo del FE ($7.5mm$).

Los resultados del proceso de TO en elasticidad lineal (ver Figura 28) coinciden con trabajos

Figura 25

Diagrama de flujo simplificado del proceso de TO

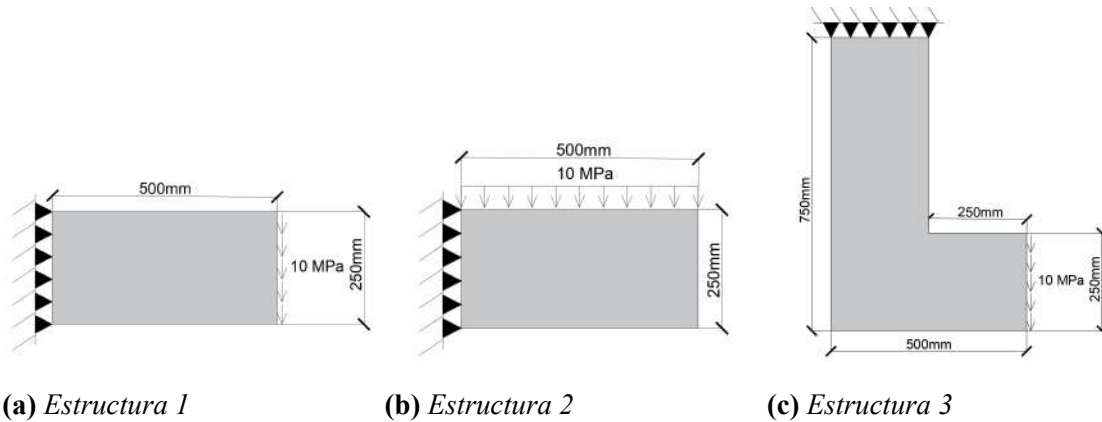


como los Liu y Tovar (2014); Millán Páramo (2013, 2020); Oliver et al. (2019); Yago et al. (2022). En todos los casos, se generan estructuras con ramificaciones claras en las zonas donde se aplican las cargas, así como una distribución de material bien definida en función del soporte de dichas cargas.

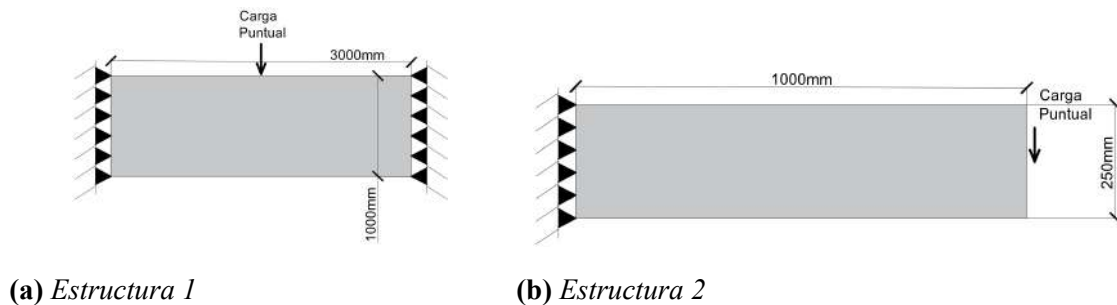
Por otro lado, los resultados del proceso de TO en elasticidad no lineal geométrica (ver Figuras 29 y 30) coinciden con los obtenidos por autores como Buhl et al. (2000) y en estudios más detallados como los desarrollados por Paulino y Leonel (2022).

Figura 26

Estructuras tipo para proceso de TO en elasticidad lineal


Figura 27

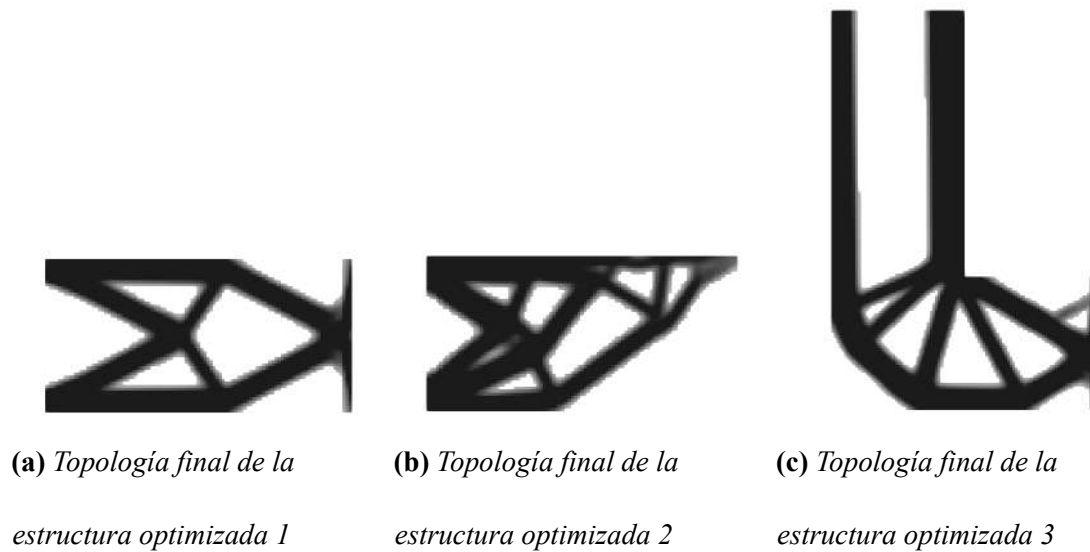
Estructuras tipo posterior al proceso de TO elástico no lineal geométrico



En este contexto, al incrementar considerablemente las cargas y, por ende, las deformaciones, los efectos no lineales comienzan a manifestarse de manera evidente en los resultados. En particular, la figura 29 revela un cambio radical, tanto en el punto de apoyo como en la forma en que la estructura transmite las cargas, lo que subraya la importancia de los efectos no lineales en el comportamiento estructural. De manera similar, la figura 30 muestra cambios progresivos en el entramado interno a medida que se incrementa la carga en el extremo de la viga.

Figura 28

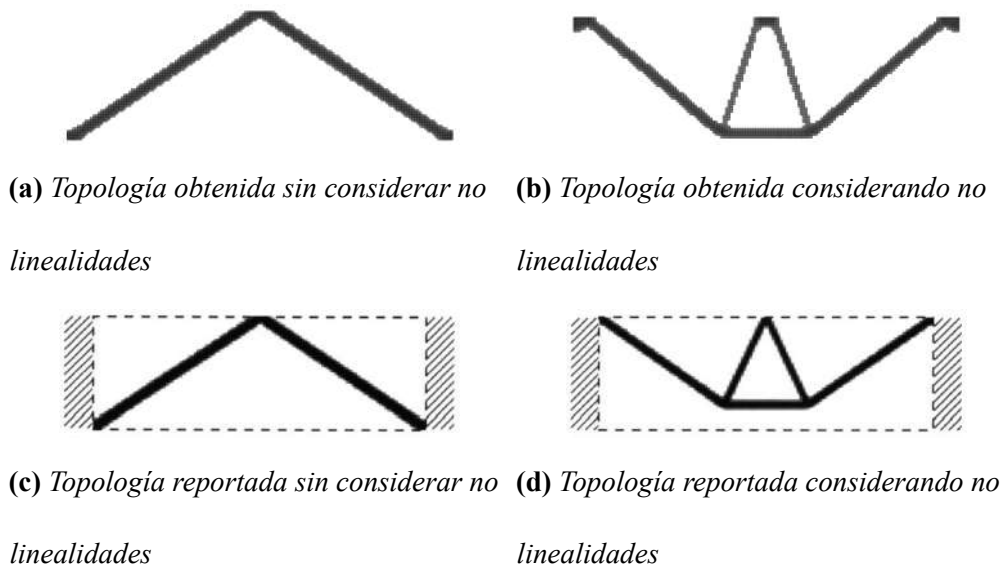
Resultados del proceso de TO en elasticidad lineal considerando $V_{lim} = 40\%$



Nota. Desarrollado por el autor con el código disponible en el repositorio (Guevara-Corzo, 2024d)

Figura 29

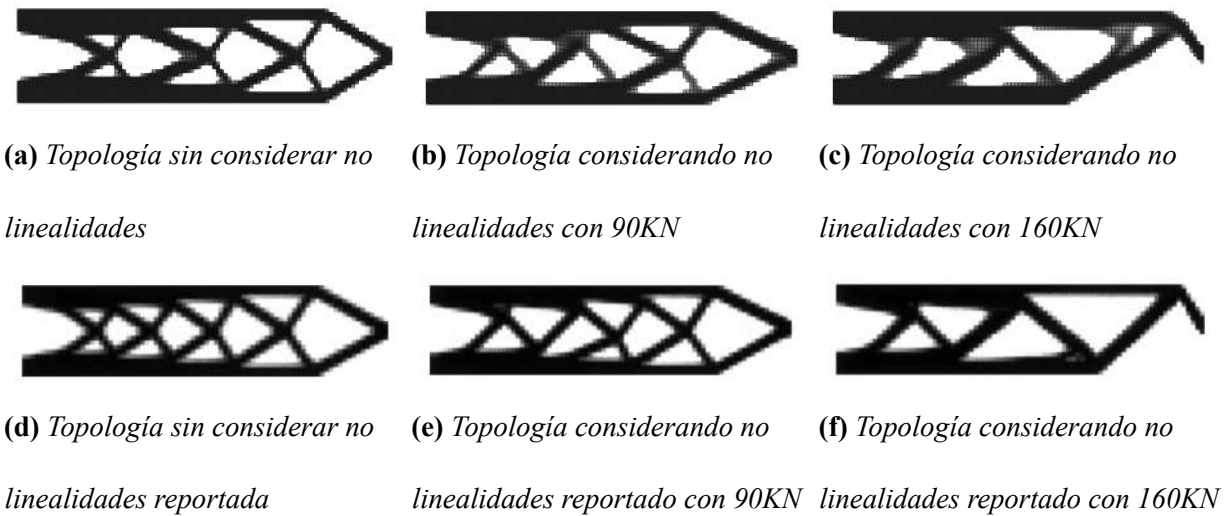
Resultados del proceso de TO elástico no lineal geométrico en 2D para la estructura 1



Nota. Desarrollado por el autor con el código disponible en el repositorio (Guevara-Corzo, 2024b) comparado con Buhl et al. (2000).

Figura 30

Resultados del proceso de TO elástico no lineal geométrico en 2D para la estructura 2



Nota. Desarrollado por el autor con el código disponible en el repositorio (Guevara-Corzo, 2024b) comparado con Buhl et al. (2000).

5 Generación de célula metamaterial

Las investigaciones sobre la generación de estructuras con propiedades mecánicas optimizadas iniciaron con Sigmund, quien propuso a mediados de 1990 el método de homogenización inversa (Sigmund, 1995, 1994), fundamentado en los procesos de TO desarrollados por Bendsøe (1989). Estos avances permitieron explorar la síntesis de estructuras celulares con propiedades específicas, como el trabajo de Gibiansky y Sigmund (2000), enfocado en maximizar el módulo de compresibilidad, y el de Andreassen et al. (2014), que combinó NH y TO para generar configuraciones extremas. Más recientemente, la aplicación de TO en mMM ha impulsado el desarrollo de sólidos con propiedades inusuales como lo desarrollado por Wu et al. (2017); Vogiatzis et al. (2017) que introdujeron un enfoque basado en el método de level set para diseñar mMM auxéticos, destacándose la Optimización Topológica Robusta de tipo Level Set (RTO) como una estrategia prometedora para la obtención de soluciones innovadoras.

En la última década, se ha ampliado significativamente el estudio de mMM mediante diversas estrategias de modelado y optimización. Gurtner y Durand (2014) demostraron teórica y numéricamente que, existe una clase de redes isotrópicas (redes de armaduras) que es más rígida que cualquier otra red isotrópica con la misma densidad. De manera similar, Milton (2016) desarrolla la teoría de los materiales analíticos no homogéneos y revisa los mMM, que en su análisis teórico, proporcionan una forma de realizar coeficientes deseables en las ecuaciones diferenciales que gobiernan fenómenos que involucran, por ejemplo, la acústica, el electromagnetismo y la elastodinámica, entre otros. Estos desarrollos inspiraron nuevos enfoques, como el de Li et al. (2021), quien diseñó mMM pentamodales a partir de configuraciones de tipo armadura, logrando estructuras con una respuesta mecánica altamente controlada. Además, Zhang y Khandelwal (2019) propusieron un método innovador para la generación de mMM auxéticos, mediante la combinación de TO con un proceso de NH no lineal. Esta estrategia permitió obtener estructuras con propiedades mecánicas excepcionales, incluyendo coeficientes de Poisson entre -0.5 y -0.9, así como el desarrollo

de configuraciones tanto monomateriales como bimateriales. Estos avances reflejan el creciente nivel de sofisticación en el diseño de mMM, impulsado por herramientas computacionales cada vez más potentes y un marco teórico en constante fortalecimiento.

En línea con estos avances, durante los últimos 4 años, múltiples investigadores coinciden en que los procesos generativos, ya sean directos o indirectos, dependen del uso de una estructura base (BS) (Wu et al., 2017, 2021; Li et al., 2021; Tsushima et al., 2022; Liu y Acar, 2023; Fleisch et al., 2024). En otras palabras, independientemente de la metodología basada en TO, el diseño comienza con una configuración inicial que actúa como un elemento de volumen representativo (RVE). A partir de esta base, el objetivo es optimizar la distribución del material para obtener una estructura con propiedades mecánicas específicas, maximizando su rendimiento para una aplicación determinada.

En este contexto, el proceso generativo propuesto para los mMM se fundamenta en el uso de propiedades mecánicas homogenizadas para definir células metamateriales periódicas capaces de atenuar ondas sísmicas. El principal desafío es lograr un arreglo periódico finito con alta rigidez axial pero baja rigidez lateral que desarrollen bandas de parada operen en frecuencias bajas (entre 1 y 20 Hz), adecuadas para aplicaciones en ingeniería sísmica. Finalmente, la eficiencia del aislador basado en metamateriales se evalúa mediante funciones de transmisibilidad, permitiendo cuantificar su capacidad de mitigación sísmica. En este capítulo, se presenta la metodología seguida para la generación de estructuras mMM, comenzando con el modelo de optimización inicial y el análisis de sus resultados. Posteriormente, se introduce el modelo de optimización ajustado, detallando las funciones objetivo propuestas y evaluando los mMM obtenidos en el proceso de generación. Parte de los procesos desarrollados en este capítulo, se presentan en Guevara-Corzo et al. (2024)

5.1 Metodología

El proceso generativo de los mMM se desarrolló siguiendo metodologías basadas en estrategias similares a las propuestas por Chatterjee et al. (2021); Esfarjani et al. (2022). Estos autores estructuran el desarrollo en tres etapas: definición de parámetros, análisis y postprocesamiento. La etapa de definición de parámetros se enfoca principalmente en la configuración del diseño inicial

(célula base) y en los parámetros del algoritmo de optimización, que en el caso de Chatterjee et al. (2021) corresponde al BESO. La etapa de análisis se centra en la ejecución del proceso de TO y finalmente en la etapa de postprocesamiento abarca el tratamiento de los resultados mediante un software CAD. En esta investigación, el proceso generativo se estructuró en tres fases principales: preprocesamiento, procesamiento y postprocesamiento (ver Figura 31).

En la fase de preprocesamiento, se establecen los parámetros y datos esenciales para el modelo numérico. Esto incluye la configuración inicial del proceso de NH, los parámetros de filtrado utilizados en la TO y las características clave del estudio, como el espacio de búsqueda (BS inicial) y la OF aplicada en la optimización.

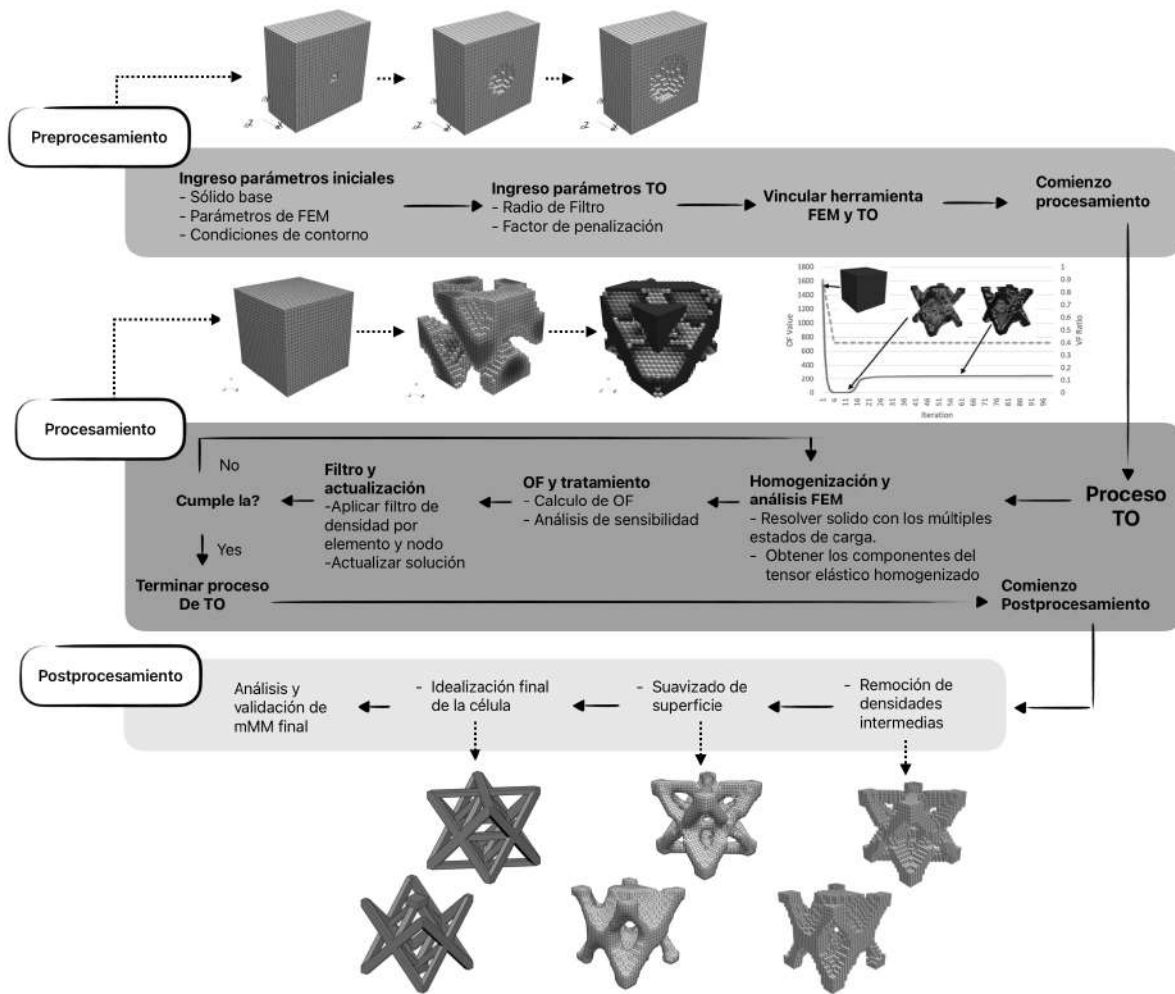
La etapa de procesamiento se centra en la generación numérica de los mMM mediante TO, en este caso, basada en el método SIMP. Dentro de este proceso, se integra un procedimiento de NH necesario para calcular la OF, lo que implica un análisis mecánico del sólido bajo múltiples estados de carga mediante FEM. El proceso iterativo de TO finaliza cuando se alcanza el número máximo de iteraciones (200) o cuando el cambio en la OF es menor que un umbral de tolerancia predefinido ($1.0 \text{ E-}3$).

Finalmente, la etapa de postprocesamiento se encarga de refinar los resultados de la optimización. Esta fase consta de tres pasos principales: primero, se aplica un filtrado para eliminar densidades intermedias generadas durante la TO; luego, se realiza un suavizado de superficies para mejorar la definición del modelo; y, por último, se idealiza la geometría obtenida para generar una representación final más clara y utilizable.

Una vez obtenido el mMM, se establecieron dos etapas de prueba. Primero, se compararon los resultados con estudios previos, como los desarrollados por autores como Fabbrocino et al. (2015); Fabbrocino y Amendola (2017); Fraternali et al. (2018); Wu et al. (2021). En esta etapa inicial, se evaluó el comportamiento del mMM sin replicarlo, es decir, analizando el desempeño de la celda mediante su capacidad de aislamiento (a través de la FRF) y la caracterización del tensor de elasticidad homogenizado calculado con el módulo Material Designer de ANSYS (ANSYS Inc., 2022). Este análisis permitió determinar el impacto de las funciones objetivo en el comportamiento

Figura 31

Esquema simplificado de la metodología de generación de mMM



de los mMM y establecer las configuraciones más prometedoras, abordando así de manera preliminar el tercer objetivo específico (ver capítulo 1).

Posteriormente, el mMM se implementó en un SPS, específicamente en un sistema de aislamiento basado en enfoques tradicionales, como los propuestos por Fabbrocino et al. (2015); Fabbrocino y Amendola (2017); Fraternali et al. (2018), en el cual se reemplazó el material elastomérico por el mMM obtenido. De los diseños generados tras el postprocesamiento, se seleccionaron las estructuras con mejor desempeño según criterios como la relación K/G , la efectividad del aislamiento en frecuencias bajas, la relación entre los valores propios y un menor módulo de cizallamiento G .

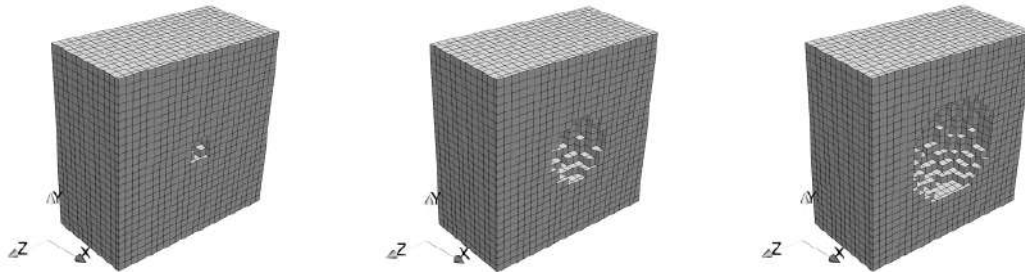
Finalmente, al igual que en los estudios previos de Fabbrocino et al. (2015); Fabbrocino y Amendola (2017); Fraternali et al. (2018), se comparó el desempeño de los dispositivos propuestos basados en mMM con un aislamiento tipo LRB (*Lead Rubber Bearing*), lo que permitió cumplir con el tercer y cuarto objetivo específico (ver capítulo 1).

5.1.1 Estructura base propuesta

La BS utilizada en los procesos generativos consistió en una estructura cúbica con un vacío esférico en su interior, siguiendo enfoques similares propuestos por Zhang y Khandelwal (2019); Wu et al. (2021). Se exploraron tres configuraciones (ver Figura 32), todas con una célula de 50 mm de lado, pero con variaciones en el diámetro del vacío, tomando valores de: 10 mm, 20 mm y 30 mm.

Figura 32

Estructuras base contempladas para la generación de mMM



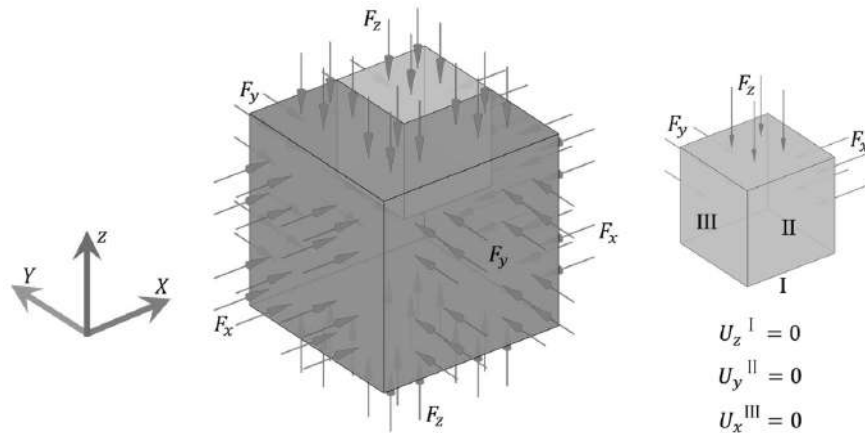
Sin embargo, según el estudio preliminar realizado para analizar distintos factores en procesos generativos (ver Guevara-Corzo et al. (2024)), donde se evaluó la influencia de parámetros clave como la BS, la OF y la fracción de volumen (VF) en el proceso de TO, se decidió trabajar únicamente con BS que presentan vacíos de 10 mm y 30 mm de diámetro. Esta selección permite abarcar una parte significativa del espectro de resultados esperados.

Por otro lado, con el objetivo de optimizar el desempeño del proceso y obtener mMM con mayor resolución y una gestión más eficiente de los recursos computacionales, se adoptó el enfoque propuesto por Li et al. (2021). Este método aprovecha la simetría del problema para realizar la optimización únicamente sobre un octante de la BS, el cual es posteriormente replicado para

reconstruir el sólido completo (ver Figura 33). Esta estrategia no solo mejora significativamente el aprovechamiento de los recursos computacionales, al requerir únicamente la evaluación de los estados de deformación axial, sino que también permite aumentar la resolución en términos de vóxeles del sólido final, al concentrar los recursos en una fracción del dominio.

Figura 33

Cargas, condiciones de contorno y octante como BS



Nota. Adaptado de: Li et al. (2021)

5.1.2 Homogenización numérica

La homogenización numérica (NH) constituye una herramienta fundamental en el modelado computacional de materiales con microestructuras complejas, tales como compuestos, policristales o biomateriales. En este marco, la NH permite sustituir un material heterogéneo por un medio continuo equivalente con propiedades constitutivas efectivas (homogenizadas) que representan de manera precisa su comportamiento global (Yvonnet, 2019).

La NH se basa en establecer una conexión rigurosa entre dos escalas de análisis: la microescala y la macroescala. La microescala se representa mediante un RVE, que constituye una subregión del material que contiene una muestra estadísticamente representativa de la microestructura, incluyendo la geometría y las propiedades de sus fases constituyentes. En contraste, en la macroescala, el material se conceptualiza como un medio continuo homogéneo equivalente, cuyas propiedades son

uniformes y describen la respuesta global de la estructura sin necesidad de resolver explícitamente los detalles microscópicos.

En el contexto de modelos generativos basados en TO (Liu y Tovar, 2014; Andreassen et al., 2014; Wu et al., 2021; Li et al., 2021), este proceso es denominado NH inversa, de acuerdo con la formulación introducida por Bendsøe y Kikuchi (1988). A diferencia del enfoque tradicional, cuyo objetivo es determinar las propiedades efectivas a partir de un RVE dado, en la NH inversa se busca generar una microestructura (RVE) que dé lugar a propiedades efectivas predeterminadas (o extremas). Aunque el uso de la NH en este contexto es inverso, se preservan los fundamentos teóricos y los conceptos esenciales para su aplicación.

La vinculación entre ambas escalas se logra mediante el promedio volumétrico de los campos microscópicos de tensión y deformación sobre el RVE, a partir del cual se obtienen sus contrapartes macroscópicas. De acuerdo con:

$$\bar{\sigma}_{i,j} = \frac{1}{V} \int_S \sigma_{i,j} dV \quad (129)$$

$$\bar{\epsilon}_{i,j} = \frac{1}{V} \int_S \epsilon_{i,j} dV \quad (130)$$

Para garantizar la consistencia energética entre las dos escalas, la NH se fundamenta en el teorema de Hill-Mandel. Este establece que la energía potencial interna (o el trabajo virtual interno) sobre el RVE (microescala) debe ser igual en la macroescala. Esta equivalencia es una condición necesaria para una homogeneización energéticamente consistente resultando en la ecuación:

$$\bar{W}_{micro} = W_{macro} \quad (131)$$

Elasticidad lineal, acuerdo a Yvonnet (2019) también usado por Andreassen et al. (2014) y considerando condiciones de contorno periódicas (PBC), el C^H se obtiene con la ecuación:

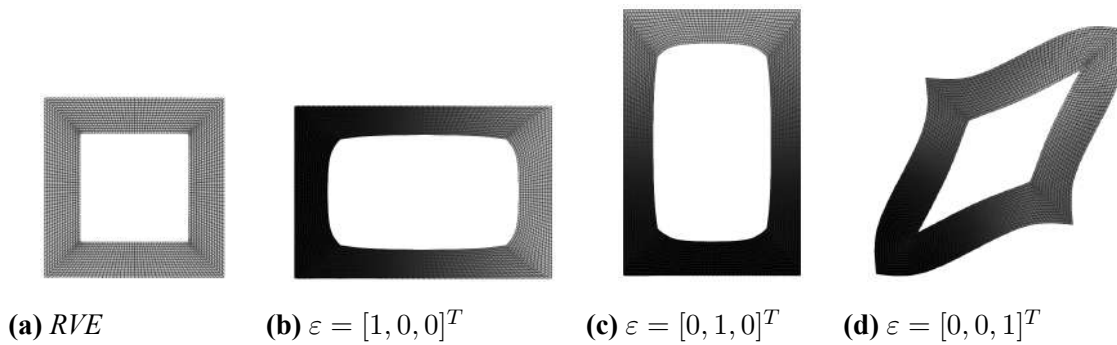
$$C^H = \frac{1}{V} \int_{\Omega} ([U_e][B_e])^T C [U_e][B_e] d\Omega \quad (132)$$

Siendo $[U_e]$ el vector de desplazamientos correspondiente a los estados de deformación considerados (ver Figura 34), evaluados en el momento de realizar la ponderación. En el planteamiento del modelo numérico, es fundamental considerar que el campo de deformaciones se representa mediante la superposición de un estado constante promedio, $\bar{\epsilon}$, y una componente fluctuante, $\hat{\epsilon}$, lo cual se expresa mediante la siguiente relación:

$$\epsilon = \bar{\epsilon} + \hat{\epsilon} \quad (133)$$

Figura 34

Representación de tres estados de deformación en un proceso de HN para un caso en 2D



Esta descomposición, junto con la aplicación de PBC, resulta esencial en el proceso generativo, ya que permite evaluar, dentro del RVE (en evolución), qué regiones deben ser modificadas o conservadas según el algoritmo de TO empleado. Es importante destacar este punto, ya que, si bien los procesos de NH pueden desarrollarse empleando condiciones de contorno cinemáticamente uniformes, estos métodos suelen presentar limitaciones importantes, principalmente porque no capturan las fluctuaciones locales del campo de deformaciones.

Por otro lado, cuando se considera la no linealidad geométrica, la relación constitutiva se vuelve dependiente del estado actual de deformación. En este caso, el tensor de elasticidad homogenizado ya no es una constante, sino un tensor constitutivo tangente definido como:

$$C_{tan}^H = \frac{\partial S_{macro}}{\partial E_{macro}} \quad (134)$$

El calculo de este se puede hacer usando Diferencias Finitas Centradas como lo describe Yvonnet (2019) al ser una alternativa fácil de implementar aunque requiere múltiples evaluaciones. Sin embargo, considerando que se dispone directamente del código numérico en donde se puede evaluar fácilmente las fluctuaciones que se desarrolla al método de Newton-Raphson. Para cada paso en cada estado de deformación, se realiza el siguiente proceso:

1. Carga del estado deformado actual del RVE
2. Aplicación de incrementos de deformación unitarios
3. Resolución del problema no lineal del RVE
4. Promedio de tensiones incrementales
5. Construcción de C_{tan}^H

5.2 Modelo matemático preliminar para generación de mMM

Con el propósito de validar el procedimiento generativo y analizar la influencia de las condiciones iniciales en su desarrollo, se llevó a cabo una evaluación preliminar basada en esquemas y modelos similares a los presentados por Andreassen et al. (2014). Para ello, se consideraron múltiples OF, diferentes VF y diversas configuraciones de la BS, permitiendo evaluar el comportamiento y la eficiencia del proceso. Como punto de partida, se utilizó un modelo basado en elasticidad lineal y un proceso de homogenización numérica según el enfoque propuesto por Yvonnet (2019). A partir de los resultados obtenidos, el modelo fue refinado y optimizado, lo que permitió desarrollar una versión más eficiente. A continuación, se presentan las ecuaciones que rigen este modelo preliminar:

$$\text{Función obj.: } \text{Min} \rightarrow OF \left(\sum_{i=1}^n WC^H(\rho_e) \right) \quad (135)$$

$$\text{Equilibrio: } \left(\sum_{e=1}^N K_e(\rho_e^P) \right) u = f \quad (136)$$

$$\text{Deformación: } \varepsilon = \bar{\varepsilon} \quad (137)$$

$$\text{Homogenización } C^H = \frac{1}{V} u_e^T K u_e \quad (138)$$

$$\text{BC. Periodicas: } u(x_p) - u(x_q) = \epsilon_i^0(x_p - x_q) \quad (139)$$

$$\text{Penalización: } E = \rho(x)^p E^0 \quad (140)$$

$$\text{Rest. volumen: } \sum_{e=1}^N v_e \rho_e \leq V_{lim} \quad (141)$$

$$\text{Lim. densidades: } 0 < \rho_{min} \leq \rho_e \leq 1 \quad (142)$$

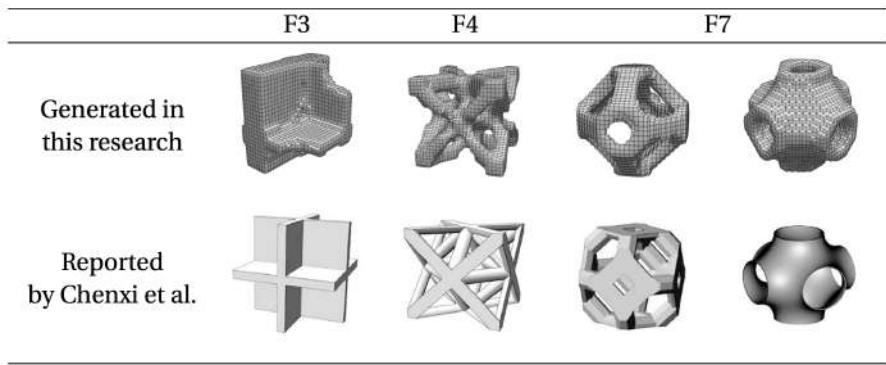
En donde OF se calcula en función del tensor de elasticidad C^H y un vector de pesos W (que para el caso son unitarios). El tensor de elasticidad se obtiene con base al campo de desplazamientos u_e que se calculan con base a los seis casos de carga siguiendo BC periódicas y finalmente V corresponde al volumen total de la BS. En el proceso se formularon cuatro (4) y siete (7) OF para casos bidimensionales y tridimensionales, respectivamente. En las OF consideradas se tomaron casos con uno o varios componentes del tensor C^H con el propósito de evaluar la influencia que tiene la OF, y se evaluó la eficiencia de los algoritmos OC y MMA. Para más detalles consultar Guevara-Corzo et al. (2024).

Aunque el proceso de generación de mMM fue exitoso, resultando en estructuras claras y definidas, donde se obtuvieron estructuras reportadas por otros autores como Lu et al. (2022) y otras no reportadas según la literatura recopilada, estudiadas en un caso 2D de deformación plana, fue necesario replantear el modelo generativo y establecer restricciones adicionales al modelo para mejorar su desempeño (esto se abordará en la sección 5.2.1).

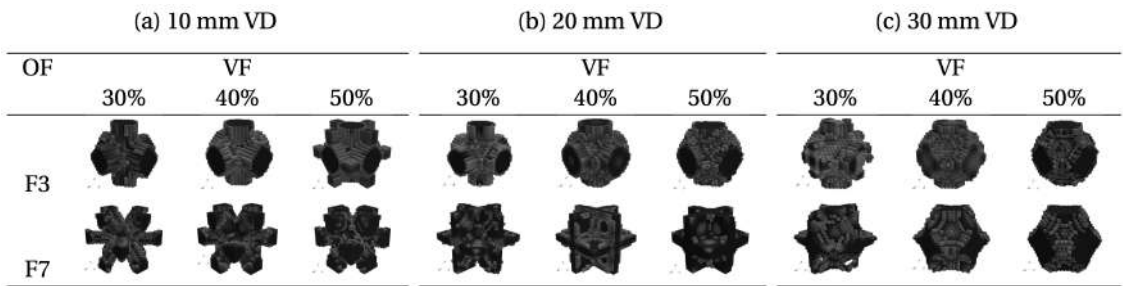
Uno aspecto importante a destacar es que, aunque el OC es uno de los algoritmos más

Figura 35

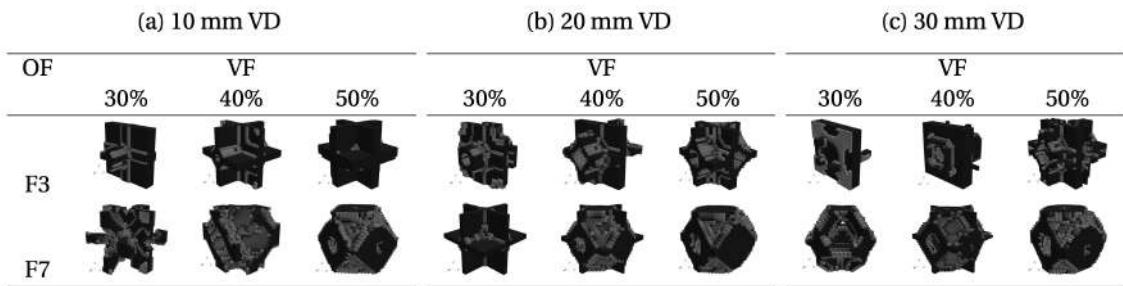
Resultados preliminares obtenidos



(a) Resultados del proceso generativo comparado con mMM presentado por autores de referencia.



(b) Resultados del proceso generativo de dos OF usando el algoritmo MMA.



(c) Resultados del proceso generativo de dos OF usando el algoritmo OC.

utilizados en procesos de TO debido a su rapidez, no es adecuado para este tipo de problemas. Esto se debe a que la OF puede generar valores negativos lo que dificulta la obtención de una topología definida. Por otro lado, fue necesario ajustar los parámetros de escala del MMA (definidos como a , d , c , y d en el código, ver Svanberg (1987); Andreassen et al. (2014)) y la tasa de cambio o mutación del algoritmo. Utilizar los parámetros de escala originales resultó problemático, ya que los modelos

se basaron en propiedades mecánicas reales y su aplicación provocó un comportamiento inestable. Adicionalmente, se optó por una tasa de cambio ligeramente inferior (10 %), ya que una tasa más alta generaba variaciones abruptas y, en algunos casos, impedía la formación de topologías claras.

También se observó la generación de mMM desfasados, los cuales cumplían con todas las restricciones del modelo numérico, pero era problemática su aplicación práctica. Para solucionar esto, se añadieron restricciones adicionales en forma de penalización para forzar la isotropía y simetría.

5.2.1 Ajustes, límites y restricciones del sistema

Al abordar el proceso generativo con el modelo preliminar, se encontraron múltiples falencias e imprecisiones que serán tratadas en esta sección. Inicialmente, las condiciones de desigualdad del modelo numérico fueron aplicadas para restringir el espacio de búsqueda y mejorar su desempeño. Sin embargo, aunque se obtuvieron resultados consistentes y nuevos mMM, es necesario establecer condiciones adicionales para imponer un comportamiento específico al modelo, como isotropía u ortotropía (Andreassen et al., 2014), forzar los límites mecánicos teóricos como los límites de Hashin y Shtrikman (1963).

Se añadieron restricciones adicionales de igualdad para limitar el modelo a un sistema isotrópico, con el objetivo de mejorar el rendimiento del proceso mediante ajustes en los valores del tensor de elasticidad (o la energía de deformación). Esta práctica, (señalada Guevara-Corzo et al. (2024)) es esencial para generar estructuras celulares bien definidas y garantizar la estabilidad del proceso de OT. Otros autores también han empleado este enfoque, como Sigmund (2000); Bendsøe y Sigmund (2004); Andreassen et al. (2014); Wu et al. (2021). Una alternativa es incorporar una nueva restricción de búsqueda mediante un coeficiente de penalización, como el coeficiente de Zener utilizado por Wu et al. (2021), que ofrece buenos resultados, aunque puede resultar poco práctico cuando se aplican múltiples condiciones de igualdad al modelo numérico. Por ello, se optó por una solución más pragmática propuesta por Andreassen et al. (2014), que consiste en ponderar y penalizar directamente los valores del tensor de elasticidad con una constante de isotropía, lo que facilita la convergencia hacia un modelo aproximadamente isotrópico (C_{ISO}). Esto se logra con la

siguiente desigualdad:

$$\frac{\sum_{i,j=1}^n (C_{ij}^{ISO} - C_{i,j}^*)^2}{(C_{11}^{ISO})} \leq \epsilon \quad i, j = 1, 2, \dots, 6 \quad (143)$$

Siendo C_{ij}^* el tensor efectivo obtenido del proceso de homogenización numérica. Esta restricción de isotropía asegura que el mMM generado sea isotópico. Adicionalmente, el tensor de elasticidad isotrópico de referencia (C^{ISO}) se define como:

$$C_{ii}^{ISO} = (C_{11}^* + C_{22}^* + C_{33}^*) / 3 \quad i = 1, 2, 3 \quad (144)$$

$$C_{ij}^{ISO} = (C_{12}^* + C_{13}^* + C_{23}^*) / 3 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad i \neq j \quad (145)$$

$$C_{ii}^{ISO} = (C_{11}^* - C_{12}^*) / 2 \quad i = 4, 5, 6 \quad (146)$$

$$C_{ij}^{ISO} = 0 \quad (147)$$

La restricción de isotropía puede ajustarse por una restricción cúbica simétrica sustituyendo la C^{ISO} correspondiente a los componentes de cortante con la expresión:

$$C_{ii}^{ISO} = (C_{44}^* + C_{55}^* + C_{66}^*) / 3 \quad i = 4, 5, 6 \quad (148)$$

Por otro lado, se modificó el enfoque del problema utilizando un proceso de NH formalmente establecido por autores como Yvonnet (2019) y aplicado en los trabajos de Andreassen et al. (2014), que emplean un sólido base completo. El problema se reformuló aprovechando la simetría de la BS y los estados de carga en tracción. Este enfoque es similar al propuesto por Li et al. (2021), en el que se explota la simetría de la base utilizada, permitiendo que el proceso de optimización topológica se centre en la generación de un octante del mMM final. Esta elección se fundamenta principalmente en la eficiencia computacional del proceso generativo. Al trabajar con una porción que luego se replica en todos los ejes de simetría, se logra una mayor definición del sólido final obtenido, lo que facilita también el proceso de idealización del mMM durante la etapa de postprocesamiento.

5.3 Generación de mMM enfocado en aislamiento de vibraciones

La generación de mMM (considerando los ajustes de la sección anterior) en elasticidad lineal, resulta en el siguiente modelo numérico:

$$\text{Función obj.: } \text{Min} \rightarrow FO(WC^H(\rho_e)) \quad (149)$$

$$\text{Equilibrio para FEM: } \left(\sum_{e=1}^N K_e(\rho_e^P) \right) u = f \quad (150)$$

$$\text{Ecuación constitutiva: } \sigma = C\varepsilon \quad (151)$$

$$\text{Deformación: } \varepsilon = \bar{\varepsilon} \quad (152)$$

$$\text{BC. Periodicas: } u(x_p) - u(x_q) = \epsilon_i^0(x_p - x_q) \quad (153)$$

$$\text{Penalización Iso: } \frac{\sum_{i,j=1}^n (C_{ij}^{ISO} - C_{i,j}^*)^2}{(C_{11}^{ISO})} \leq \epsilon \quad i, j = 1, 2, \dots, 6 \quad (154)$$

$$\text{Penalización: } E = \rho(x)^p E^0 \quad (155)$$

$$\text{Rest. volumen: } \sum_{e=1}^N v_e \rho_e \leq V_{lim} \quad (156)$$

$$\text{Lim. densidades: } 0 < \rho_{min} \leq \rho_e \leq 1 \quad (157)$$

Sin embargo, cuando se consideran grandes deformaciones (no linealidad geométrica), se deben hacer modificaciones. En este escenario, el resultado del proceso de TO deja de ser único y depende significativamente del nivel de deformación inducido por la carga aplicada (ver Figura 30). Esto implica que los efectos no lineales influyen en la configuración final obtenida, lo que introduce una variabilidad que debe abordarse.

Para enfrentar esta problemática, en esta investigación se propone la búsqueda un óptimo robusto. En este enfoque, la optimización no busca exclusivamente la mejor distribución para un estado de carga particular, sino que pretende garantizar un desempeño satisfactorio bajo un amplio rango de escenarios definidos por los distintos niveles de carga. De esta manera, se maximiza la efectividad promedio de la solución y se reduce su sensibilidad a las incertidumbres. Este enfoque

puede formularse como un problema multiobjetivo, tal como se establece en la ecuación 81.

Un procedimiento de búsqueda de un óptimo robusto se emplea en la optimización de estructuras sometidas a múltiples estados de carga, como lo describen Bendsøe y Sigmund (2004) en donde el C_p es un promedio de los múltiples estados de carga. Para este caso, es necesario reformular el modelo agregando un segundo vector que ponderen los valores de las OF. Este segundo vector debe garantizar que al evaluar las OF todas aporten y tengan el mismo grado de importancia y contribuyan a la topología final, resultando en la ecuación:

$$FO = \sum_{i=1}^n W_p FO_i \left(\sum_{i=1}^n W C^H(\rho_e) \right) \quad (158)$$

Donde W_p representa el peso asignado a cada valor de la OF correspondiente a cada paso de carga (el vector W se mantiene unitario). Este enfoque consiste en almacenar los valores de la OF asociados a los distintos estados de la estructura bajo diferentes cargas (o deformaciones) y ponderarlos, obteniendo así una OF final que considera la contribución de todos los estados evaluados. Al plantear el modelo como un problema multiobjetivo, las ecuaciones que gobiernan el proceso de TO considerando no linealidad geométrica son.

$$\text{Función obj.: } \text{Min} \rightarrow \sum_{i=1}^n W_p F O_i \left(\sum_{i=1}^n W C^H(\rho_e) \right) \quad (159)$$

$$\text{Equilibrio para NLFEM: } g(u, \rho_e) = (F_{ext} - F_{int}(u, \rho_e)) \leq Tol \approx 0 \quad (160)$$

$$\text{Ecuación constitutiva: } S = C E_g \quad (161)$$

$$\text{Deformación: } \varepsilon = \bar{\varepsilon} \quad (162)$$

$$\text{BC. Periodicas: } u(x_p) - u(x_q) = \epsilon_i^0(x_p - x_q) \quad (163)$$

$$\text{Penalización Iso: } \frac{\sum_{i,j=1}^n (C_{ij}^{ISO} - C_{i,j}^*)^2}{(C_{11}^{ISO})} \leq \epsilon \quad i, j = 1, 2, \dots, 6 \quad (164)$$

$$\text{Penalización: } E = \rho(x)^p E^0 \quad (165)$$

$$\text{Rest. volumen: } \sum_{e=1}^N v_e \rho_e \leq V_{lim} \quad (166)$$

$$\text{Lim. densidades: } 0 < \rho_{min} \leq \rho_e \leq 1 \quad (167)$$

Para ambos modelos (lineal y no lineal) se utilizó un factor de penalización (p) de 3.0, una densidad mínima (ρ_{min}) de 0.1 del RVE original y un $\bar{\varepsilon}$ de 0.4. Para el método de Newton-Raphson se definió un factor de tolerancia Tol del vector de desequilibrio estático de 0.001, se consideraron 4 pasos de carga y un número máximo de iteraciones entre pasos de 100. El material usado en el proceso de generación y pruebas fue el Ti-6Al-4V, seleccionado a partir de lo reportado por Li et al. (2021). Además, el Ti-6Al-4V presenta propiedades similares a los metales empleados por Fabbrocino et al. (2015), con un módulo de Young, de corte, de compresibilidad y Poisson de, 110 GPa, 45 GPa, 120 GPa y 0.33, respectivamente. Finalmente, el proceso de generación se limitó a dos BS producto de los resultados preliminares obtenidos en Guevara-Corzo et al. (2024), ya que muchas topologías finales se repetían al hacer una exploración detallada. De este modo, se analizaron las BS (octantes) con vacíos de 10 mm y 30 mm de diámetro, utilizando FE de tipo hexaédrico cuadrático. Para el caso del vacío de 10 mm se emplearon 17,021 elementos, mientras que para el de 30 mm se utilizaron 14126 elementos. Como resultado, los mMM generados estuvieron conformados por un

total de 136168 y 113003 elementos finitos, respectivamente.

5.3.1 Funciones objetivo

Para la generación de los mMM, se establecieron dos enfoques en la formulación de las OF. El primero, denominado enfoque directo, consiste en definir OF diseñadas específicamente para inducir un comportamiento óptimo en el aislamiento de vibraciones, aunque dicho comportamiento no siempre sea factible de alcanzar completamente. En este caso, se propusieron dos OF. El segundo, denominado enfoque indirecto, emplea OF que, aunque tienen un propósito diferente, han demostrado generar efectos emergentes favorables para la atenuación de vibraciones mecánicas. Para este enfoque, se propusieron tres OFs. A continuación, se presentan los detalles de estos enfoques.

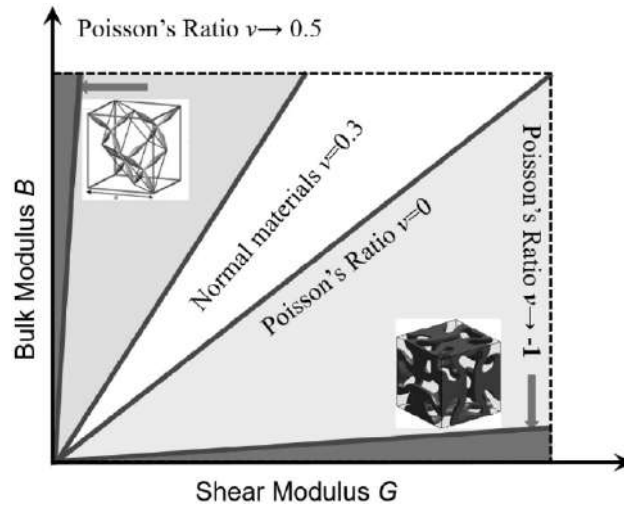
5.3.1.1 Funciones objetivo del primer enfoque (directo). El primer enfoque busca la generación de un mMM aplicable en la atenuación de vibraciones, siendo los más prometedores los pentamodales y los auxéticos (Wang et al., 2017). Los mMM auxéticos pueden desarrollar bandas de parada (Saddek et al., 2023) definidas en frecuencias bajas; sin embargo, tienden a presentar altos módulos de cortante (ver Figura 36), una característica no deseable en un SPS, diseñado con enfoque clásico. Por esta razón, para este enfoque, la primera OF (F_1) se formuló para obtener un mMM pentamodal, cuya respuesta mecánica se asemeja a la de un fluido como lo reportan Fabbrocino et al. (2015); Fabbrocino y Carpentieri (2017); Bertoldi et al. (2017); Kadic et al. (2019). La segunda OF (F_2) se diseñó para maximizar la capacidad de compresión del mMM y minimizar su capacidad de soportar esfuerzos cortantes, empleando directamente los módulos de compresibilidad y de cortante en su formulación.

Para la primera OF, se formuló buscando que uno de los seis valores propios del tensor de elasticidad sea diferente de cero y se implemento de forma similar a lo planteado por Li et al. (2021). Considerando un sistema elástico con simetría ortotrópica resulta la función:

$$F = \left(\frac{a\sqrt{C_{11}^H + C_{22}^H}}{C_{12}^H} - 1 \right)^2 + \left(\frac{b\sqrt{C_{11}^H + C_{33}^H}}{C_{13}^H} - 1 \right)^2 + \left(\frac{c\sqrt{C_{22}^H + C_{33}^H}}{C_{23}^H} - 1 \right)^2 + \frac{C_{44}^H + C_{55}^H + C_{66}^H}{C_{11}^H + C_{22}^H + C_{33}^H} + R \quad (168)$$

Figura 36

Distribución de mMM de según el módulo de cortante vs módulo de compresibilidad.



Siendo

$$a = \pm 1, b = \pm 1, c = \pm 1 \quad (169)$$

$$abc \neq -1 \quad (170)$$

R representa un factor de penalización asociado a las funciones de desigualdad del sistema. Sin embargo, a pesar de que esta OF sigue una formulación teóricamente adecuada para la obtención de un sólido pentamodal, los resultados obtenidos no fueron satisfactorios en ninguno de los casos analizados. Debido a estas limitaciones, fue necesario reformular el enfoque. Siguiendo la estrategia de Li et al. (2021), se optó por restringir el sistema a condiciones de elasticidad e isotropía. En lugar de buscar la maximización del primer eigenvalor mientras se minimizan los restantes, se propuso una nueva formulación en la que únicamente se maximiza el primer eigenvalor, lo que condujo a la definición de la OF F_1 , siendo:

$$F_1 = C_{11}^H + 2C_{12}^H + R \quad (171)$$

La segunda OF utilizada en este enfoque buscaba maximizar la capacidad de compresión y minimizar la capacidad para soportar esfuerzos cortantes, dando lugar a la siguiente forma de la OF:

$$F_2 = K/G + R \quad (172)$$

Siendo

$$K = C_{11}^H + C_{22}^H + C_{33}^H + C_{12}^H + C_{13}^H + C_{23}^H \quad (173)$$

$$G = C_{44}^H + C_{55}^H + C_{66}^H \quad (174)$$

En donde K y G , corresponde al modulo de compresibilidad y cortante respectivamente.

5.3.1.2 Funciones objetivo del segundo enfoque (indirecto). En este enfoque, se buscaron los comportamientos deseados de manera indirecta, optimizando propiedades mecánicas específicas en lugar de abordar explícitamente el fenómeno de aislamiento de vibraciones. La estrategia se basa en aprovechar los efectos derivados de la optimización de ciertas características mecánicas para influir en la respuesta dinámica del material. Para ello, se formularon tres funciones objetivo dependientes del módulo de Young (E), la compresibilidad (K), el módulo cortante (G) y el coeficiente de Poisson (ν) efectivos, siguiendo un enfoque similar al propuesto por Wu et al. (2021).

La primera OF (F_1) minimiza E con el propósito de obtener una estructura altamente deformable, capaz de soportar presiones hidrostáticas (ignorando cualquier efecto del cizallamiento). La segunda OF (F_2), es una forma alternativa de la F_2 del primer enfoque, donde se minimiza K y maximiza G , favoreciendo una estructura con alta capacidad de compresión pero con baja resistencia a cortantes. Finalmente, la tercera OF (F_3) emplea el coeficiente de Poisson, promoviendo la generación de una estructura auxética (o con coeficiente de Poisson nulo), la cual es conocida por inducir bandas de parada bien definidas en bajas frecuencias (Saddek et al., 2023). Las OF son:

$$F_1 = E + R \quad (175)$$

$$F_2 = K - G + R \quad (176)$$

$$F_3 = -\nu + R \quad (177)$$

Siendo

$$E = C_{11}^H + C_{22}^H + C_{33}^H \quad (178)$$

$$\nu = \frac{C_{12}^H + C_{13}^H + C_{23}^H}{2E} \quad (179)$$

Siendo E y ν el modulo de young y de Poisson respectivamente.

5.4 Resultados de proceso generativo e Idealización de mMM

Los resultados del proceso generativo de los mMM se presentan en dos etapas, correspondientes a los enfoques utilizados en las OFs. En primer lugar, se muestran los resultados obtenidos con el enfoque directo (ver Figura 37), seguidos por los del enfoque indirecto, considerando tanto el caso de elasticidad lineal como el de no linealidad geométrica (ver Figuras 41 y 42). En cada etapa se incluyen imágenes representativas de las fases de procesado y postprocesado, con el objetivo de evaluar la calidad y definición de las topologías generadas.

A continuación, se evalúan los tensores de elasticidad (C^H) correspondientes a la topología idealizada de cada caso (ver Cuadros 1, 2, 3 y Figuras 38 y 43). Posteriormente, se realiza un análisis de la transmisibilidad de aceleraciones de base para cada mMM obtenido (ver Figuras 39, 44 y 45). Se aclara que la primera evaluación del tensor C^H fue realizada utilizando el módulo *Material Designer* de ANSYS (ANSYS Inc., 2022), el cual está limitado a modelos en elasticidad lineal. Esta limitación se acepta inicialmente como una aproximación válida y útil para caracterizar comparativamente las distintas topologías generadas. Sin embargo, en el caso de los mMM en los

que se consideró no linealidad geométrica, se empleó el módulo *Mechanical* de ANSYS, en el cual se evaluaron dos tipos de estado de deformación (uno de tracción y otro de corte) para el cálculo de los componentes C_{11} , C_{21} y C_{44} , mediante 10 pasos de carga progresivos. Esta estrategia permitió analizar el comportamiento del tensor efectivo frente a grandes deformaciones, con resultados presentados en las Figuras 38 y 43.

Por otro lado, la evaluación de la respuesta armónica y el cálculo de la función de transmisibilidad se realizaron utilizando el módulo *Material Designer* de ANSYS (ANSYS Inc., 2022). Este análisis se ejecuta, por defecto, sobre la configuración inicial indeformada del sistema, lo cual resulta coherente en el caso de los mMM obtenidos mediante modelos elásticos lineales, donde se asume un régimen de pequeñas deformaciones. Sin embargo, cuando se introducen efectos geométricos no lineales, este enfoque pierde validez, ya que la rigidez efectiva del sistema se ve significativamente modificada por la deformación. Diversos autores, como Peng et al. (2012); Qiu et al. (2021), han abordado esta problemática en sistemas no lineales mediante metodologías avanzadas como el Método del Balance Armónico (HBM). No obstante, tanto el modelado explícito de estas no linealidades como la implementación directa del HBM implican una carga computacional elevada y una complejidad matemática considerable. Por esta razón, se optó por una estrategia alternativa: el análisis armónico sobre un estado preesforzado. Esta aproximación permite incorporar de manera indirecta los efectos de rigidez geométrica inducidos por grandes deformaciones, manteniendo al mismo tiempo una formulación linealizada, computacionalmente más eficiente y viable dentro del entorno de simulación considerado.

Este procedimiento se implementa en dos etapas secuenciales: en primer lugar, se aplica una carga estática (en este caso, de corte) con el objetivo de inducir una configuración deformada de equilibrio. A partir de esta configuración, se realiza un análisis armónico linealizado. A diferencia del análisis clásico sobre la configuración inicial, en este caso la matriz de rigidez incluye los efectos de rigidez geométrica inducidos por las tensiones internas generadas durante el paso de preesfuerzo. Esta estrategia puede desarrollarse mediante el módulo *Harmonic Response*, el cual permite incorporar estos efectos de forma eficiente desde el punto de vista computacional. Como

resultado, la evaluación de la función de transmisibilidad se realizó con base en este enfoque, aplicando múltiples niveles de carga cortante (10 N, 100 N, 150 N, 200 N y 250 N), lo que permitió obtener una aproximación del comportamiento dinámico de los mMM en condiciones de operación altamente deformadas.

En el procesamiento de los resultados, se aplicó un filtro para eliminar las densidades intermedias generadas durante el proceso, considerando únicamente un estado sólido (con el módulo *Threshold*). Posteriormente, el postprocesado se llevó a cabo mediante el módulo *Smooth* de ParaView Ayachit (2005), el cual emplea la técnica de suavizado Laplaciano. En este método, cada vértice de la malla se desplaza iterativamente hacia el centroide de sus vértices vecinos, calculando el desplazamiento como la diferencia entre su posición actual y el promedio de las posiciones adyacentes. Se realizaron 100 iteraciones para todos los sólidos, con el objetivo de obtener superficies suaves sin una pérdida significativa de material. Finalmente, la idealización se efectuó manualmente mediante el módulo de modelado 3D de AutoCAD (Autodesk Inc., 2024), generando una superficie en formato .STL, la cual se utilizó posteriormente en los análisis realizados.

Finalmente, para el análisis de las células obtenidas y la evaluación de sus propiedades mecánicas resultantes del proceso generativo, como ya se mencionó, se consideró el material Ti-6Al, una aleación de titanio con excelente desempeño mecánico, ampliamente utilizada en manufactura aditiva con metales y en estudios previos, como los de Fabbrocino et al. (2015); Wu et al. (2021). Por otro lado, en la evaluación de la transmisibilidad, se asumió que el mMM estaba sometido a una excitación armónica en la base unidireccional, representada por una aceleración en cortante de hasta $1g$ ($9806,65mm/s^2$), con el propósito de simular el efecto de las ondas superficiales de un sismo. Adicionalmente, se aplicó una carga de compresión de 100 N en la parte superior del mMM, considerando únicamente la masa mMM generado.

5.4.1 Resultados de mMM con funciones objetivo del primer enfoque (directo)

De acuerdo con los resultados del proceso generativo (ver Figura 37), para las OFs del primer enfoque pueden destacarse varios aspectos relevantes. En primer lugar, la OF F_2 presentó dificultades durante el proceso generativo. En los casos en que se logró un comportamiento estable

(asociado a altos valores de VF), se obtuvieron topologías bien definidas pero funcionalmente ineficaces, ya que dieron lugar a estructuras desconectadas de las caras del RVE o con replicados volumétricos deficientes. Debido a estas limitaciones, los resultados asociados a F_2 fueron excluidos del análisis final.

El proceso generativo con la OF F_1 dio lugar a topologías bien definidas, tanto bajo el modelo en elasticidad lineal como en el modelo con elasticidad no lineal geométrica. Para el caso del modelo elástico lineal, los resultados obtenidos con las dos BS no presentan diferencias significativas, excepto en la región de las esquinas. En particular, la BS con un diámetro de 10 mm desarrolla pequeños vacíos circulares en dichas zonas. Por otro lado, las topologías generadas con el modelo en elasticidad no lineal geométrica presentan una estructura interna cúbica próxima al vacío circular central de la BS, la cual se conecta con la topología externa. La geometría de esta estructura interna varía dependiendo de la BS utilizada. Al comparar los mMM generados en este estudio con los desarrollados por otros autores, se observa una notable similitud con la estructura *Iso-e* propuesta por Li et al. (2021), quienes también abordaron la generación de mMM pentamodales mediante un enfoque comparable, aunque basado en estructuras tipo armadura. Asimismo, se identifica una correspondencia morfológica con el mMM presentado por Wu et al. (2021), con la excepción de la estructura interna desarrollada en los casos con elasticidad no lineal geométrica.

Antes de evaluar el tensor de elasticidad homogeneizado de los mMM obtenidos (ver Cuadro 1), todos los modelos idealizados durante la etapa de postprocesamiento fueron ajustados para mantener una densidad uniforme, correspondiente a una fracción de volumen cercana al 1 % (aproximadamente $44,05\text{kg/m}^3$). Esta decisión se adoptó con el fin de establecer condiciones de comparación equitativas entre los distintos modelos generados, en línea con el enfoque seguido por Wu et al. (2021). Dichos autores demostraron que, incluso con fracciones de volumen reducidas (del orden del 1 % o incluso menores) es posible alcanzar un módulo de cizallamiento bajo sin comprometer una alta rigidez a la compresión.

Se aclara que, la convención utilizada en los resultados es la siguiente: E representa el enfoque, donde 1 corresponde al directo y 2 al indirecto; F indica la función objetivo; L denota

Figura 37

Resultados del proceso de OT, Post-procesado e idealización de para las OF del enfoque 1(directo).

OF	Procesado		Postprocesado		Idealización	
	D=10mm	D=30mm	D=10mm	D=30mm	D=10mm	D=30mm
F1 (Lineal)						
F1 (No lineal)						

elasticidad lineal; NL hace referencia a no linealidad geométrica; y D especifica el diámetro del vacío considerado. Para los mMM generados con la OF del Enfoque 1 (ver Cuadro 1), las relaciones K/G oscilaron entre 91.05 y 179.59, destacando como el mejor desempeño el mMM considerando no linealidad con la BS con vacío de 30 mm ($E_1-F_1-NL-D30$), mientras que el de peor desempeño correspondió al mMM considerando linealidad con BS con vacío de 10 mm ($E_1-F_1-L-D10$) (ver Cuadro 1) resaltando que estos ratios son equiparables con los mMM de Fabbrocino et al. (2015); Wu et al. (2021).

Por otro lado, los valores propios normalizados del tensor de elasticidad homogeneizado (EV) evidencian resultados favorables. Siguiendo la métrica utilizada por Wu et al. (2021), se evaluó la razón entre el mayor y el menor valor propio, obteniendo valores entre 186 ($E_1-F_1-NL-D10$) y 16842 ($E_1-F_1-NL-D30$). No obstante, dicha razón puede resultar engañosa, ya que los mMM obtenidos mediante el modelo elástico lineal presentaron varios valores propios elevados de forma simultánea (Ev6, Ev5 y Ev4), lo cual reduce su aproximación al comportamiento pentamodal. En contraste, los modelos con no linealidad geométrica mostraron una mayor separación entre Ev6 y Ev5, mientras que los valores propios restantes (Ev5 a Ev1) se mantuvieron bajos, lo que sugiere una respuesta más cercana a la ideal pentamodal, con una razón entre el mayor y los demás valores

Tabla 1

Valores del tensor de elasticidad (en Pa) obtenidos con un proceso de homogenización numérica y valores propios para los MM generados con las OF del enfoque 1(directo) y los mMM de referencia.

Parámetro	E1-F1-L-D10	E1-F1-L-D30	E1-F1-NL-D10	E1-F1-NL-D30	PM- Milton y Cherkaev (1995)	PM- Wu et al. (2021)
C[1.1]	1.74E+08	1.51E+08	1.09E+08	9.24E+07	4.66E+08	4.76E+07
C[2.1]	3.53E+07	1.07E+07	2.21E+07	7.19E+07	1.99E+07	9.85E+06
C[3.1]	3.53E+07	1.06E+07	2.21E+07	7.19E+07	1.99E+07	9.86E+06
C[2.2]	1.74E+08	1.51E+08	1.09E+08	9.24E+07	4.66E+08	4.76E+07
C[3.2]	3.53E+07	1.06E+07	2.21E+07	7.19E+07	1.99E+07	9.85E+06
C[3.3]	1.74E+08	1.51E+08	1.09E+08	9.24E+07	4.66E+08	4.76E+07
C[4.4]	2.10E+06	1.78E+06	1.74E+06	1.82E+06	4.73E+06	2.77E+06
C[5.5]	2.10E+06	1.80E+06	1.74E+06	1.83E+06	4.73E+06	2.77E+06
C[6.6]	2.10E+06	1.80E+06	1.74E+06	1.83E+06	4.73E+06	2.77E+06
E	1.71E+08	1.48E+08	9.95E+07	9.75E+07	4.50E+08	4.67E+07
v	0.380	0.345	0.439	0.449	0.474	0.402
G	1.96E+06	1.75E+06	1.69E+06	1.79E+06	4.68E+06	2.74E+06
K	2.38E+08	1.59E+08	2.72E+08	3.21E+08	1.31E+10	7.97E+07
K/G	121.27	91.05	160.99	179.59	2806.59	29.08
Ev Normalizados						
Ev1	0.0000	0.0000	0.0052	0.0001	0.0000	0.0010
Ev2	0.0000	0.0000	0.0052	0.0001	0.0000	0.0010
Ev3	0.0000	0.0000	0.0052	0.0001	0.0000	0.0010
Ev4	0.1957	0.2849	0.0072	0.0074	0.3043	0.1924
Ev5	0.1957	0.2854	0.0074	0.0074	0.3043	0.1925
Ev6	0.6085	0.4295	0.9698	0.9850	0.3912	0.6120
maxval	0.6085	0.4295	0.9698	0.9850	0.3912	0.6120
minval	0.0000	0.0000	0.0052	0.0001	0.0000	0.0010
max/min	13566.70	9366.54	186.90	16842.91	11434.98	590.42

Nota. se consideró el mMM tipo diamante (ver Milton y Cherkaev (1995); Kadic et al. (2019)) y el propuesto por Wu et al. (2021) bajo las mismas condiciones evaluadas en la investigación.

propios en torno a 130.

Destacaron dos casos particulares: el mMM $E_1-F_1-NL-D30$, que presentó la mejor relación K/G, y los mMM obtenidos con el modelo no lineal geométrico ($E_1-F_1-NL-D10$ y $E_1-F_1-NL-D30$), cuyo comportamiento se aproximó más al pentamodal. Adicionalmente, se compararon estos resultados con mMM ampliamente estudiados en la literatura (también pentamodales), como el tipo diamante propuesto por Milton y Cherkaev (1995) y perfeccionado por Schittny et al. (2013a); Kadic et al. (2019). Se utilizó su versión simplificada sin doble cono, desarrollada por Wang et al. (2017), así como la variante pentamodal de Wu et al. (2021), bajo condiciones equivalentes (ver Cuadro 1). Para modelar el mMM tipo diamante, se emplearon las configuraciones predefinidas en

el módulo Material designer de ANSYS (ANSYS Inc., 2022).

Al evaluar los mMM de referencia manteniendo una fracción de volumen del 1 %, el mMM tipo diamante estándar (sin doble cono) presentó el mejor desempeño, con una relación K/G de 2806 y un ratio de valores propios de 11434. Estos resultados superan significativamente a los reportados por Wu et al. (2021), quienes obtuvieron valores de 29 y 590, respectivamente, lo que evidencia que el mMM tipo diamante presenta una relación K/G y un ratio espectral considerablemente superiores. No obstante, el mMM propuesto por Wu et al. (2021) muestra una mayor separación entre E_{v6} y E_{v5} , lo cual lo aproxima más a la definición teórica de un mMM pentamodal.

Sin embargo, al comparar estos resultados con los obtenidos en el Cuadro 1, se observa que todos los materiales generados presentan una mejor relación K/G. En particular, para el mejor resultado obtenido en este estudio ($E_1-F_1-NL-D30$), la relación compresión/cortante es inferior en comparación con el mejor mMM de referencia (el mMM tipo diamante), siendo este último 15.5 veces más alto. Sin embargo, el ratio de valores propios obtenido es un 32 % superior, indicando que la distribución espectral es más cercana a la condición ideal de un mMM pentamodal, lo cual lo posiciona como una alternativa eficiente en términos de comportamiento mecánico.

Por otro lado, al evaluar la evolución del tensor de elasticidad en los mMM obtenidos con un modelo no lineal geométrico, se observa un marcado contraste entre los mMM del enfoque 1 y los mMM de referencia (ver Figura 38). En los mMM generados mediante el primer enfoque destaca un aumento progresivo del componente C_{11} y una disminución de C_{21} con el incremento de la deformación. Este comportamiento contrasta con el de los mMM de referencia: el propuesto por Wu et al. (2021) presenta una evolución opuesta, mientras que el mMM pentamodal tipo diamante estándar no muestra variaciones significativas en C_{11} , y el componente C_{21} primero aumenta y luego disminuye.

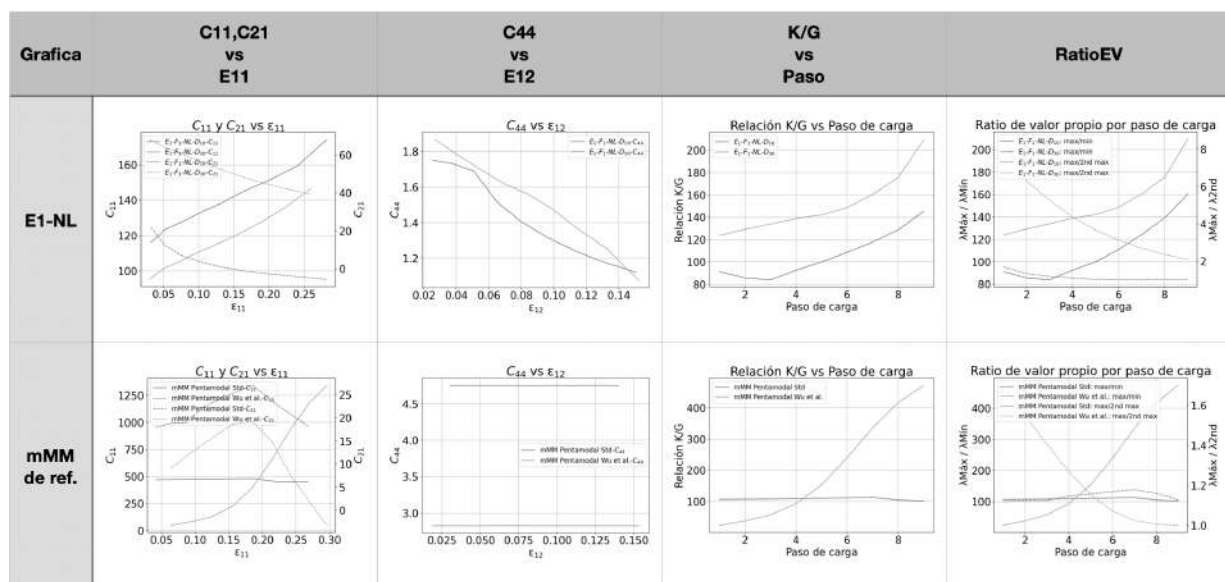
En cuanto al componente C_{44} , los mMM del enfoque 1 exhiben una reducción continua con el aumento de la carga, lo cual es relevante dado que este parámetro está directamente relacionado con la capacidad de aislamiento. En cambio, los mMM de referencia mantienen valores prácticamente constantes para dicho componente.

Por otro lado, la relación K/G en los mMM propuestos aumenta con el incremento del paso de carga, indicando que a mayor deformación se obtiene una mejor proporción entre rigidez volumétrica y cortante. En contraste, el mMM tipo diamante estándar no presenta variaciones apreciables en esta relación, mientras que el modelo de Wu et al. (2021) muestra un aumento considerable.

Finalmente, al analizar el ratio de valores propios, se observa que el mMM tipo diamante estándar no presenta una buena separación modal, ya que mantiene prácticamente constantes tanto la relación entre el valor propio máximo y mínimo (Ev_6/Ev_1), como entre el máximo y el siguiente (Ev_6/Ev_5), a lo largo de los diferentes pasos de carga. En contraste, los mMM restantes muestran un aumento progresivo en el ratio Ev_6/Ev_1 y una reducción de Ev_6/Ev_5 , lo cual indica que, a medida que aumenta la deformación, el comportamiento se aleja del ideal pentamodal, perdiendo selectividad modal.

Figura 38

Evaluación de componentes C_{11} , C_{21} , C_{44} (en MPa), relación K/G y de valores propios para los mMM obtenidos con modelo no lineal geométrico con las OF del primer enfoque y de referencia.



Por otro lado, en el ensayo de transmisibilidad (ver Figura 39) los mMM obtenidos desarrollan

picos de antirresonancia entre -36 y -48 dB en frecuencias relativamente bajas (menores a 1000 Hz) y un rango considerable de aislamiento (transmisibilidad <0). En particular, los mMM obtenidos en elasticidad lineal mostraron rangos de aislamiento de 0-600 Hz y 0-160 Hz. Adicionalmente, los mMM con elasticidad no lineal geométrica presentaron rangos ligeramente superiores de 0-450 Hz y 0-550 Hz. Entre todos, el mejor desempeño lo presentó la estructura $E_1-F_1-L-D30$.

Figura 39

Funciones de transmisibilidad para los mMM generados con las OF del enfoque 1(directo).

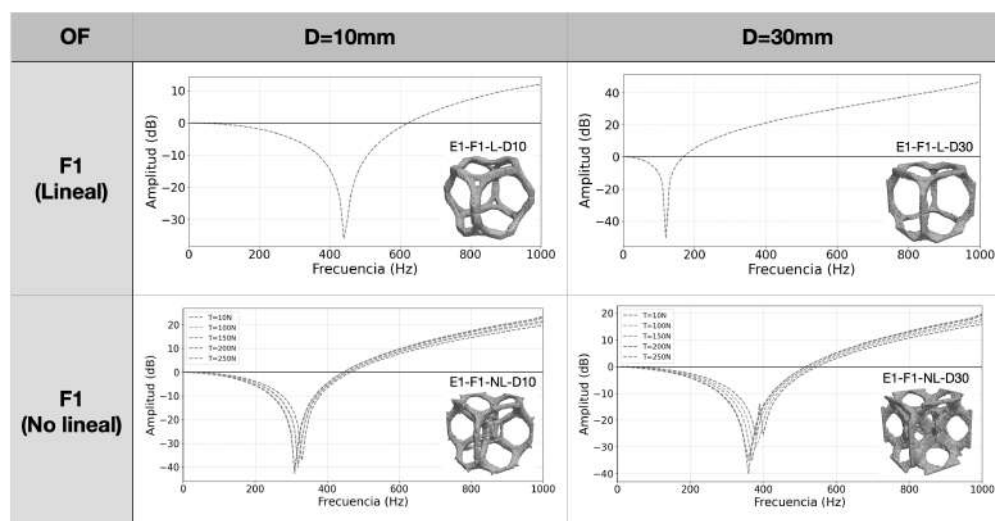
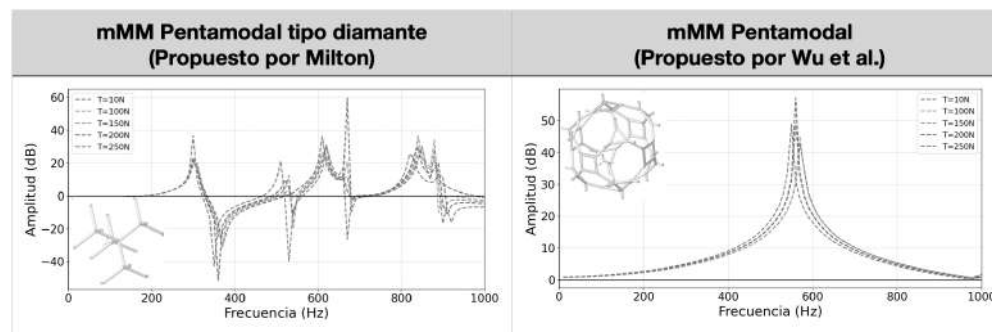


Figura 40

Funciones de transmisibilidad para los mMM pentamodales de referencia



Nota. mMM tomados de Milton y Cherkaev (1995); Wu et al. (2021)

En cuanto a los mMM de referencia, la estructura tipo diamante propuesta por Milton y Cherkaev (1995) mostró múltiples rangos de aislamiento en las franjas de 330-500Hz, 500-550 (en algunos casos preesforzados) y posterior a los 900Hz. Los distintos modelos preesforzados no mostraron cambios considerables con excepción de algunas zonas donde se desarrollan picos de resonancia o antiresonancia a los 360Hz, 530Hz y 680Hz, en donde se hacen más pronunciados o se invierten. Por otro lado, la propuesta de Wu et al. (2021) no mostró aislamiento en frecuencias inferiores a 1000 Hz, sino que presentó un pico de amplificación (resonancia) cercano a los 570 Hz. (ver Figura 40).

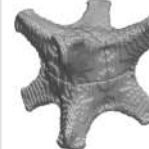
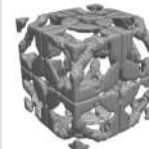
5.4.2 Resultados de mMM con funciones objetivo del segundo enfoque (indirecto)

Por otro lado, al utilizar las OF propuestas en el segundo enfoque, se obtuvieron diferencias más marcadas entre los modelos elásticos lineales y los no lineales geométricos (Ver figuras 41 y 42). En particular, los mMM generados con la OF F_1 , específicamente aquellos con un vacío de 10 mm tanto en el modelo lineal como en el no lineal, mostraron similitudes con los mMM de tipo IV presentados por Chatterjee et al. (2021). En el caso del modelo no lineal geométrico, la célula resultante es más abierta, con elementos más separados. En contraste, los mMM obtenidos con una BS y un vacío de 30 mm presentan diferencias radicales: el modelo no lineal geométrico exhibe una estructura hueca radial de ocho brazos que se extienden hasta las esquinas del contorno (topología no reportada en la literatura consultada), mientras que el modelo elástico lineal se asemeja a un octaedro, similar al desarrollado por Lu et al. (2022).

La OF F_2 generó mMM con estructuras menos definidas. En el caso de una BS con un vacío de 10 mm, el modelo elástico lineal resultó en un mMM de tipo cúbico con pequeños apoyos en los vértices, mientras que el modelo no lineal geométrico se asemeja a una estructura de tipo P-Shape, ambas configuraciones previamente reportadas por Yu et al. (2018); Lu et al. (2022) (ver Figura 41). Sin embargo, cuando se utilizó una BS con un vacío de 30 mm, las topologías obtenidas fueron más similares entre sí. Para el modelo lineal elástico, el mMM resultante se asemeja a un octaedro truncado (o una estructura tipo armadura de Kelvin), mientras que en el caso no lineal geométrico, la estructura obtenida es más cercana a un cubo truncado, ambos reportados por Lu et al. (2022).

Figura 41

Resultados del proceso de OT, Post-procesado e idealización de para las OF del enfoque 2 en elasticidad lineal.

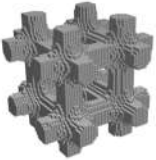
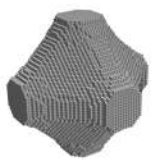
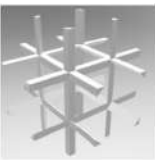
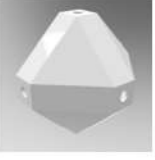
OF	Procesado		Postprocesado		Idealización	
	D=10mm	D=30mm	D=10mm	D=30mm	D=10mm	D=30mm
F1						
F2						
F3						

Finalmente, los mMM generados con la OF F_3 presentaron en todos los casos estructuras auxéticas reentrantes similares al panal de abejas inverso. Sin embargo, los obtenidos en esta investigación presentan un patrón circular en las caras desde donde se desarrollan las conexiones, como los reportados por Shokri Rad et al. (2015); Li et al. (2023). En el caso de elasticidad lineal, la topología general se mantiene, aunque el patrón circular en las caras es más grande cuando se usa una BS de 30 mm. Por otro lado, en el modelo con no linealidad geométrica, se observa una mayor concentración de material en los vértices, con un patrón más pronunciado cuando se emplea una BS de 10 mm.

Al evaluar el tensor de elasticidad homogenizado de los mMM obtenidos con las OF del segundo enfoque (ver Cuadros 2 y 3), se destacan las relaciones K/G máximas y mínimas alcanzadas de 57.14 ($E_2-F_1-L-D10$) y 3.31 ($E_2-F_3-L-D30$) en elasticidad lineal, y de 104.71 ($E_2-F_1-NL-D10$) y 2.16 ($E_2-F_2-NL-D30$) al considerar no linealidad geométrica, en donde se destaca de la OF F_1

Figura 42

Resultados del proceso de OT, Post-procesado e idealización de para las OF del enfoque 2 en elasticidad no linear geométrica.

OF	Procesado		Postprocesado		Idealización	
	D=10mm	D=30mm	D=10mm	D=30mm	D=10mm	D=30mm
F1						
F2						
F3						

desarrolló las mejores relaciones K/G. Asimismo, los mMM obtenidos con la OF F_3 , diseñados con el propósito de generar estructuras auxéticas, muestran coeficientes de Poisson negativos con valores que oscilan entre -0.458 ($E_2-F_3-L-D10$) y -0.401 ($E_2-F_3-NL-D30$). Estos resultados se acercan a los de mMM auxéticos extremos reportados por Bertoldi et al. (2017); Yu et al. (2018).

Adicionalmente, el mejor ratio de valores propios se obtuvo con la OF F_1 , tanto en el modelo elástico lineal como en el no lineal. No obstante, su desempeño global fue inferior en comparación con los resultados obtenidos con las OF del primer enfoque y con los mMM de referencia propuestos por Milton y Cherkaev (1995); Wu et al. (2021). Las métricas basadas en la relación entre valores propios presentan cifras elevadas, con un rango que varía entre 37.41 y 13497.4. Sin embargo, al igual que con las OF del primer enfoque, estos valores deben interpretarse con cautela, ya que los mMM obtenidos no fueron diseñados explícitamente para maximizar dicha métrica. Esta situación se refleja en los valores propios, en la cual no se evidencia un patrón claro caracterizado por un

único valor propio dominante y los restantes cercanos a cero, lo que indica que no se alcanzó una topología con características pentamodales bien definidas.

Tabla 2

Valores del tensor de elasticidad (en Pa) obtenidos con un proceso de homogenización numérica y valores propios para los MM generados con las OF del enfoque 2 en elasticidad lineal.

Parámetro	E2-F1-L-D10	E2-F2-L-D10	E2-F3-L-D10	E2-F1-L-D30	E2-F2-L-D30	E2-F3-L-D30
C[1.1]	2.3E+08	1.6E+08	1.6E+08	1.1E+07	1.1E+08	1.2E+08
C[2.1]	9.7E+06	3.3E+07	-7.1E+07	1.0E+07	3.1E+07	-5.0E+07
C[3.1]	9.7E+06	3.3E+07	-7.0E+07	1.0E+07	3.1E+07	-5.0E+07
C[2.2]	2.3E+08	1.6E+08	1.6E+08	1.1E+07	1.1E+08	1.2E+08
C[3.2]	9.7E+06	3.3E+07	-7.1E+07	1.0E+07	3.1E+07	-5.0E+07
C[3.3]	2.3E+08	1.6E+08	1.6E+08	1.1E+07	1.1E+08	1.2E+08
C[4.4]	2.1E+06	1.0E+07	7.8E+06	9.1E+06	1.8E+07	4.9E+06
C[5.5]	2.1E+06	1.0E+07	7.8E+06	9.1E+06	1.8E+07	4.9E+06
C[6.6]	2.1E+06	1.0E+07	7.8E+06	9.1E+06	1.8E+07	4.9E+06
E	3.4E+08	1.6E+08	1.5E+08	1.0E+07	9.7E+07	1.1E+08
ν	0.041	0.172	-0.458	0.483	0.226	-0.428
G	2.1E+06	9.9E+06	7.7E+06	9.0E+06	1.8E+07	4.8E+06
K	1.22E+08	7.97E+07	2.61E+07	9.84E+07	5.89E+07	2.03E+07
K/G	57.14	8.07	3.38	10.91	3.31	4.25
EV normalizados						
Ev1	0.0000	0.0012	0.0006	0.0005	0.0081	0.0004
Ev2	0.0000	0.0012	0.0006	0.0005	0.0081	0.0004
Ev3	0.0000	0.0012	0.0006	0.0668	0.0081	0.0004
Ev4	0.3044	0.1925	0.0030	0.0668	0.1395	0.0038
Ev5	0.3044	0.1925	0.4957	0.0668	0.1395	0.4971
Ev6	0.3912	0.6115	0.4996	0.7986	0.6966	0.4978
maxval	0.3912	0.6115	0.4996	0.7986	0.6966	0.4978
minval	0.0000	0.0012	0.0006	0.0005	0.0081	0.0004
max/min	13497.42	519.06	859.92	1540.56	85.95	1147.79

Por otro lado, al evaluar la evolución del tensor de elasticidad en los mMM producto de un modelo con no linealidad geométrica, se observa un patrones marcados entre los mMM del enfoque 2 (ver Figura 43). Primero se observa un comportamiento relativamente estable de los componentes C_{11} , C_{21} y C_{44} a medida que aumentan las deformaciones, con excepción de aquellos obtenidos mediante las OF F_2 y F_3 . En particular, los mMM asociados a la OF F_3 (auxéticos) muestran un aumento inicial y posterior estabilización del componente C_{11} , mientras que el componente C_{21} experimenta un incremento seguido de una disminución conforme se incrementa la deformación.

Por su parte, los mMM obtenidos con la OF F_2 presentan un comportamiento no monótono en el componente C_{44} , caracterizado por un aumento inicial, una disminución intermedia y un nuevo incremento en etapas avanzadas de deformación.

Tabla 3

Valores del tensor de elasticidad (en Pa) obtenidos con un proceso de homogenización numérica y valores propios para los MM generados con las OF del enfoque 2 en elasticidad no lineal geométrica.

Parámetro	E2-F1-NL-D10	E2-F2-NL-D10	E2-F3-NL-D10	E2-F1-NL-D30	E2-F2-NL-D30	E2-F3-NL-D30
C[1.1]	3.1E+08	9.1E+07	1.6E+08	1.7E+08	1.4E+08	1.3E+08
C[2.1]	1.2E+07	2.2E+07	-6.8E+07	1.0E+07	3.5E+07	-5.3E+07
C[3.1]	1.2E+07	2.2E+07	-6.8E+07	1.0E+07	3.5E+07	-5.3E+07
C[2.2]	3.1E+08	9.1E+07	1.6E+08	1.7E+08	1.4E+08	1.3E+08
C[3.2]	1.2E+07	2.2E+07	-6.8E+07	1.0E+07	3.5E+07	-5.3E+07
C[3.3]	3.1E+08	9.1E+07	1.6E+08	1.7E+08	1.4E+08	1.3E+08
C[4.4]	3.2E+06	2.3E+07	7.8E+06	3.3E+06	3.4E+07	5.4E+06
C[5.5]	3.2E+06	2.3E+07	7.8E+06	3.3E+06	3.4E+07	5.4E+06
C[6.6]	3.2E+06	2.3E+07	7.8E+06	3.3E+06	3.4E+07	5.4E+06
E	3.0E+08	8.9E+07	1.6E+08	1.6E+08	1.3E+08	1.2E+08
ν	0.347	0.198	-0.418	0.058	0.196	-0.401
G	3.2E+06	2.3E+07	7.8E+06	3.3E+06	3.4E+07	5.4E+06
K	3.30E+08	4.88E+07	2.85E+07	6.18E+07	7.33E+07	2.27E+07
K/G	104.71	2.16	3.66	18.79	2.16	4.23
EV normalizados						
Ev1	0.0004	0.0188	0.0006	0.0001	0.0168	0.0004
Ev2	0.0004	0.0188	0.0006	0.0001	0.0168	0.0004
Ev3	0.0004	0.0188	0.0006	0.0001	0.0168	0.0004
Ev4	0.0038	0.1599	0.0066	0.2915	0.1605	0.0088
Ev5	0.4971	0.1599	0.4952	0.2915	0.1605	0.4949
Ev6	0.4978	0.6239	0.4964	0.4166	0.6287	0.4949
maxval	0.4978	0.6239	0.4964	0.4166	0.6287	0.4949
minval	0.0004	0.0188	0.0006	0.0001	0.0168	0.0004
max/min	1147.79	33.23	859.67	3282.98	37.41	1129.16

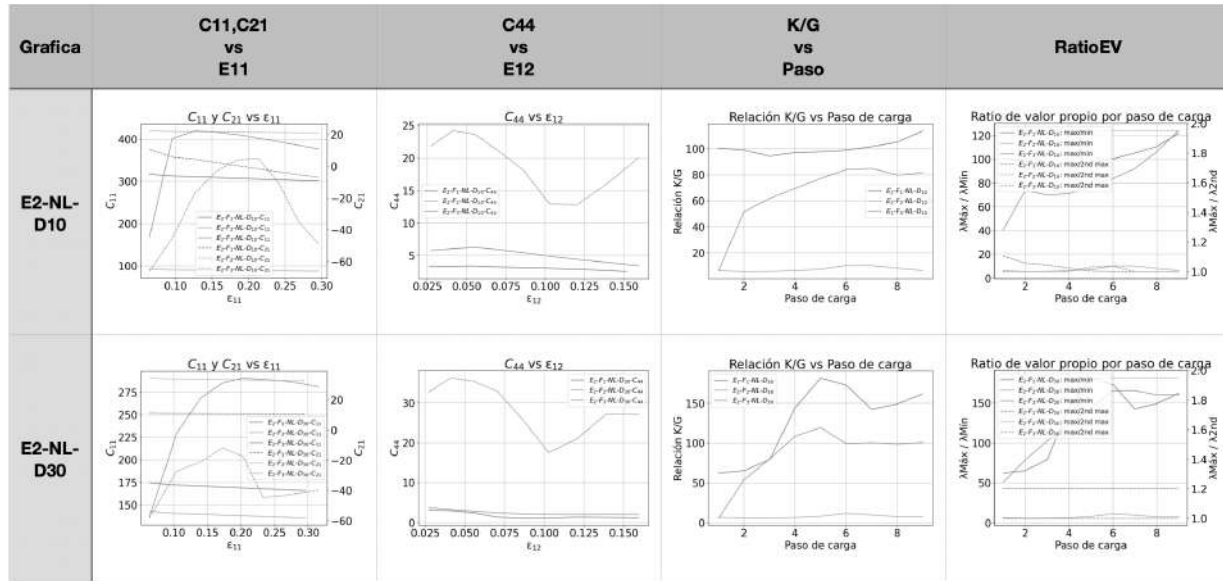
En cuanto a la relación K/G , se identifica una tendencia ascendente en los mMM obtenidos con las OF F_1 y F_3 , lo cual indica una mejora relativa en la rigidez volumétrica frente a la rigidez al corte. En contraste, los mMM generados con la OF F_2 presentan un valor constante y bajo de esta relación, lo que sugiere una menor capacidad de aislamiento en este aspecto.

Finalmente, el análisis del ratio de valores propios no evidencia un comportamiento deseable desde el punto de vista pentamodal, considerando que ninguno de estos mMM fue diseñado con dicho propósito. Si bien se observa un aumento en el ratio entre el valor propio máximo y el mínimo (Ev_6/Ev_1), la relación entre el valor propio máximo y el siguiente (Ev_6/Ev_5) permanece prácticamente constante y con un valor reducido, lo que indica una falta de diferenciación modal significativa y, por tanto, una ausencia de comportamiento pentamodal.

Al evaluar la transmisibilidad de los mMM generados con las OF del segundo enfoque (ver

Figura 43

Evaluación de componentes C_{11} , C_{21} , C_{44} (en MPa), relación K/G y de valores propios para los mMM obtenidos con modelo no lineal geométrico con las OF del primer segundo enfoque.



Figuras 44 y 45), resaltan algunos patrones. En el caso de los mMM obtenidos bajo elasticidad lineal, las OFs F_1 y F_2 no lograron desarrollar capacidad de aislamiento con excepción del la OF F_3 , que desarrolló aislamiento en un rango de frecuencias de 400 Hz a 750 Hz y de 200 Hz a 500 Hz, con picos de antirresonancia de -38dB y -31dB a 620 Hz y 400 Hz para los casos con BS con vacío de 10 mm y 30 mm, respectivamente.

Por otro lado, con los mMM obtenidos considerando la no linealidad geométrica, los resultados fueron mejores. El único caso que no desarrolló capacidad de aislamiento ni frecuencias de antirresonancia por debajo de 1000 Hz fue el obtenido $E_2-F_2-NL-D30$ sin embargo, resalta que los valores en los que amplifica la salida de aceleración son bajos (0.8dB) en el rango de 1000Hz. En los casos restantes, los mMM generados con las OFs F_1 y F_2 lograron capacidades de aislamiento, aunque sin desarrollar frecuencias de antirresonancia por debajo de 1000 Hz con excepción del $E_2-F_1-NL-D10$ que la desarrolló en valores que oscilan entre los 750Hz y 800Hz. Finalmente, los tres mMM restantes, obtenidos con las OF F_3 lograron capacidad de aislamiento y

presentaron frecuencias de antirresonancia en aproximadamente entre los 240Hz y 300Hz para el $E_2-F_3-NL-D10$ y entre 420 Hz y 490 Hz para el $E_2-F_3-NL-D10$.

Figura 44

Funciones de transmisibilidad para los MM generados con las OF del enfoque 2 en elasticidad lineal.

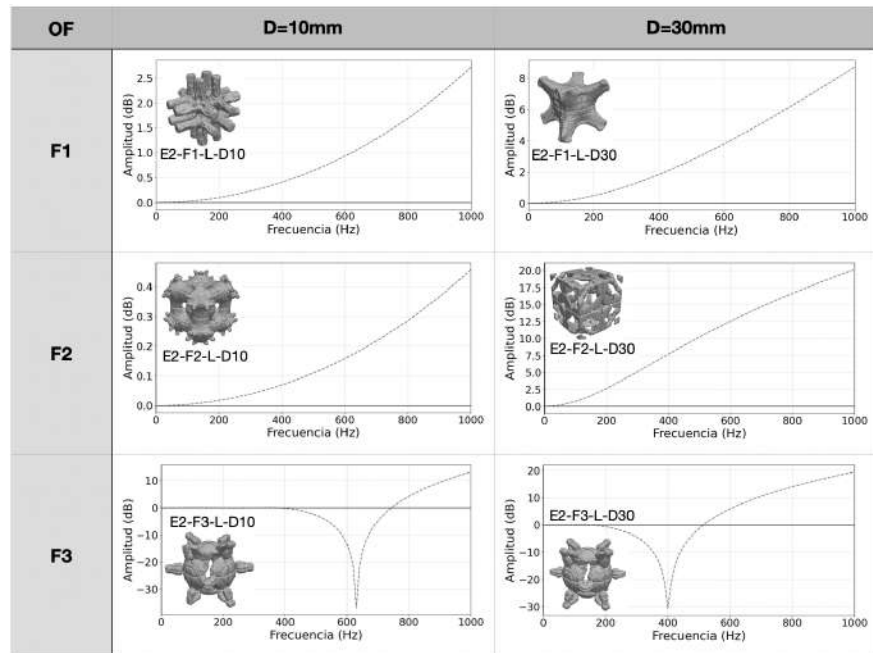
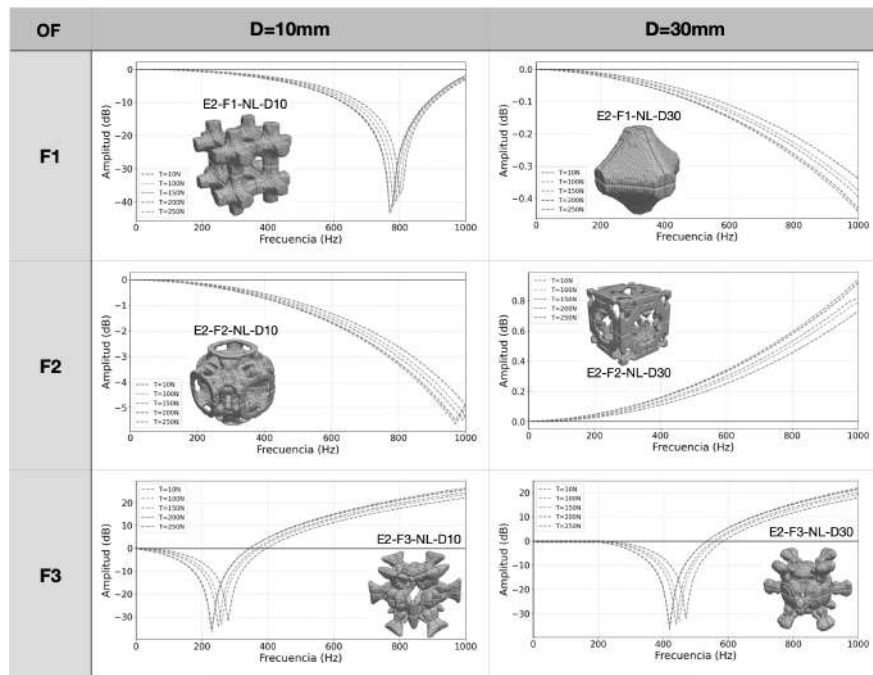


Figura 45

Funciones de transmisibilidad para los MM generados con las OF del enfoque 2 en elasticidad no lineal geométrica.



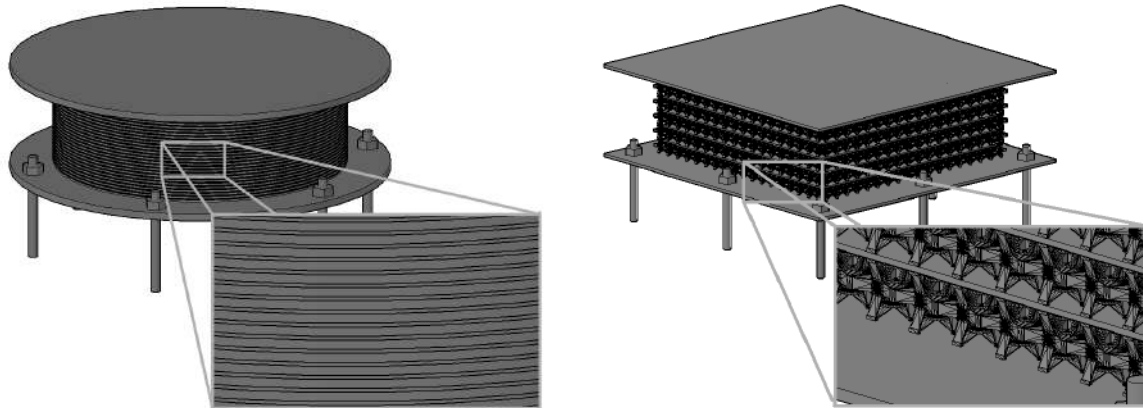
6 Propuesta de sistemas de protección sísmica con mMM: aislador sísmico de base

El dispositivo de SPS basado en mMM propuesto en este trabajo, emplea las células obtenidas en la sección 5.4. El desarrollo del dispositivo sigue propuestas como las de Fabbrocino et al. (2015); Fabbrocino y Amendola (2017); Fraternali et al. (2018), quienes utilizaron un mMM pentamodal tipo diamante de doble cono. El SPS se obtiene mediante el replicado de la célula mMM (obtenida en el proceso generativo) en un arreglo matricial en todas las direcciones, lo que da lugar al llenado homogéneo de un paralelepípedo. Sin embargo, en este caso se impuso una restricción. Al igual que en los SPS clásicos, para garantizar un adecuado comportamiento mecánico y una distribución uniforme de las cargas axiales y cortantes en el dispositivo, se formuló un prototipo laminado. El SPS es de base rectangular con 6 capas de mMM de 50mm de altura con capas intermedias (espaciadores) de 5mm y dos capas terminales de 15mm (ver Figura 46). En este diseño, cada capa de mMM se une mediante una capa uniforme de material, similar a los dispositivos tipo LRB (Lead Rubber Bearing).

Adicionalmente, los sistemas basados en mMM fueron comparados con un SPS clásico de tipo LRB, en cumplimiento del último objetivo específico (ver Capítulo 1). Para ello, se decidió replicar algunas características del estudio presentado por Fabbrocino et al. (2015) y se llevó a cabo la comparación con un SPS elastomérico clásico, específicamente el modelo E(RB-800), desarrollado por Dynamic Isolation Systems, Inc. Este sistema cuenta con un diámetro de 33.5”(0.85 m) y una altura de 13.85”(0.3518 m). Está compuesto por 29 capas de caucho de 7 mm de espesor cada una, 28 láminas de acero espaciadoras de 3.04 mm, dos capas terminales de caucho de 31.8 mm y tapas, sin tapón de plomo. Los datos experimentales del sistema clásico fueron obtenidos por el Caltrans Testing Facility de la Universidad de California, San Diego, y se extrajeron del trabajo de Fabbrocino et al. (2015) (ver Figura 47).

Figura 46

Modelos de SPS usados para ensayos de compresión, cortante, transmisibilidad y respuesta sísmica.



(a) SPS elastomérico clásico tipo E(RB-800) de
Dynamic Isolation Systems, Inc.

(b) Prototipo de SPS basado en un mMM
auxético (E_2 - F_3 - L - $D30$).

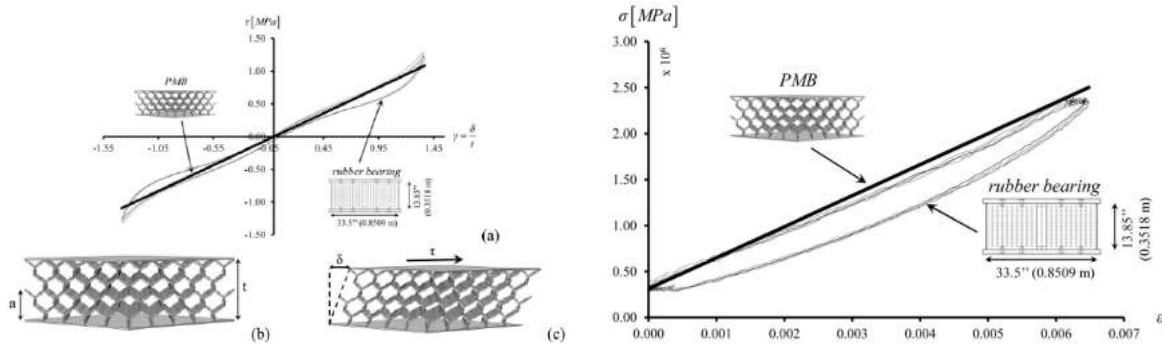
6.1 Ensayo numérico de compresión y cortante

Al analizar los ensayos a compresión y cortante de los diferentes prototipos de SPS con mMM (ver Figura 48), considerando que en la prueba no se incluye disipación en el sistema, se destaca el bajo desempeño del mMM pentamodal propuesto por Wu et al. (2021). Este modelo presentó deformaciones cercanas a 0.07 en el ensayo de compresión, el doble de la deformación observada en el mMM con el siguiente peor desempeño (el E_1 - F_1 - L - $D30$), cuyo valor fue cercano a 0.035. En contraste, los demás prototipos de SPS candidatos mostraron deformaciones significativamente menores, con valores apenas superiores a 0.014, como se presenta en la Figura 48.

Además, se observa una diferencia notable en el desempeño de los mMM de tipo diamante, comparando la versión estándar con la versión de doble cono mejorada por Kadic et al. (2012). Esta última representa una optimización del mMM originalmente formulado por Milton y Cherkaev (1995). El mMM de doble cono mostró el mejor comportamiento, siendo la alternativa más cercana al desempeño del LRB clásico. Sin embargo, la versión estándar tuvo un rendimiento inferior,

Figura 47

Comparación de ensayos mecánicos numéricos de SPS con mMM pentamodal de tipo diamante de doble cono y uno aislador elastomérico comercial tipo E(RB-800)



(a) Ensayo a cortante de SPS con mMM pentamodal y uno clásico.

(b) Ensayo a compresión de SPS con mMM pentamodal y uno clásico.

Nota. Tomado de: Fabbrocino et al. (2015).

comparable al de varios mMM obtenidos en esta investigación, especialmente en los ensayos de corte. Esto resalta un aspecto crítico de este diseño: su alto desempeño depende en gran medida de la conexión en los nodos y la configuración del elemento estructural, lo que hace que la geometría de doble cono sea un factor crítico (para mejorar el desempeño).

En promedio, los mMM obtenidos utilizando el modelo lineal presentaron un desempeño ligeramente inferior en comparación con los obtenidos mediante el modelo no lineal geométrico. En particular, las deformaciones fueron menores en el test de corte y mayores en el test de compresión para el modelo lineal. En los ensayos de corte, los mMM $E_1-F_1-L-D10$ y $E_1-F_1-L-D30$ destacaron dentro del modelo lineal, mientras que en el modelo con no linealidad geométrica sobresalieron las configuraciones $E_1-F_1-NL-D30$ y $E_2-F_1-NL-D10$, mostrando resultados comparables al mMM pentamodal tipo diamante de doble cono propuesto por Fabbrocino et al. (2015), así como al comportamiento del LRB, con una relación de deformación máxima (γ) entre 1.0 y 1.15 para los diseños obtenidos en este estudio, en comparación con un valor de 1.35 reportado para el mMM de

tipo diamante de doble cono. En los ensayos de compresión, los modelos con mejor desempeño fueron $E_1-F_1-L-D10$ y $E_2-F_1-L-D10$ en el caso lineal, así como $E_1-F_1-NL-D10$ y $E_2-F_1-NL-D10$ en el caso no lineal con valores que oscilaban entre 0.055 y 0.1.

En general, la configuración E_1-F_1 mostró un desempeño prometedor tanto en los ensayos de corte como en los de compresión. En el segundo enfoque, la configuración E_2-F_1 también destacó en ambas pruebas. Sin embargo, E_2-F_2 no presentó un comportamiento sobresaliente, salvo en los ensayos de compresión, mientras que E_2-F_3 mostró el desempeño más problemático. En este último caso, el proceso generativo derivó en una estructura rígida (algo que se esperaba por ser un mMM auxético), que en el test de corte su desempeño fue bajo y no destacó en el ensayo de compresión.

6.2 Ensayo numérico de transmisibilidad

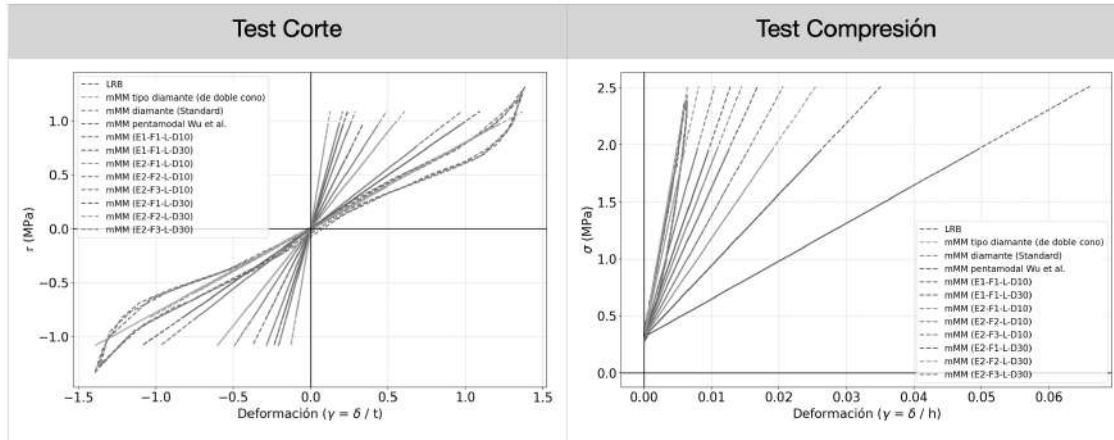
El ensayo de transmisibilidad propuesto se aplicó a los múltiples prototipos de SPS (46), utilizando todos los mMM obtenidos en esta investigación. Para ello, se consideró la cara inferior de la lámina base como una superficie restringida al movimiento, mientras que la cara superior de la lámina superior se utilizó como la zona de medición para las aceleraciones de salida. La evaluación se realizó aplicando una aceleración en una única dirección en corte.

Adicionalmente, fue necesario introducir una serie de modificaciones al ensayo para evaluar el desempeño dinámico de los SPS. Dado que estos sistemas están basados en mMM con fracciones de volumen bajas, la estructura resultante presenta una densidad considerablemente reducida. Si la evaluación se hiciera sin considerar una posible masa adicional derivada de la edificación o estructura a aislar, los resultados obtenidos serían poco representativos y distarían significativamente de la realidad. Esta limitación se hace evidente en las pruebas de transmisibilidad preliminares, cuyos resultados se presentan en la Figura 49 en donde ni los mMM de referencia (con una débil excepción del mMM pentamodal obtenido por Wu et al. (2021) desarrollando aislamiento de vibraciones a los 75Hz) ni los obtenidos en esta investigación desarrollan capacidades aceptables de aislamiento sísmico.

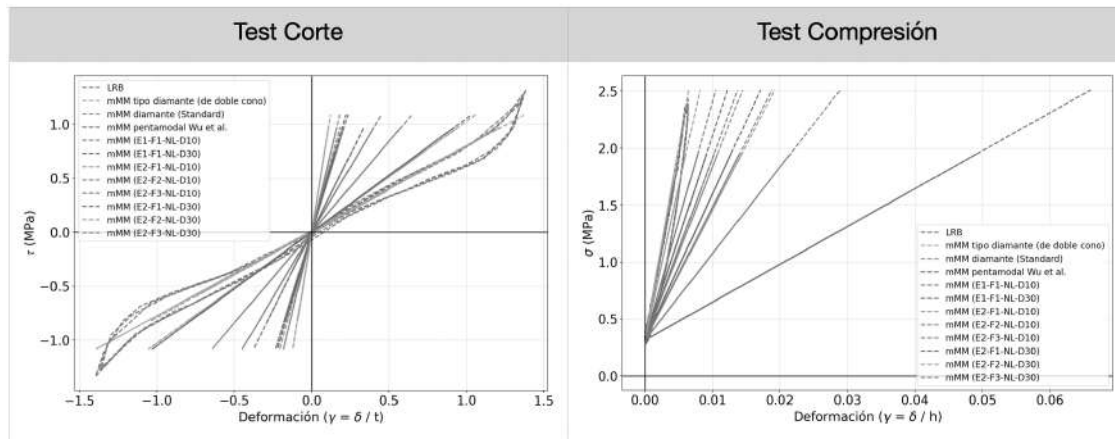
En este contexto, al modelo del ensayo de transmisibilidad, se le agregó un volumen fijo de $1m^3$ en la parte superior del SPS (ver Figura 50) que va a tener una densidad variable (variando la

Figura 48

Comparación de ensayos numéricos de SPS basado en mMM con un aislador tipo LRB comercial.



(a) *Ensayo a compresión y cortante de SPS con mMM obtenidos en elasticidad lineal*



(b) *Ensayo a compresión y cortante de SPS con mMM obtenidos en elasticidad no lineal*

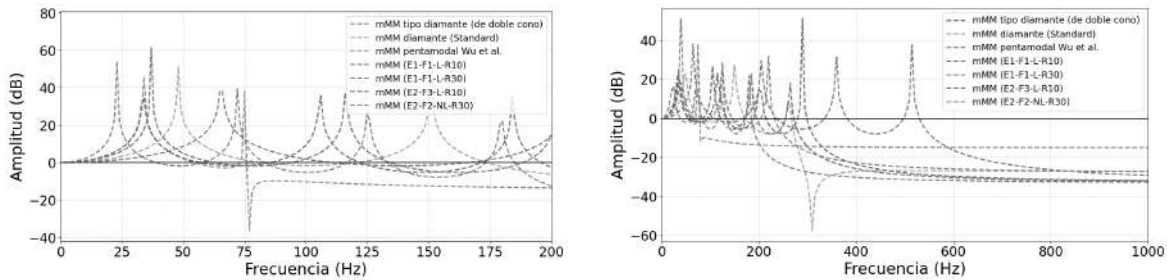
geométrica

masa). El objetivo de esta modificación fue simular condiciones más cercanas a la operación real del dispositivo. Se analizaron distintos escenarios, variando la masa desde 1000 kg hasta 4500 kg, en intervalos de 500 kg. Este rango de valores permitió evaluar de manera exhaustiva la capacidad de aislamiento del dispositivo bajo diferentes masas.

En los ensayos de transmisibilidad ajustados (ver Figuras 51 y 52), se observa un contraste significativo en comparación con el primer ensayo (ver Figura 49) y con los ensayos mecánicos de

Figura 49

Funciones de transmisibilidad de SPS compuesto por mMM sin masa adicional (para algunos de los mMM obtenidos)

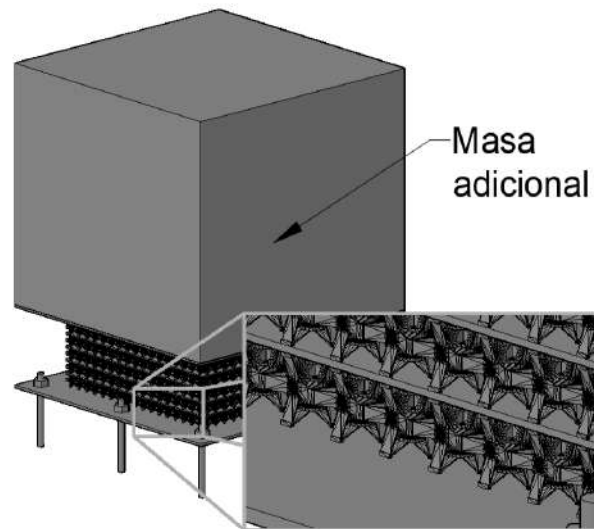


(a) SPS con mMM en rango de 0Hz-200Hz.

(b) SPS con mMM en rango de 0Hz-1000Hz.

Figura 50

Prototipo de SPS basado en mMM (la figura presenta un mMM auxético $E_2-F_3-L-D_{30}$) considerando una masa adicional para la evaluación de la transmisibilidad.



compresión y corte (ver Figura 48). En esta evaluación, el mMM pentamodal de Wu et al. (2021) muestra un desempeño superior al promedio de todos los mMM obtenidos, alcanzando una capacidad de aislamiento desde los 18 Hz y 8 Hz al emplear una masa de 1000 kg y 4500 kg, respectivamente. El mejor desempeño, tanto en el modelo lineal como en el modelo no lineal geométrico, lo presenta

el mMM tipo diamante de doble cono propuesto por Kadic et al. (2012). No obstante, al igual que en los ensayos de compresión y corte, su versión estándar muestra una reducción considerable en el desempeño, obteniendo valores promedio y alcanzando la capacidad de aislamiento a partir de los 10 Hz y 5 Hz al utilizar masas de 1000 kg y 4500 kg, respectivamente.

Al evaluar la transmisibilidad de los mMM obtenidos (ver Figuras 51 y 52), se observa que la capacidad de aislamiento mejora al aumentar la masa evaluada, manteniéndose un patrón de desempeño consistente en todos los casos, tanto en el modelo lineal como en el no lineal geométrico. En el modelo lineal, los mMM ordenados de mejor a peor desempeño son: E_1-F_1-D10 , E_1-F_1-D30 , E_2-F_1-D10 , E_2-F_3-D30 , E_2-F_3-D10 , E_2-F_1-D30 , E_2-F_2-D10 y E_2-F_2-D30 , logrando aislamiento en un rango de frecuencias de 14 Hz a 40 Hz con 1000 kg y de 7 Hz a 19 Hz con 4500 kg. Por otro lado, en el modelo no lineal geométrico, el orden de desempeño es: E_1-F_1-D10 , E_1-F_1-D30 , E_2-F_1-D30 , E_2-F_1-D10 , E_2-F_3-D30 , E_2-F_3-D10 , E_2-F_2-D10 y E_2-F_2-D30 , con capacidad de aislamiento en el rango de 15 Hz a 55 Hz para 1000 kg y de 7 Hz a 26 Hz para 4500 kg.

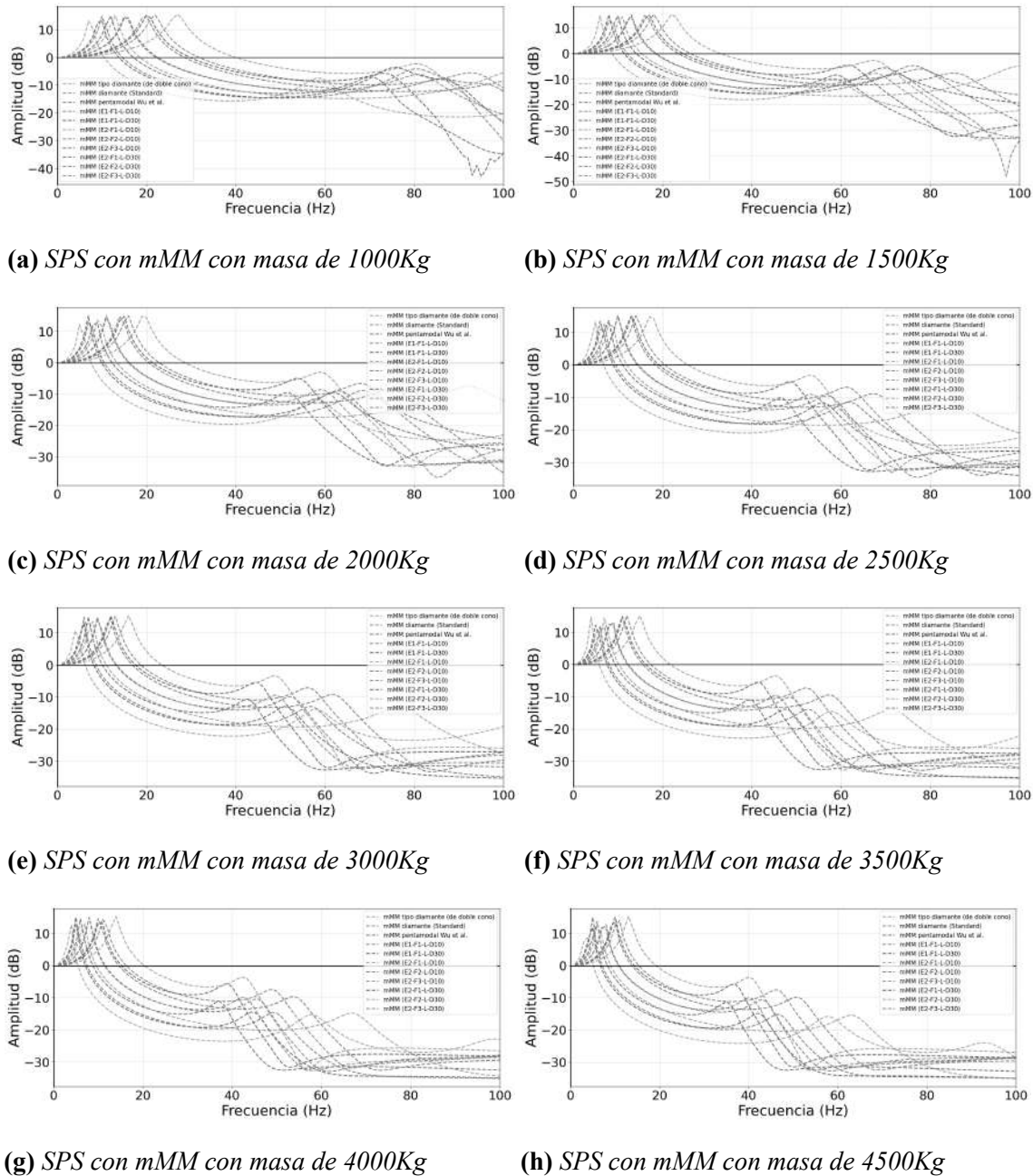
Finalmente, se destaca el desempeño de los mMM obtenidos con la OF F_1 del primer enfoque, mientras que los mMM con el peor rendimiento fueron aquellos asociados a la OF F_2 del segundo enfoque, tanto en el modelo lineal como en el no lineal geométrico.

Como se expuso en el capítulo 6 (sección 5.4), la incorporación de modelos con no linealidad geométrica plantea desafíos relevantes en la evaluación de funciones de transmisibilidad. En condiciones de elasticidad lineal, su estimación (como se muestra en la Figura 51) no presenta mayores dificultades. Sin embargo, ante grandes desplazamientos, el comportamiento dinámico puede cambiar significativamente, invalidando los supuestos clásicos. Para abordar esta limitación, se adoptó una estrategia alternativa basada en el análisis armónico sobre un estado preesforzado, que permite capturar los efectos de rigidez geométrica de forma indirecta mediante una formulación linealizada computacionalmente eficiente. El análisis se aplicó al sistema SPS con mMM (tanto los generados mediante modelos no lineales como los de referencia) considerando una masa acoplada de 4500 kg. La condición deformada se obtuvo aplicando un preesfuerzo cortante sobre la placa superior del SPS con intensidades de 0.5, 1.0, 1.5 y 2.0 MPa.

Figura 51

Funciones de transmisibilidad de SPS con mMM (elástico lineal) en rango de 0Hz-100Hz

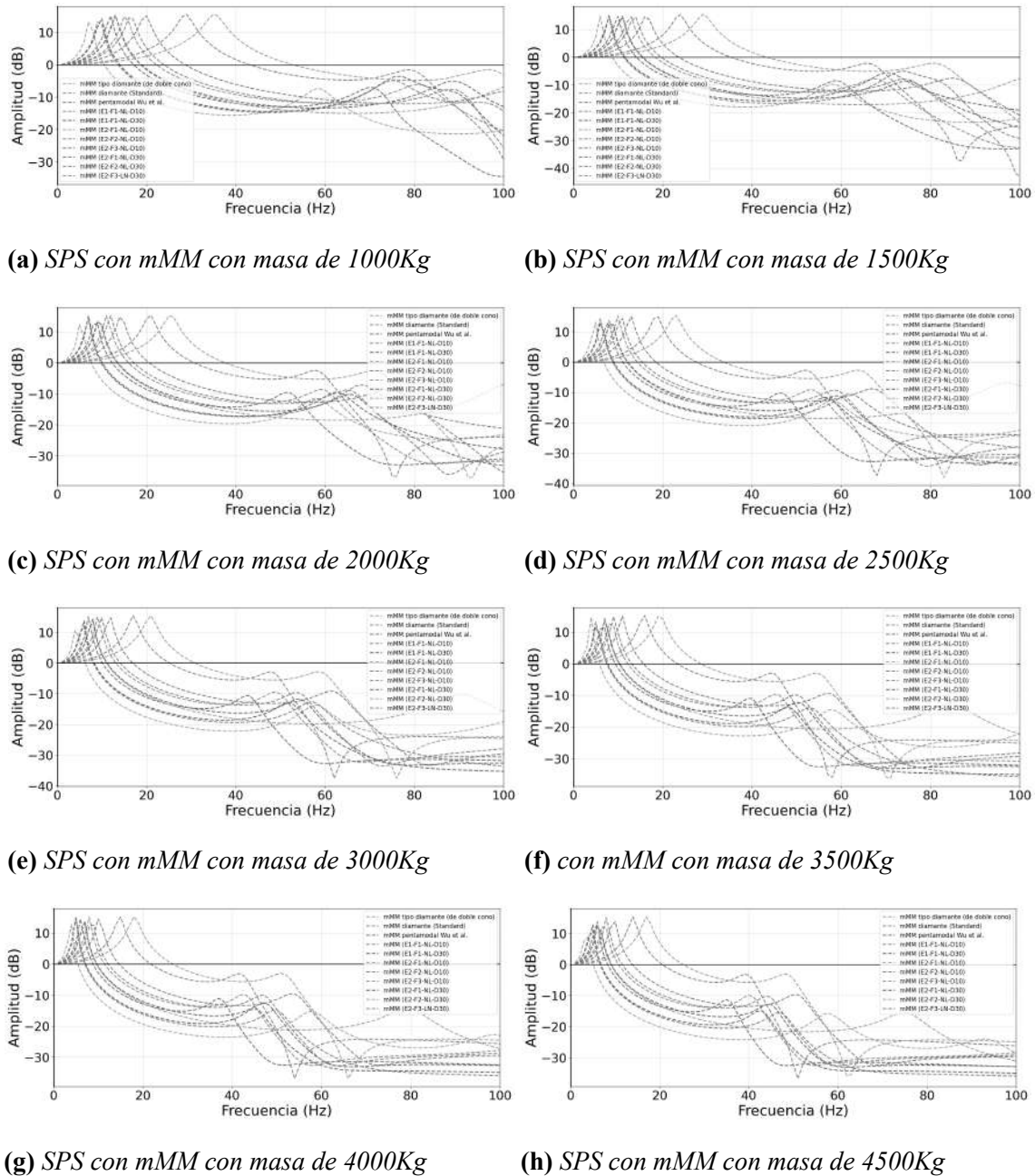
soportando masas de diferentes magnitudes



Esta condición inicial genera un estado deformado sobre el cual se evalúa la respuesta armónica del sistema, capturando así los efectos relevantes de la rigidez tangente sin recurrir a una

Figura 52

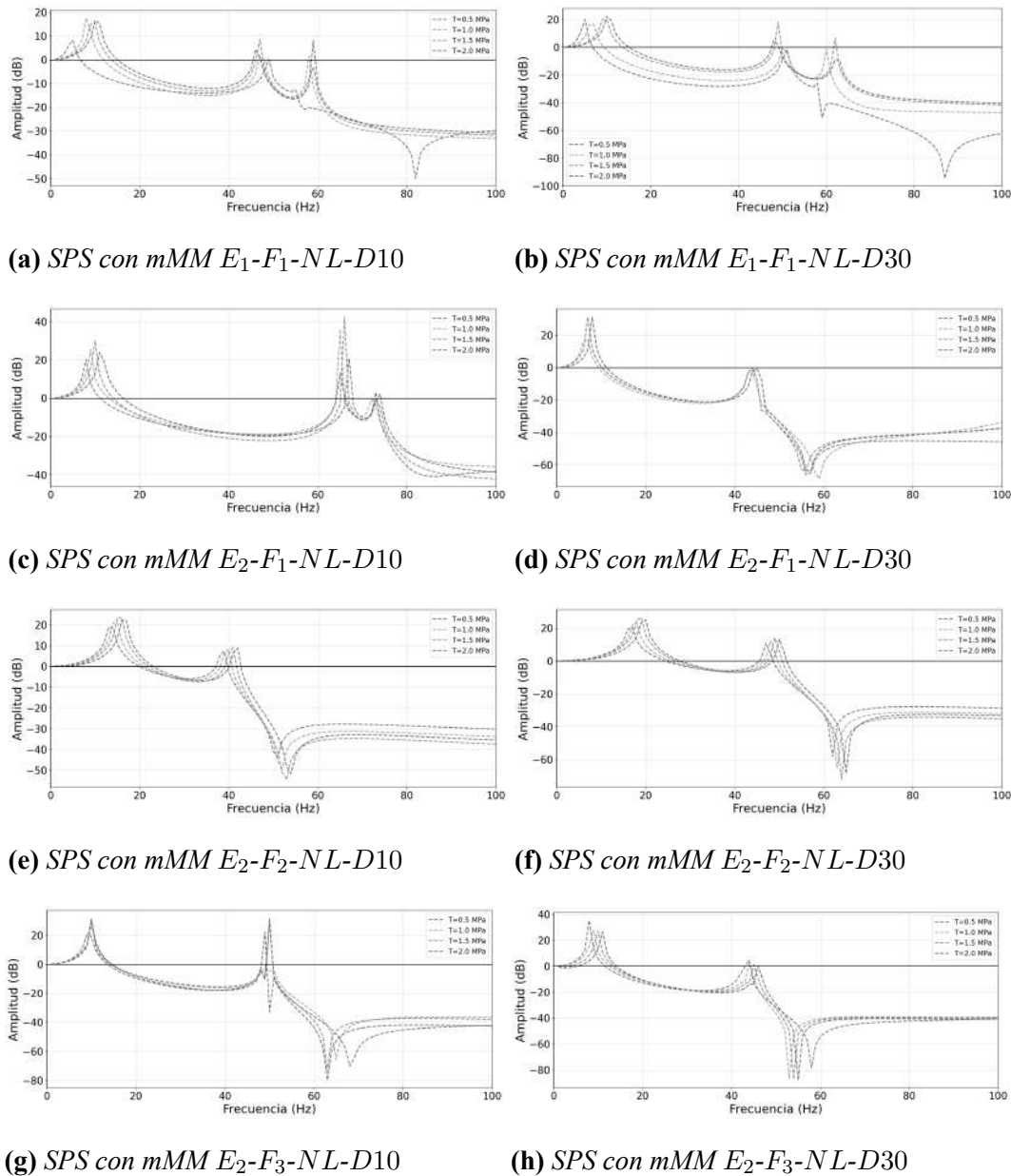
Funciones de transmisibilidad de SPS con mMM (elástico no lineal geométrico) en rango de 0Hz-100Hz soportando masas de diferentes magnitudes



formulación no lineal completa. Los resultados obtenidos a partir de este procedimiento se presentan en las Figuras 53 y 54.

Figura 53

Funciones de transmisibilidad de SPS con mMM obtenidos con el modelo elástico no lineal geométrico con masa de 4500Kg



La evaluación de la transmisibilidad en el rango de bajas frecuencias (menores a 20 Hz) revela fluctuaciones asociadas al nivel de deformación inducida por el preesfuerzo cortante. En general, un mayor nivel de preesfuerzo produce un ligero incremento en la primera frecuencia

de resonancia, que puede variar entre 2 y 5 Hz dependiendo del caso analizado. Este efecto es particularmente evidente en los modelos $E_1-F_1-NL-D10$ y $E_1-F_1-NL-D30$, en los cuales el inicio del aislamiento dinámico se sitúa alrededor de los 8 Hz con preesfuerzos bajos, y puede desplazarse hasta aproximadamente 15 Hz bajo preesfuerzos elevados. Asimismo, se observa un cambio significativo en la respuesta a frecuencias superiores a 50 Hz, donde el incremento del preesfuerzo tiende a atenuar picos de antiresonancia, suavizando la respuesta del sistema. En contraste, otros modelos como $E_2-F_1-NL-D30$ y el $E_2-F_3-NL-D10$ muestran una variación mínima en la función de transmisibilidad dentro del mismo rango de frecuencias y condiciones de carga, lo cual sugiere una menor sensibilidad geométrica a estados de deformación inicial.

En general, a medida que la frecuencia aumenta, los efectos del preesfuerzo sobre la transmisibilidad se hacen más notorios, lo que refleja una mayor sensibilidad dinámica del sistema ante la configuración deformada de partida.

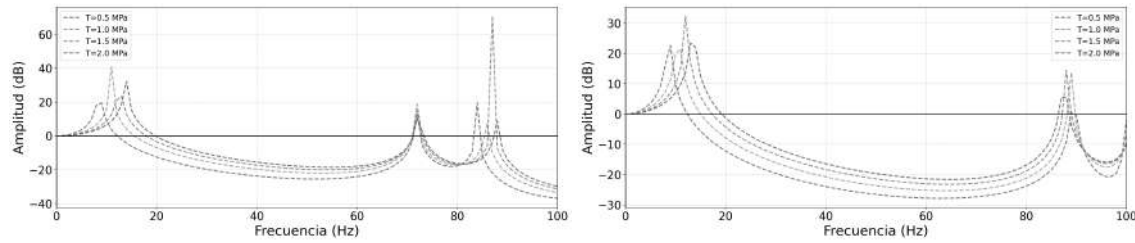
6.3 Ensayo numérico de excitación de base con registros sísmicos

Para analizar el comportamiento de los SPS con mMM en condiciones sísmicas, se evaluó su desempeño bajo la excitación inducida por una aceleración de base generada por un sismo, considerando una masa de 4500 kg. En este estudio, se seleccionaron eventos sísmicos de gran relevancia y ampliamente documentados, tales como los de Chi-Chi (estación TCU045), Friuli (estación TOLMEZZO-000), Kobe (estación KAKOGAWA-CUE90), Loma Prieta (estación 090-CDMG-47381) y Kocaeli (estación YARIMCA-KOERI330) tomados de la base de datos sísmica PEER (Pacific Earthquake Engineering Research Center, 2024).

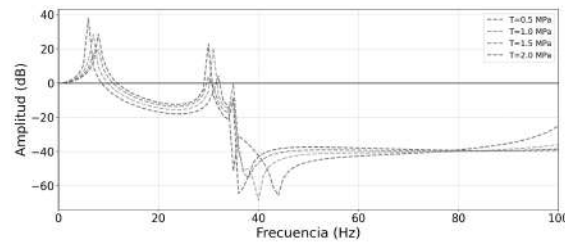
Con el fin de garantizar una comparación uniforme entre los distintos registros sísmicos, las aceleraciones se ajustaron a un espectro de aceleración común, siguiendo los procedimientos establecidos en la NSR-10 (Asociación Colombiana de Ingeniería Sísmica, 2010). Se tomó como referencia la ciudad de Bucaramanga, asumiendo un suelo tipo C y un coeficiente de importancia (I). Además, se consideró un amortiguamiento del 10 %. Este enfoque proporciona una base estandarizada para evaluar el desempeño del dispositivo de aislamiento, permitiendo una comparación más precisa y representativa frente a los distintos eventos sísmicos seleccionados (ver Figura 55).

Figura 54

Funciones de transmisibilidad de SPS con mMM pentamodales de referencia con masa de 4500Kg



(a) SPS con mMM pentamodal (tipo diamante con doble cono) **(b)** SPS con mMM pentamodal estandar (tipo diamante sin doble cono)



(c) SPS con mMM pentamodal propuesto por Wu

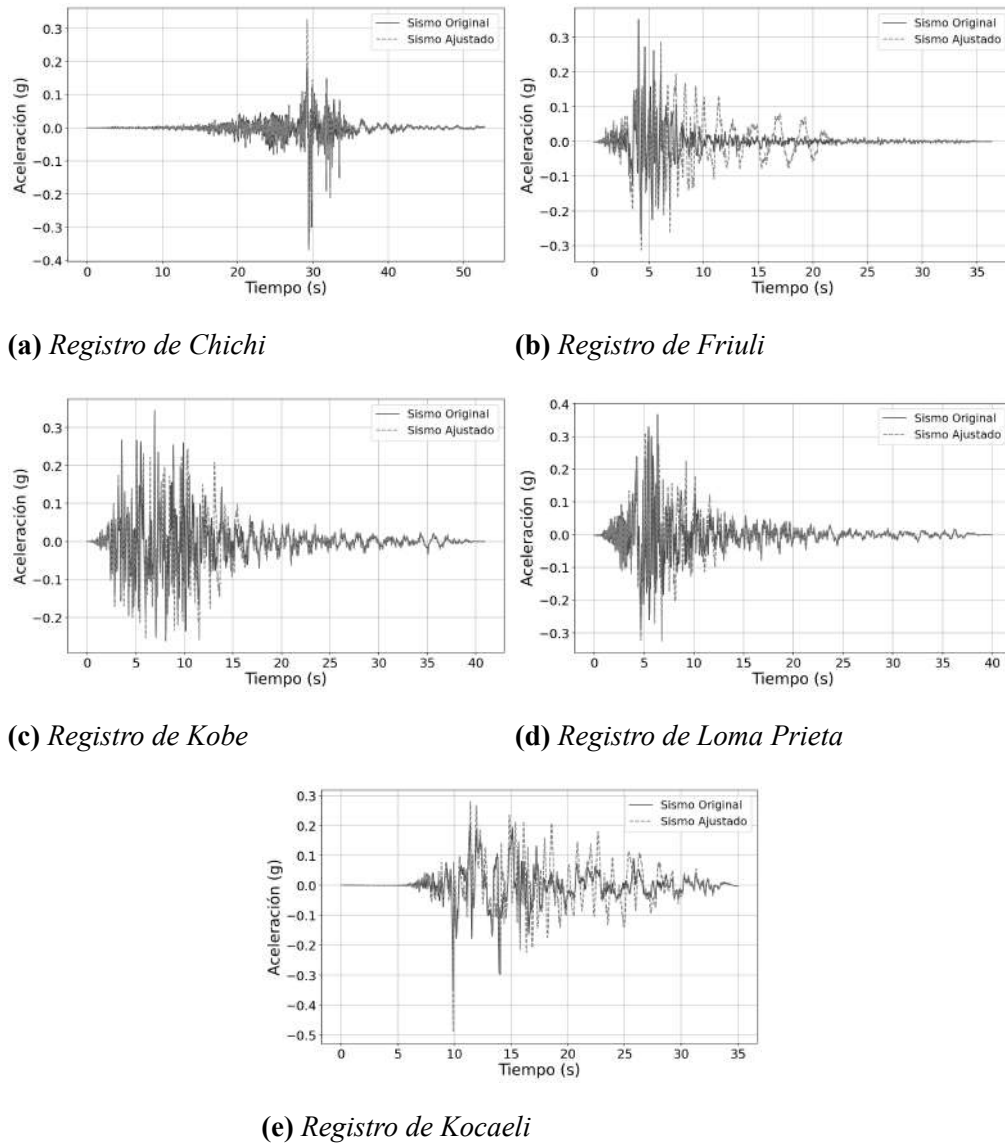
Nota. tomado de: Milton y Cherkayev (1995); Wu et al. (2021)

Los resultados obtenidos (ver Figuras 56, 57 y Cuadros 4, 4) confirman que, bajo las condiciones evaluadas, el SPS con mMM logra una reducción significativa en la aceleración de salida. En términos de desempeño, en el sismo de Chichi se obtuvo (en promedio), la mayor reducción en la aceleración de salida, con un 91.68 % y 92.88 % de reducción para los SPS con mMM obtenidos con el modelo lineal y no lineal geométrico respectivamente, mientras que con el sismo de Friuli tuvo el menor efecto de mitigación con un 86.71 % y 88.23 % respectivamente.

Entre los dispositivos evaluados, sobresalen los SPS con mMM generados mediante la OF F_1 del primer enfoque, así como aquellos obtenidos con las OFs F_1 y F_3 del segundo enfoque, debido a su desempeño superior. En orden decreciente de eficiencia, los mMM con mejor rendimiento fueron: $E_1-F_1-NL-D10$, $E_1-F_1-NL-D30$, $E_2-F_3-NL-D10$ y $E_2-F_1-NL-D30$, destacando que todos estos

Figura 55

Comparación de los registros sísmicos seleccionados con los ajustados con el espectro de aceleraciones de la NSR-10 para la ciudad de Bucaramanga.



Nota. Tomado de: base de datos sísmica PEER (Pacific Earthquake Engineering Research Center, 2024).

SPS corresponden a modelos generados bajo el esquema no lineal geométrico.

Al comparar el desempeño de los SPS con mMM obtenidos a partir de las OFs del primer enfoque, se observa que los modelos generados con formulación no lineal geométrica presentan un aumento promedio cercano al 5 % en relación con sus contrapartes lineales. De manera similar, los SPS con mMM obtenidos mediante la OF F_1 del segundo enfoque muestran, en promedio, un desempeño 3 % superior cuando se emplea el modelo no lineal geométrico respecto al modelo lineal. En general, la OF F_1 del primer enfoque y la OF F_3 del segundo enfoque se consolidan como las opciones más eficientes en términos de desempeño. Finalmente, al comparar el desempeño de los SPS considerando una variación del BS con diámetro de vacío de 10 mm y 30 mm, no se evidencian diferencias significativas. El desempeño con diámetro de vacío de 10 mm resultó 0.43 % superior para las OFs del primer enfoque y 0.48 % superior para las del segundo enfoque.

En general, aunque el desempeño varía según el mMM utilizado, los dispositivos analizados mostraron una reducción en la aceleración de salida que osciló entre un 84 % y un 95 %, considerando tanto modelos de elasticidad lineal como de no linealidad geométrica. Estos hallazgos resaltan el potencial del SPS con mMM para mejorar la respuesta sísmica y optimizar los sistemas de aislamiento estructural.

Tabla 4

Porcentaje de reducción de la aceleración transmitida desde la base al SPS con mMM obtenidos con el modelo elástico lineal

Sismo	Enfoque 1		Enfoque 2						Prom.
	E1-F1-L-D10	E1-F1-L-D30	E2-F1-L-D10	E2-F2-L-D10	E2-F3-L-D10	E2-F1-L-D30	E2-F2-L-D30	E2-F3-L-D30	
Chichi	95,44 %	93,67 %	95,05 %	86,92 %	92,32 %	94,48 %	86,34 %	89,19 %	91,68 %
Friuli	87,52 %	86,48 %	88,11 %	79,74 %	90,19 %	92,76 %	77,68 %	91,19 %	86,71 %
Kobe	89,97 %	88,25 %	90,90 %	82,92 %	89,73 %	87,87 %	85,38 %	88,70 %	87,97 %
Loma	91,11 %	90,20 %	91,32 %	85,25 %	93,49 %	93,19 %	87,93 %	92,65 %	90,64 %
Kocaeli	92,84 %	93,55 %	92,53 %	86,22 %	94,55 %	92,56 %	83,61 %	93,59 %	91,18 %
Prom.	91,38 %	90,43 %	91,58 %	84,13 %	92,06 %	92,17 %	84,19 %	91,06 %	89,63 %

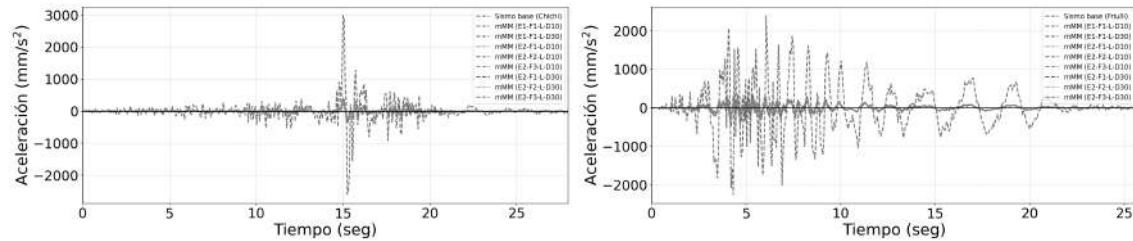
Tabla 5

Porcentaje de reducción de la aceleración transmitida desde la base al SPS con mMM obtenidos con el modelo elástico no lineal geométrico

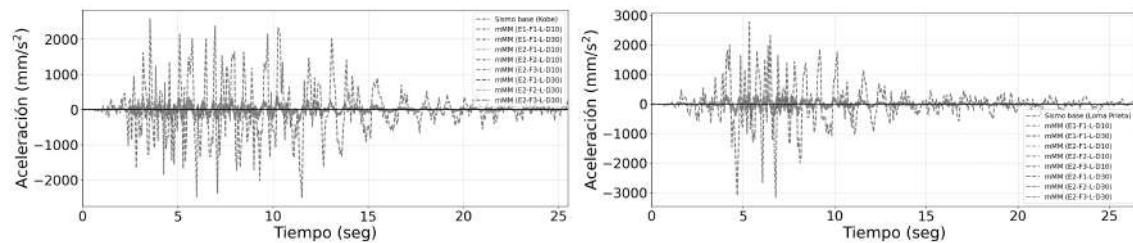
Sismo	Enfoque 1			Enfoque 2					Prom.
	E1-F1-NL-D10	E1-F1-NL-D30	E2-F1-NL-D10	E2-F2-NL-D10	E2-F3-NL-D10	E2-F1-NL-D30	E2-F2-NL-D30	E2-F3-NL-D30	
Chichi	97,78 %	98,16 %	96,37 %	90,82 %	94,67 %	96,17 %	88,30 %	90,45 %	94,09 %
Friuli	90,94 %	90,83 %	89,45 %	85,96 %	91,60 %	89,46 %	77,48 %	90,15 %	88,23 %
Kobe	95,50 %	95,84 %	92,34 %	91,44 %	89,93 %	92,67 %	92,06 %	91,50 %	92,66 %
Loma	96,00 %	97,01 %	92,71 %	93,45 %	94,78 %	92,82 %	91,57 %	95,34 %	94,21 %
Kocaeli	96,39 %	95,20 %	93,88 %	90,78 %	95,87 %	93,95 %	90,76 %	95,56 %	94,05 %
Prom.	95,32 %	95,41 %	92,95 %	90,49 %	93,37 %	93,01 %	88,03 %	93,20 %	92,65 %

Figura 56

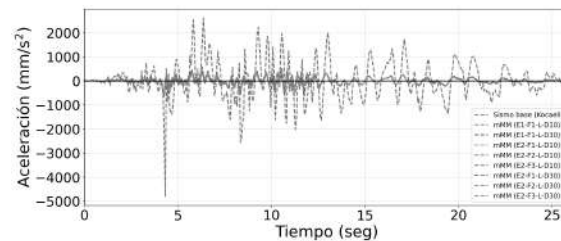
Aceleración de salida y registro sísmico para SPS de mMM con modelo elástico lineal



(a) Registro Chichi y aceleración de salida con un SPS de mMM **(b)** Registro Friuli y aceleración de salida con un SPS de mMM



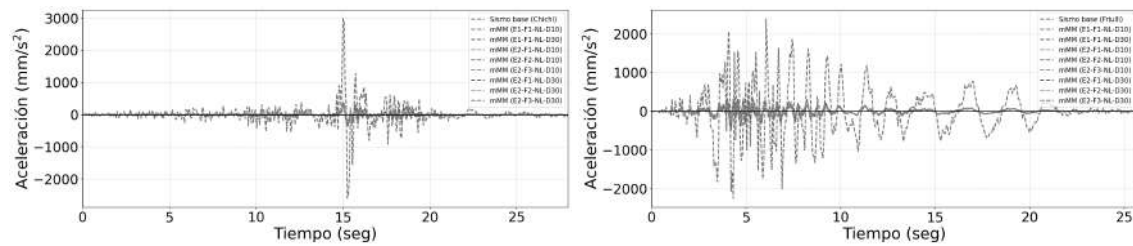
(c) Registro Kobe y aceleración de salida con un SPS de mMM **(d)** Registro Loma Prieta y aceleración de salida con un SPS de mMM



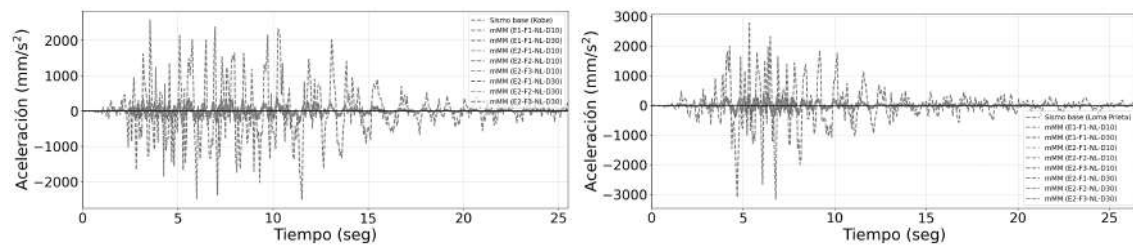
(e) Registro Kocaeli y aceleración de salida con un SPS de mMM

Figura 57

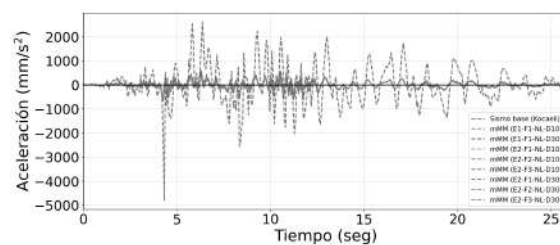
Aceleración de salida y registro sísmico para SPS de mMM con modelo elástico no lineal geométrico



(a) Registro Chichi y aceleración de salida con un SPS de mMM (b) Registro Friuli y aceleración de salida con un SPS de mMM



(c) Registro Kobe y aceleración de salida con un SPS de mMM (d) Registro Loma Prieta y aceleración de salida con un SPS de mMM



(e) Registro Kocaeli y aceleración de salida con un SPS de mMM

7 Conclusiones y propuestas para investigaciones futuras.

7.1 Conclusiones

En el desarrollo de la presente tesis, se cumplieron los objetivos planteados de forma satisfactoria, alcanzando los resultados esperados en cada etapa de la investigación. Producto de la investigación se obtuvieron las siguientes conclusiones.

- Los procesos generativos de mMM basados en TO se consolidaron como una alternativa eficaz y validaron el enfoque desarrollado por Guevara-Corzo et al. (2024). Un aspecto clave fue el impacto de la consideración de la no linealidad geométrica en el proceso generativo (ver Figuras 37, 41 y 42). Si bien su inclusión aumentó significativamente el tiempo de cómputo y la complejidad del problema, no se evidenció una mejora sustancial en el desempeño de las topologías obtenidas. Estos resultados sugieren que, en determinados contextos, el uso de modelos en elasticidad lineal constituye una alternativa computacionalmente más eficiente, sin afectar de manera significativa la calidad de los diseños generados.
- La validación del proceso generativo propuesto permitió obtener estructuras innovadoras, como las formas *P-Shape*, armaduras laminares cúbicas y estructuras de octeto, en línea con lo documentado por Guevara-Corzo et al. (2024). Sin embargo, uno de los hallazgos más relevantes de esta investigación fue la generación de topologías inéditas en la literatura, destacándose los mMM pentamodales obtenidos con la OF F_1 del enfoque 1. Estas estructuras mostraron un desempeño superior en comparación con alternativas previas, como el mMM pentamodal de Wu et al. (2021) o la estructura tipo diamante estándar de Milton y Cherkaev (1995). Asimismo, se lograron desarrollar estructuras auxéticas innovadoras mediante la OF F_3 del enfoque 3, ampliando así el espectro de configuraciones estructurales con potencial en aplicaciones avanzadas.
- Entre las OFs formuladas en esta investigación, se evidenció la dificultad de generar estructuras

optimizadas para maximizar la compresión y minimizar el cortante. En particular, la OF F_2 del enfoque 1 no logró producir mMM aplicables en un escenario real y presentó problemas significativos cuando se empleó en el proceso generativo que considera elasticidad no lineal geométrica. Por otro lado, su variante, la OF F_2 del enfoque 2, permitió obtener mMM con estructuras más claras y definidas, aunque con un desempeño limitado en la mayoría de los ensayos realizados en esta investigación.

- Los SP con mMM propuestos demostraron un desempeño dinámico favorable, destacándose particularmente el mMM obtenido con la OF F_1 del primer enfoque, utilizando una BS con vacío de 30 mm. Este diseño presentó resultados consistentes tanto en elasticidad lineal como en condiciones de no linealidad geométrica, con una capacidad de atenuación efectiva en el rango de frecuencias superiores a 7 Hz (ver Figuras 51 y 52). Su comportamiento fue comparable al de referencias reconocidas, como la estructura tipo diamante propuesta por Kadic et al. (2012) y el aislador elastomérico comercial tipo E(RB-800) desarrollado por Dynamic Isolation Systems. Un aspecto relevante de este mMM es su topología relativamente simple y de fácil reproducción, lo que representa una ventaja frente a configuraciones más complejas como la estructura pentamodal tipo diamante. En estas últimas, el rendimiento varía significativamente dependiendo de la versión adoptada (estándar o doble cono), y su fabricación resulta más exigente debido a la presencia de elementos delgados y conexiones estructuralmente críticas.
- Los resultados obtenidos (ver Figuras 56 y 57, y Cuadros 4 y 5) confirman que el SPS acoplado con mMM logra una reducción significativa en la aceleración transmitida, con disminuciones que oscilan entre el 77 % y el 98 % respecto a la aceleración de entrada, bajo las condiciones evaluadas. El mejor desempeño promedio se observó en los mMM generados mediante la OF F_1 del primer enfoque y la OF F_3 del segundo enfoque, ambos con resultados comparables. En contraste, el menor rendimiento fue registrado por el mMM asociado a la OF F_2 del mismo grupo. Si bien el comportamiento dinámico depende de las características del sismo y de las

condiciones de prueba, el dispositivo muestra un alto potencial para la mitigación de efectos sísmicos. Además, con ajustes en sus parámetros geométricos o materiales, podría optimizarse aún más para adaptarse a distintos escenarios de carga, ampliando así su rango de aplicación.

7.2 Propuestas para investigaciones futuras

Considerando los avances y los resultados obtenidos en esta tesis doctoral, se proponen las siguientes líneas de investigación futuras para profundizar en el aislamiento de vibraciones y en la generación de mMM:

- Validación experimental de los mMM generados: Aunque los costos asociados pueden ser elevados, la realización de ensayos experimentales en laboratorio es fundamental para validar los resultados obtenidos mediante simulaciones computacionales. Dado que los mMM generados, como las microarmaduras, superficies estructuradas y estructuras laminares, exhiben propiedades mecánicas extremas, podrían presentarse discrepancias entre las predicciones numéricas y su comportamiento real bajo carga. Las pruebas experimentales permitirían verificar estos resultados, ajustar los modelos en función de los hallazgos y mejorar la precisión de las simulaciones, fortaleciendo su aplicabilidad en contextos reales.
- Exploración de materiales compuestos y no linealidades complejas: Con los avances en manufactura aditiva, surge la oportunidad de desarrollar procesos generativos que incorporen múltiples materiales con propiedades diferenciadas, en lugar de restringirse a un solo material. La capacidad de fabricar estructuras con gradientes de material podría ampliar significativamente el diseño de mMM, optimizando sus propiedades para el aislamiento de vibraciones. Además, sería relevante analizar el impacto de otras no linealidades materiales, como la plasticidad o el comportamiento hiperelástico. Aunque estos enfoques se desvían de la hipótesis inicial de Milton y Cherkaev (1995), podrían aportar nuevas perspectivas al campo de los mMM, expandiendo sus aplicaciones en ingeniería avanzada.
- Optimización multiescala: Un enfoque prometedor para futuras investigaciones es la optimización multiescala, en la que las estructuras diseñadas a nivel macro se configuren para

interactuar con propiedades y comportamientos específicos a nivel micro. Esta estrategia permitiría desarrollar mMM con respuestas ajustables a distintas frecuencias de vibración y condiciones de carga, mejorando su eficiencia y ampliando su aplicabilidad en sistemas de aislamiento sísmico y control de vibraciones en infraestructura y maquinaria.

- Aplicaciones prácticas en ingeniería estructural y mecánica: Dado el potencial demostrado por los mMM en esta investigación, se recomienda explorar su implementación en sectores como la ingeniería civil, particularmente en el diseño de edificios y puentes con protección sísmica avanzada. Asimismo, su aplicación en la industria automotriz y aeroespacial podría ser clave para mejorar el control de vibraciones, optimizando el rendimiento y la seguridad de las estructuras. La integración de técnicas generativas con materiales avanzados y estrategias de optimización adaptativa abriría nuevas oportunidades para desarrollar estructuras más eficientes, ligeras y resistentes.

Referencias bibliográficas

- Abarkane, C., Galé-Lamuela, D., Benavent-Climent, A., Rescalvo, F. J., y Gallego, A. (2019). Diagnosis of hysteretic dampers used for seismic protection of structures by means ultrasonic measurements. *Measurement*, 137:344–354.
- Achaoui, Y., Antonakakis, T., Brûlé, S., Craster, R. V., Enoch, S., y Guenneau, S. (2017). Clamped seismic metamaterials: Ultra-low frequency stop bands. *New Journal of Physics*, 19:1–13.
- Achaoui, Y., Ungureanu, B., Enoch, S., Brûlé, S., y Guenneau, S. (2016). Seismic waves damping with arrays of inertial resonators. *Extreme Mechanics Letters*, 8:30–37.
- Ai, L. y Gao, X. L. (2019). Topology optimization of 2-D mechanical metamaterials using a parametric level set method combined with a meshfree algorithm. *Composite Structures*, 229.
- Alderson, A., Alderson, K. L., Attard, D., Evans, K. E., Gatt, R., Grima, J. N., Miller, W., Ravirala, N., Smith, C. W., y Zied, K. (2010). Elastic constants of 3-, 4- and 6-connected chiral and anti-chiral honeycombs subject to uniaxial in-plane loading. *Composites Science and Technology*, 70:1042–1048.
- Altay, O., Butenweg, C., Klinkel, S., y Taddei, F. (2014). Vibration mitigation of wind turbine towers by tuned liquid column dampers. In *Proceedings of the International Conference on Structural Dynamic , EURODYN*, Band 1, Seiten 1531 – 1538.
- Anderson, E., Bai, Z., Bischof, C., Blackford, S., Demmel, J., Dongarra, J., Du Croz, J., Greenbaum,

- A., Hammarling, S., McKenney, A., y Sorensen, D. (1999). *LAPACK Users' Guide*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 3. Auflage.
- Andreassen, E., Lazarov, B. S., y Sigmund, O. (2014). Design of manufacturable 3D extremal elastic microstructure. *Mechanics of Materials*, 69(1):1–10.
- ANSYS Inc. (2022). *ANSYS Mechanical*, 22.0. Auflage.
- Asociación Colombiana de Ingeniería Sísmica (2010). *Reglamento colombiano de construcción sismoresistente NSR10*. AIS, Bogotá D.C., Colombia.
- Asociación Colombiana de Ingeniería Sísmica (2023). *Evaluación y Reducción de la Vulnerabilidad Sísmica en Viviendas de Mampostería*. AIS, Bogotá D.C., Colombia, 410-23. Auflage.
- Autodesk Inc. (2024). AutoCAD Software.
- Ayachit, U. (2005). *The ParaView Guide: A Parallel Visualization Application*. Kitware, Inc., fourth. Auflage.
- Ayala-Rangel, S. y Ramos-Carreño, L. (2021). Evaluación del efecto de aisladores de base elastómericos en el comportamiento dinámico de una edificación de baja altura. Bachelor's thesis in civil engineering, Escuela de ingeniería civil, Universidad Industrial de Santander.
- Bacigalupo, A. y Gambarotta, L. (2016). Simplified modelling of chiral lattice materials with local resonators. *International Journal of Solids and Structures*, 83:126–141.
- Bathe, K.-J. (2006). *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, Pearson Education, Inc.

- Baughman, R. H., Stafström, S., Cui, C., y Dantas, S. O. (1998). Materials with Negative Compressibilities in One or More Dimensions. *Science*, 279:1522–1524.
- Bendsøe, M. P. (1989). Optimal shape design as a material distribution problem. *Structural optimization*, 1:193–202.
- Bendsøe, M. P. y Kikuchi, N. (1988). Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 71:197–224.
- Bendsøe, M. P. y Sigmund, O. (2004). *Topology Optimization: Theory, Methods, and Applications*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Bertoldi, K., Vitelli, V., Christensen, J., y van Hecke, M. (2017). Flexible mechanical metamaterials. *Nature Reviews Materials*, 2:1–11.
- Blackford, L. S., Petitet, A., Pozo, R., Remington, K., Whaley, R. C., Demmel, J., Dongarra, J., Duff, I., Hammarling, S., Henry, G., u a. (2002). An updated set of basic linear algebra subprograms (BLAS). *ACM Transactions on Mathematical Software*, 28(2):135–151.
- Boatti, E., Vasios, N., y Bertoldi, K. (2017). Origami Metamaterials for Tunable Thermal Expansion. *Advanced Materials*, 29:1–6.
- Bose, J. C. (1898). On the rotation of plane of polarisation of electric wave by a twisted structure. *Proceedings of the Royal Society of London*, 63:146–152.
- Braz-César, M. y Barros, R. C. D. (2013). Passive Control of Civil Engineering Structures. *4th*

International Conference on Integrity, Reliability and Failure of Mechanical Systems, 1:1–12.

Brûlé, S., Enoch, S., y Guenneau, S. (2017a). Sols structurés sous sollicitation dynamique : des métamatériaux en géotechnique. *Revue Française de Géotechnique*, Seite 4.

Brûlé, S., Enoch, S., y Guenneau, S. (2020). Emergence of seismic metamaterials: Current state and future perspectives. *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*, 384:126034.

Brûlé, S., Enoch, S., Guenneau, S., y Craster, R. V. (2017b). Seismic Metamaterials: Controlling Surface Rayleigh Waves Using Analogies with Electromagnetic Metamaterials. *Handbook of Metamaterial and Plasmonics*, Seiten 301–337.

Brûlé, S., Javelaud, E. H., Enoch, S., y Guenneau, S. (2013). Experiments on seismic metamaterials: Molding surface waves. *Physical Review Letters*, 112:1–5.

Brûlé, S., Javelaud, E. H., Enoch, S., y Guenneau, S. (2017c). Flat lens effect on seismic waves propagation in the subsoil. *Scientific Reports*, 7:1–9.

Brûlé, S., Ungureanu, B., Achaoui, Y., Diatta, A., Aznavourian, R., Antonakakis, T., Craster, R., Enoch, S., y Guenneau, S. (2017d). Metamaterial-like transformed urbanism. *Innovative Infrastructure Solutions*, 2.

Bückmann, T., Kadic, M., Schittny, R., y Wegener, M. (2015). Mechanical metamaterials with anisotropic and negative effective mass-density tensor made from one constituent material. *Physica Status Solidi (B) Basic Research*, 252:1671–1674.

- Bückmann, T., Schittny, R., Thiel, M., Kadic, M., Milton, G. W., y Wegener, M. (2014a). On three-dimensional dilational elastic metamaterials. *New Journal of Physics*, 16.
- Bückmann, T., Thiel, M., Kadic, M., Schittny, R., y Wegener, M. (2014b). An elasto-mechanical unfeelability cloak made of pentamode metamaterials. *Nature Communications*, 5:1–6.
- Buhl, T., Pedersen, C. B., y Sigmund, O. (2000). Stiffness design of geometrically nonlinear structures using topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 19:93–104.
- Cai, W., Gładysiak, A., Anioła, M., Smith, V. J., Barbour, L. J., y Katrusiak, A. (2015). Giant Negative Area Compressibility Tunable in a Soft Porous Framework Material. *Journal of the American Chemical Society*, 137:9296–9301.
- Calvi, P. M. y Calvi, G. M. (2018). Historical development of friction-based seismic isolation systems. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 106:14–30.
- Casablanca, O., Ventura, G., Garescì, F., Azzerboni, B., Chiaia, B., Chiappini, M., y Finocchio, G. (2018). Seismic isolation of buildings using composite foundations based on metamaterials. *Journal of Applied Physics*, 123.
- Chandra, R., Dagum, L., Kohr, D., Menon, R., Maydan, D., y McDonald, J. (2001). *Parallel programming in OpenMP*. Morgan kaufmann.
- Chatterjee, T., Chakraborty, S., Goswami, S., Adhikari, S., y Friswell, M. I. (2021). Robust topological designs for extreme metamaterial micro-structures. *Scientific reports*, 11(1):15221.

- Chen, B. G. G., Upadhyaya, N., y Vitelli, V. (2014). Nonlinear conduction via solitons in a topological mechanical insulator. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 111:13004–13009.
- Chen, B.-J., Tsai, C., Chung, L., y Chiang, T.-C. (2006). Seismic behavior of structures isolated with a hybrid system of rubber bearings. *Structural Engineering and Mechanics*, 22:761–783.
- Chen, Y. J., Scarpa, F., Liu, Y. J., y Leng, J. S. (2013). Elasticity of anti-tetrachiral anisotropic lattices. *International Journal of Solids and Structures*, 50:996–1004.
- Chen, Z., Wu, T., Nian, G., Shan, Y., Liang, X., Jiang, H., y Qu, S. (2019). Ron resch origami pattern inspired energy absorption structures. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 86.
- Cheung, K. C., Tachi, T., Calisch, S., y Miura, K. (2014). Origami interleaved tube cellular materials. *Smart Materials and Structures*, 23.
- Colombi, A., Colquitt, D., Roux, P., Guenneau, S., y Craster, R. V. (2016a). A seismic metamaterial: The resonant metawedge. *Scientific Reports*, 6:1–6.
- Colombi, A., Roux, P., Guenneau, S., Gueguen, P., y Craster, R. V. (2016b). Forests as a natural seismic metamaterial: Rayleigh wave bandgaps induced by local resonances. *Scientific Reports*, 6:1–7.
- Computational Engineering International (2023). *EnSight Gold Format*, 7.6. Auflage.
- Cummer, S. A., Christensen, J., y Alù, A. (2016). Controlling sound with acoustic metamaterials.

Nature Reviews Materials, 1:1–13.

D'Alessandro, L., Zega, V., Ardito, R., y Corigliano, A. (2018). 3D auxetic single material periodic structure with ultra-wide tunable bandgap. *Scientific Reports*, 8:1–9.

Datta, T. K. (2003). A state-of-the-art review on active control of structures. *ISSET Journal of earthquake technology*, 40:1–17.

Dong, H. W., Zhao, S. D., Wei, P., Cheng, L., Wang, Y. S., y Zhang, C. (2019). Systematic design and realization of double-negative acoustic metamaterials by topology optimization. *Acta Materialia*, 172:102–120.

Esfarjani, S. M., Dadashi, A., y Azadi, M. (2022). Topology optimization of additive-manufactured metamaterial structures: A review focused on multi-material types. *Forces in Mechanics*, 7.

Fabbrocino, F. y Amendola, A. (2017). Discrete-to-continuum approaches to the mechanics of pentamode bearings. *Composite Structures*, 167:219–226.

Fabbrocino, F., Amendola, A., Benzoni, G., y Fraternali, F. (2015). Seismic application of pentamode lattices. *International Journal of Earthquake Engineering*, Seiten 62–70.

Fabbrocino, F. y Carpentieri, G. (2017). Three-dimensional modeling of the wave dynamics of tensegrity lattices. *Composite Structures*, 173:9–16.

Fernandes, W., Almeida, V., Neves, F., y Greco, M. (2015). Topology optimization applied to 2d elasticity problems considering the geometrical nonlinearity. *Engineering Structures*, 100:Pages 116–127.

- Filipov, E. T., Tachi, T., Paulino, G. H., y Weitz, D. A. (2015). Origami tubes assembled into stiff, yet reconfigurable structures and metamaterials. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 112:12321–12326.
- Finocchio, G., Casablanca, O., Ricciardi, G., Alibrandi, U., Garescì, F., Chiappini, M., y Azzerboni, B. (2014). Seismic metamaterials based on isochronous mechanical oscillators. *Applied Physics Letters*, 104.
- Fleck, N. A., Deshpande, V. S., y Ashby, M. F. (2010). Micro-architected materials: Past, present and future. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 466:2495–2516.
- Fleisch, M., Thalhamer, A., Schlögl, S., Fuchs, P. F., Pinter, G., y Berer, M. (2024). MetamaterialFinder: A software framework for discovering and analyzing mechanical metamaterials based on simple closed curves. *Advances in Engineering Software*, 192(1).
- Florijn, B., Coulais, C., y van Hecke, M. (2014). Programmable Mechanical Metamaterials. *Physical Review Letters*, 113:175503.
- Forrai, A., Hashimoto, S., Funato, H., y Kamiyama, K. (2001). Structural Control of Flexible Structures. *Computing and Control Engineering Journal*, 12(6):257–262.
- Fraternali, F., Amendola, A., y Benzoni, G. (2018). Innovative seismic isolation devices based on lattice materials: A review. *Ingegneria Sismica*, 35:93–113.
- Fraternali, F., Carpentieri, G., Montuori, R., Amendola, A., y Benzoni, G. (2015). On the use of mechanical metamaterials for innovative seismic isolations systems. *COMPADYN 2015 - 5th*

ECCOMAS Thematic Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering, Seiten 349–358.

Gao, J., Xue, H., Gao, L., y Luo, Z. (2019). Topology optimization for auxetic metamaterials based on isogeometric analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 352:211–236.

Garcia-Lopez, N., Sanchez-Silva, M., Medaglia, A., y Chateauneuf, A. (2011). A hybrid topology optimization methodology combining simulated annealing and SIMP. *Computers & structures*, 89(15):1512–1522.

Gatt, R., Attard, D., Farrugia, P. S., Azzopardi, K. M., Mizzi, L., Brincat, J. P., y Grima, J. N. (2013). A realistic generic model for anti-tetrachiral systems. *Physica Status Solidi (B) Basic Research*, 250:2012–2019.

Gibiansky, L. V. y Sigmund, O. (2000). Multiphase composites with extremal bulk modulus. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48(3):461–498.

Gibson, L. J. y Ashby, M. F. (1997). *Cellular Solids Structure and Properties*, Band 2. Cambridge University Press.

GNU Project (2024). *GNU Fortran Compiler (gfortran)*. Free Software Foundation.

Goodwin, A. L., Keen, D. A., y Tucker, M. G. (2008). Large negative linear compressibility of $\text{Ag}_3[\text{Co}(\text{CN})_6]$. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 105:18708–18713.

Grima, J. N., Gatt, R., y Farrugia, P. S. (2008). On the properties of auxetic meta-tetrachiral structures. *Physica Status Solidi (B) Basic Research*, 245:511–520.

Guevara-Corzo, J. (2024a). Github repository for non linear geometric static analysis coden in Fortran. GitHub repository.

Guevara-Corzo, J. (2024b). Github repository for non-linear geometric topological optimization process coded in Fortran. GitHub repository.

Guevara-Corzo, J. (2024c). Github repository for static analysis in linear elasticity coded in Fortran. GitHub repository.

Guevara-Corzo, J. (2024d). Github repository for topological optimization process coded in Fortran. GitHub repository.

Guevara-Corzo, J. (2024e). Github repository of MMA coded in Fortran. GitHub repository.

Guevara-Corzo, J., García-Sánchez, J., Quintero-Ramírez, C., y Begambre-Carrillo, O. (2024). How does the initial cell configuration influence the final topology in a metamaterial generation process? *Latin American Journal of Solids and Structures*, 21(5).

Guevara-Corzo, J. J., Begambre-Carrillo, O. J., y García-Sanchez, J. A. (2022a). Metamateriales mecánicos como alternativa para generación de nuevos sistemas de aislamiento sísmico. In de Ingeniería Sísmica, A. C., Herausgeber, *X Congreso nacional de ingeniería sísmica*, Band 1. Pontificia Universidad Javeriana.

Guevara-Corzo, J. J., Begambre-Carrillo, O. J., García-Sanchez, J. A., y Sanchez-Acevedo, H. G.

- (2022b). Passive seismic protection systems with mechanical metamaterials: A current review. *Structural Engineering and Mechanics, An Int'l Journal*, 82(4):417–434.
- Gurtner, G. y Durand, M. (2014). Stiffest elastic networks. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 470.
- Hanna, B. H., Lund, J. M., Lang, R. J., Magleby, S. P., y Howell, L. L. (2014). Waterbomb base: A symmetric single-vertex bistable origami mechanism. *Smart Materials and Structures*, 23.
- Hashin, Z. y Shtrikman, S. (1963). A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 11(2):127–140.
- Holland, J. H. (1975). *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. University of Michigan Press.
- HSL (2023). *HSL Mathematical Software Library*. HSL, a collection of Fortran codes for large-scale scientific computation.
- Huang, J., Liu, W., y Shi, Z. (2017). Surface-wave attenuation zone of layered periodic structures and feasible application in ground vibration reduction. *Construction and Building Materials*, 141:1–11.
- Huang, X. y Xie, M. (2010). *Evolutionary topology optimization of continuum structures: methods and applications*. John Wiley & Sons.
- Huang, X. y Xie, Y. (2007). Convergent and mesh-independent solutions for the bi-directional evolutionary structural optimization method. *Finite Elements in Analysis and Design*, 43(14):1039–1049.

- Huang, X. y Xie, Y. M. (2009). Bi-directional evolutionary topology optimization of continuum structures with one or multiple materials. *Computational Mechanics*, 43:393–401.
- Huang, Y., Zhang, X., Zhang, L., y Cai, C. (2021). Theoretical verification of three-dimensional manufacturable pentamode metamaterial microstructure. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 33(48):485702.
- Hyun, S. y Torquato, S. (2002). Optimal and manufacturable two-dimensional, Kagomé-like cellular solids. *Journal of Materials Research*, 17:137–144.
- Jabary, R. N. y Madabhushi, S. P. (2015). Tuned mass damper effects on the response of multi-storied structures observed in geotechnical centrifuge tests. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 77:373–380.
- Jangid, R. (1995). Dynamic characteristics of structures with multiple tuned mass dampers. *Structural Engineering and Mechanics*, 3:497–509.
- Jiang, H., Wang, Y., Zhang, M., Hu, Y., Lan, D., Zhang, Y., y Wei, B. (2009). Locally resonant phononic woodpile: A wide band anomalous underwater acoustic absorbing material. *Applied Physics Letters*, 95(10).
- Jiang, Y. y Li, Y. (2018). 3D Printed Auxetic Mechanical Metamaterial with Chiral Cells and Re-entrant Cores. *Scientific Reports*, 8:1–11.
- Jihong, Z., Han, Z., Chuang, W., Lu, Z., Shangqin, Y., u a. (2021). A review of topology optimization for additive manufacturing: Status and challenges. *Chinese Journal of Aeronautics*, 34(1):91–110.

- Jung, H.-J., Jr, B. S., Ni, Y., y Lee, I. (2004). State-of-the-art of semiactive control systems using MR fluid dampers in civil engineering applications. *Structural Engineering and Mechanics*, 17:493–526.
- Kadic, M., Bückmann, T., Schittny, R., y Wegener, M. (2013). On anisotropic versions of three-dimensional pentamode metamaterials. *New Journal of Physics*, 15.
- Kadic, M., Bückmann, T., Stenger, N., Thiel, M., y Wegener, M. (2012). On the practicability of pentamode mechanical metamaterials. *Applied Physics Letters*, 100.
- Kadic, M., Milton, G. W., van Hecke, M., y Wegener, M. (2019). 3D Metamaterials. *Nature Reviews Physics*, 1:198–210.
- Kallioras, N. A., Kazakis, G., y Lagaros, N. D. (2020). Accelerated topology optimization by means of deep learning. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 62(3):1185–1212.
- Kane, C. L. y Lubensky, T. C. (2013). Topological boundary modes in isostatic lattices. *Nature Physics*, 10:39–45.
- Karypis, G. (2011). *METIS and ParMETIS*. Springer US, Boston, MA.
- Kennedy, J. y Eberhart, R. C. (1995). Particle Swarm Optimization. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Neural Networks*, Seiten 1942–1948. IEEE.
- Kirkpatrick, S., Gelatt, C. D., y Vecchi, M. P. (1983). Optimization by Simulated Annealing. *Science*, 220(4598):671–680.

- Kitamura, H., Kitamura, Y., Ito, M., y Sakamoto, M. (2004). Analysis of the Present Situation of Response Control Systems in Japan Based on Building Survey Database. *Journal of JAEE Journal of Japan Association for Earthquake Engineering*, 4:265–277.
- Kitware, Inc. (2023). Cmake Reference Documentation.
- Konar, T. y Ghosh, A. D. (2021). Flow Damping Devices in Tuned Liquid Damper for Structural Vibration Control: A Review. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 28(5):2195 – 2207.
- Lakes, R. (1993). Advances in negative poisson’s ratio materials. *Advanced Materials*, 5:293–296.
- Lakes, R. y Wojciechowski, K. W. (2008). Negative compressibility, negative Poisson’s ratio, and stability. *Physica Status Solidi (B) Basic Research*, 245:545–551.
- Le, D. H., Xu, Y., Tentzeris, M. M., y Lim, S. (2020). Transformation from 2D meta-pixel to 3D meta-pixel using auxetic kirigami for programmable multifunctional electromagnetic response. *Extreme Mechanics Letters*, 36:100670.
- Li, Q. y Zhang, M. (2022). Elastic metamaterials of hexagonal unit cells with double-cone arms from pentamode to band gap at low frequencies. *Crystals*, 12(5):604.
- Li, S. y Wang, K. W. (2015). Fluidic origami: A plant-inspired adaptive structure with shape morphing and stiffness tuning. *Smart Materials and Structures*, 24:105031.
- Li, X. y Gao, H. (2016). Mechanical metamaterials: Smaller and stronger. *Nature Materials*, 15:373–374.

- Li, X., Peng, W., Wu, W., Xiong, J., y Lu, Y. (2023). Auxetic mechanical metamaterials: from soft to stiff. *International Journal of Extreme Manufacturing*, 5(4):042003.
- Li, Z., Luo, Z., Zhang, L.-C., y Wang, C.-H. (2021). Topological design of pentamode lattice metamaterials using a ground structure method. *Materials & Design*, 202.
- Lin, C.-C., Lin, G.-L., y Wang, J.-F. (2010). Protection of seismic structures using semi-active friction TMD. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 39(6):635 — 659.
- Liu, K. y Tovar, A. (2014). An efficient 3D topology optimization code written in Matlab. *Structural and multidisciplinary optimization*, 50:1175–1196.
- Liu, S. y Acar, P. (2023). Exploring Property Spaces of Cellular Mechanical Metamaterials under Uncertainty. In AIAA, Herausgeber, *AIAA SciTech Forum and Exposition*, Band 1.
- López, J. (2013). *Optimización Multi-objetivo: Aplicaciones a problemas del mundo real*. Phd thesis, Facultad de informática, La Plata, Argentina.
- Lorato, A., Innocenti, P., Scarpa, F., Alderson, A., Alderson, K. L., Zied, K. M., Ravirala, N., Miller, W., Smith, C. W., y Evans, K. E. (2010). The transverse elastic properties of chiral honeycombs. *Composites Science and Technology*, 70:1057–1063.
- Lu, C., Hsieh, M., Huang, Z., Zhang, C., Lin, Y., Shen, Q., Chen, F., y Zhang, L. (2022). Architectural design and additive manufacturing of mechanical metamaterials: a review. *Engineering*, 17:44–63.
- Luca, A. D. y Guidi, L. G. (2019). State of art in the worldwide evolution of base isolation design.

Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 125:105722.

- Lv, C., Krishnaraju, D., Konjevod, G., Yu, H., y Jiang, H. (2014). Origami based mechanical metamaterials. *Scientific Reports*, 4.
- Maldovan, M. (2013). Sound and heat revolutions in phononics. *Nature*, 503:209–217.
- Mao, X. y Lubensky, T. C. (2011). Coherent potential approximation of random nearly isostatic kagome lattice. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 83:1–14.
- Mao, X., Souslov, A., Mendoza, C. I., y Lubensky, T. C. (2015). Mechanical instability at finite temperature. *Nature Communications*, 6:1–8.
- Marjani, A., Shirazian, S., y Asadollahzadeh, M. (2018). Topology optimization of neural networks based on a coupled genetic algorithm and particle swarm optimization techniques (c-GA–PSO-NN). *Neural Computing and Applications*, 29:1073–1076.
- Martelli, A., Clemente, P., De Stefano, A., Forni, M., y Salvatori, A. (2014). Recent development and application of seismic isolation and energy dissipation and conditions for their correct use. In *Perspectives on European Earthquake Engineering and Seismology: Volume 1*, Seiten 449–488. Springer International Publishing Cham.
- Martin, A., Kadic, M., Schittny, R., Bückmann, T., y Wegener, M. (2012). Phonon band structures of three-dimensional pentamode metamaterials. *Physical Review B - Condensed Matter and Materials Physics*, 86:2–6.
- Micheli, L., Cao, L., Gong, Y., Cancelli, A., Laflamme, S., y Alipour, A. (2017). Probabilistic

- performance-based design for high performance control systems. In *Active and Passive Smart Structures and Integrated Systems 2017*, Band 10164, Seiten 555–568. SPIE.
- Millán Páramo, C. (2013). Optimización topológica de elementos estructurales: un enfoque estocástico. Master thesis, Escuela de ingeniería civil, Bucaramanga, Colombia.
- Millán Páramo, C. (2020). *Abordagem metaheurística para otimização estrutural*. Phd thesis, Departamento Acadêmico de Construção Civi, Curitiba, Brasil.
- Miller, W., Smith, C. W., Scarpa, F., y Evans, K. E. (2010). Flatwise buckling optimization of hexachiral and tetrachiral honeycombs. *Composites Science and Technology*, 70:1049–1056.
- Milton, G. W. (1992). Composite materials with poisson's ratios close to - 1. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 40:1105–1137.
- Milton, G. W. (2016). Analytic materials. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 472:20160613.
- Milton, G. W., Briane, M., y Willis, J. R. (2006). On cloaking for elasticity and physical equations with a transformation invariant form. *New Journal of Physics*, 8.
- Milton, G. W. y Cherkaev, A. V. (1995). Which elasticity tensors are realizable? *Journal of Engineering Materials and Technology, Transactions of the ASME*, 117:483–493.
- Miura, K. (1975). New structural form of sandwich core. *Journal of Aircraft*, 12:437–441.
- Mokarram, V. y Banan, M. R. (2018). An improved multi-objective optimization approach for

- performance-based design of structures using nonlinear time-history analyses. *Applied Soft Computing*, 73:647–665.
- Morales-Beltran, M. y Paul, J. (2015). Active and semi-active strategies to control building structures under large earthquake motion. *Journal of Earthquake Engineering*, 19(7):1086–1111.
- Mores, W., Nimmegeers, P., Hashem, I., Bhonsale, S. S., y Van Impe, J. F. (2023). Multi-objective optimization under parametric uncertainty: A Pareto ellipsoids-based algorithm. *Computers & Chemical Engineering*, 169(1):108099.
- Mousanezhad, D., Haghpanah, B., Ghosh, R., Hamouda, A. M., Nayeb-Hashemi, H., y Vaziri, A. (2016). Elastic properties of chiral, anti-chiral, and hierarchical honeycombs: A simple energy-based approach. *Theoretical and Applied Mechanics Letters*, 6:81–96.
- Mu, D., Shu, H., Zhao, L., y An, S. (2020). A Review of Research on Seismic Metamaterials. *Advanced Engineering Materials*, 22:1–23.
- Muhlestein, M. B. y Haberman, M. R. (2016). A micromechanical approach for homogenization of elastic metamaterials with dynamic microstructure. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 472.
- Munn, R. W. (1972). Role of the elastic constants in negative thermal expansion of axial solids. *Journal of Physics C: Solid State Physics*, 5:535–542.
- Neville, R. M., Scarpa, F., y Pirrera, A. (2016). Shape morphing Kirigami mechanical metamaterials. *Scientific Reports*, 6:1–12.

- Ng, C. y Xu, Y. (2006). Seismic response control of a building complex utilizing passive friction damper: Analytical study. *Structural Engineering and Mechanics*, 22:85–105.
- Nicolaou, Z. G. y Motter, A. E. (2012). Mechanical metamaterials with negative compressibility transitions. *Nature Materials*, 11:608–613.
- Niño-Álvarez, L. H. (2020). Optimización topológica de estructuras de celosía. Master thesis, Escuela de ingeniería civil, Bucaramanga, Colombia.
- Niño-Álvarez, L. H., Guevara-Corzo, J., y Begambre-Carrillo, O. (2019). 1er Congreso Internacional de Ingeniería civil y IV simposio innovar para crecer. In Ingenierías, U., Herausgeber, *Inteligencia computacional en el diseño óptimo de estructuras tipo armadura*, Band 1. Universidad Pontificia Bolivariana.
- Niño-Álvarez, L. H., Guevara-Corzo, J., y Begambre-Carrillo, O. (2022). Diseño automático de cerchas de granescala: una comparación entre algoritmoslibres de derivadas. *Ingeniería y Ciencia*, 16(32):83–108.
- Niño-Álvarez, L. H., Guevara-Corzo, J., y Begambre-Carrillo, O. (2024). Optimal structural design of power transmission towers using multiobjective metaheuristic algorithms. In Ingenierías, U., Herausgeber, *XL Jornadas Sulamericanas de Engenharia Estrutural*, Band 1. Associação Sul Americana de Engenharia Estrutural.
- Norris, A. N. (2014). Mechanics of elastic networks. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 470:20140522.
- Oliver, J., Yago, D., Cante, J., y Lloberas-Valls, O. (2019). Variational approach to relaxed topologi-

- cal optimization: Closed form solutions for structural problems in a sequential pseudo-time framework. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 355(1):779–819.
- Oviedo, J. A. y Duque, M. (2009). Disipadores Histeréticos Metálicos como Sistemas De Control De Respuesta Sismica En Edificaciones. *Revista EIA*, Seiten 51–63.
- Pacific Earthquake Engineering Research Center (2024). PEER Ground Motion Database. Online database.
- Palermo, A. y Marzani, A. (2018). Control of Love waves by resonant metasurfaces. *Scientific Reports*, 8:1–8.
- Paulino, D. M. y Leonel, E. D. (2022). Topology optimization and geometric nonlinear modeling using positional finite elements. *Optimization and Engineering*, 23:1439–1469.
- Paulose, J., Chen, B. G. G., y Vitelli, V. (2015). Topological modes bound to dislocations in mechanical metamaterials. *Nature Physics*, 11:153–156.
- Pendry, J. B. (2000). Negative refraction makes a perfect lens. *Physical Review Letters*, 85:3966–3969.
- Peng, Z., Meng, G., Lang, Z., Zhang, W., y Chu, F. (2012). Study of the effects of cubic nonlinear damping on vibration isolations using harmonic balance method. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 47(10):1073–1080.
- Pérez-García, J. (2023). Validación de la eficiencia de metamateriales mecánicos en aislamiento de vibraciones sometidos a un ensayo de transmisibilidad. Bachelor's thesis in mechanical

engineering, Escuela de ingeniería mecánica, Universidad Industrial de Santander.

- Pong, W. y Tsai, C. (1995). Seismic study of buildings with viscoelastic dampers. *Structural Engineering and Mechanics*, 3:596–581.
- Pozniak, A. A. y Wojciechowski, K. W. (2014). Poisson's ratio of rectangular anti-chiral structures with size dispersion of circular nodes. *Physica Status Solidi (B) Basic Research*, 251:367–374.
- Prall, D. y Lakes, R. (1997). Properties of chiral honeycomb with Poisson's ratio of -1. *International Journal of Mechanical Sciences*, 39:305–314.
- Qiu, Y., Zhu, Y., Luo, Z., Gao, Y., y Li, Y. (2021). The analysis and design of nonlinear vibration isolators under both displacement and force excitations. *Archive of Applied Mechanics*, 91:2159–2178.
- Queheillalt, D. T. y Wadley, H. N. (2005). Cellular metal lattices with hollow trusses. *Acta Materialia*, 53:303–313.
- Querin, O., Steven, G., y Xie, Y. (1998). Evolutionary structural optimization (ESO) using a bi-directional algorithm. *Engineering Computations*, 15(8):1031–1048.
- Resch, R. (1968). Experimental Structures. *Architect-Researcher Conference, Proceedings of the American Institute of Architects*.
- Resch, R. (1970). The design and analysis of kinematic folded plate systems. *Proceedings of IASS Symposium on Folded Plates and Prismatic Structures*.

- Resch, R. y Christiansen, H. (1970). Kinematic folded plate system. *IASS Symposium*, 1.
- Rozvany, G. I. N., Zhou, M., y Birker, T. (1992). Generalized shape optimization without homogenization. *Structural optimization*, 4:250–252.
- Saddek, A. A., Lin, T.-K., Chang, W.-K., Chen, C.-H., y Chang, K.-C. (2023). Metamaterials of auxetic geometry for seismic energy absorption. *Materials*, 16(15).
- Salimi, M., Kamgar, R., y Heidarzadeh, H. (2021). An evaluation of the advantages of friction TMD over conventional TMD. *Innovative Infrastructure Solutions*, 6(2).
- Saoud, A., Omar, A., y Queiros-Conde, D. (2020). Development of a metamaterial periodic foundation for seismic protection. *EASD Procedia EURO DYN*.
- Sasaki, H. y Igarashi, H. (2019). Topology optimization accelerated by deep learning. *IEEE Transactions on Magnetics*, 55(6):1–5.
- Schenk, M. y Guest, S. D. (2013). Geometry of Miura-folded metamaterials. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 110:3276–3281.
- Schittny, R., Bückmann, T., Kadic, M., y Wegener, M. (2013a). Elastic measurements on macroscopic three-dimensional pentamode metamaterials. *Applied Physics Letters*, 103.
- Schittny, R., Kadic, M., Guenneau, S., y Wegener, M. (2013b). Experiments on transformation thermodynamics: Molding the flow of heat. *Physical Review Letters*, 110:1–10.
- Shan, S., Kang, S. H., Wang, P., Qu, C., Shian, S., Chen, E. R., y Bertoldi, K. (2014). Harnessing

- Multiple Folding Mechanisms in Soft Periodic Structures for Tunable Control of Elastic Waves. *Advanced Functional Materials*, 24:4935–4942.
- Shim, J., Shan, S., Košmrlj, A., Kang, S. H., Chen, E. R., Weaver, J. C., y Bertoldi, K. (2013). Harnessing instabilities for design of soft reconfigurable auxetic/chiral materials. *Soft Matter*, 9:8198.
- Shokri Rad, M., Ahmad, Z., y Alias, A. (2015). Computational approach in formulating mechanical characteristics of 3D star honeycomb auxetic structure. *Advances in Materials Science and Engineering*, (1):650769.
- Shyu, T. C., Damasceno, P. F., Dodd, P. M., Lamoureux, A., Xu, L., Shlian, M., Shtein, M., Glotzer, S. C., y Kotov, N. A. (2015). A kirigami approach to engineering elasticity in nanocomposites through patterned defects. *Nature Materials*, 14:785–789.
- Sigmund, O. (1994). Materials with prescribed constitutive parameters: An inverse homogenization problem. *International Journal of Solids and Structures*, 31(18):2313–2329.
- Sigmund, O. (1995). Tailoring materials with prescribed elastic properties. *Mechanics of Materials*, 20:351–368.
- Sigmund, O. (2000). New class of extremal composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48:397–428.
- Silverberg, J. L., Evans, A. A., McLeod, L., Hayward, R. C., Hull, T., Santangelo, C. D., y Cohen, I. (2014). Using origami design principles to fold reprogrammable mechanical metamaterials. *Science*, 345:647–650.

- Silverberg, J. L., Na, J. H., Evans, A. A., Liu, B., Hull, T. C., Santangelo, C. D., Lang, R. J., Hayward, R. C., y Cohen, I. (2015). Origami structures with a critical transition to bistability arising from hidden degrees of freedom. *Nature Materials*, 14:389–393.
- Smith, D. R., Pendry, J. B., y Wiltshire, M. C. K. (2004). Metamaterials and Negative Refractive Index. *Science*, 305:788–792.
- Song, J., Chen, Y., y Lu, G. (2012). Axial crushing of thin-walled structures with origami patterns. *Thin-Walled Structures*, 54:65–71.
- Soong, T. y Spencer, B. (2000). Active, semi-active and hybrid control of structures. *Bulletin of the New Zealand Society for Earthquake Engineering*, 33:387–402.
- Sosnovik, I. y Oseledets, I. (2019). Neural networks for topology optimization. *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*, 34(4):215–223.
- Soukoulis, C. M. y Wegener, M. (2011). Past achievements and future challenges in the development of three-dimensional photonic metamaterials. *Nature Photonics*, 5:523–530.
- Spadoni, A. y Ruzzene, M. (2012). Elasto-static micropolar behavior of a chiral auxetic lattice. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 60:156–171.
- Spencer Jr, B. y Soong, T. (1999). New Applications and Development of Active, Semi-Active and Hybrid Control Techniques for Seismic and Non-Seismic Vibrations in the USA. *Proceedings of International Post-SMiRT Conference Seminar on Seismic Isolation, Passive Energy Dissipation and Active Control of Vibration of Structures*.

- Suárez-Marín, Y. y Báez-Vargas, P. (2022). Estudio paramétrico del comportamiento histerético de disipadores de placas ranuradas usando las herramientas de Ansys Workbench. Bachelor's thesis in civil engineering, Escuela de ingeniería civil, Universidad Industrial de Santander.
- Suzuki, K. y Kikuchi, N. (1991). Shape and topology optimization by a homogenization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 93:291–318.
- Svanberg, K. (1987). The method of moving asymptotes - A new method for structural optimization. *International Journal for Numerical Method in Engineering*, 24:359–373.
- Svanberg, K. (2007). MMA and GCMMA - two methods for nonlinear optimization. *vol*, 1:1–15.
- Symans, M. D., Charney, F. A., Whittaker, A. S., Constantinou, M. C., Kircher, C. A., Johnson, M. W., y McNamara, R. J. (2008). Energy dissipation systems for seismic applications: Current practice and recent developments. *Journal of Structural Engineering*, 134:3–21.
- Tabatabaei, M., Hakanen, J., Hartikainen, M., Miettinen, K., y Sindhya, K. (2015). A survey on handling computationally expensive multiobjective optimization problems using surrogates: non-nature inspired methods. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 52(1):1–25.
- Tachi, T. (2013). Designing freeform origami tessellations by generalizing resch's patterns. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 135:1–10.
- Tachi, T. y Miura, K. (2012). Rigid-foldable cylinders and cells. *Journal of the international association for shell and spatial structures*, 53:217–226.
- Tang, Y., Lin, G., Yang, S., Yi, Y. K., Kamien, R. D., y Yin, J. (2017). Programmable Kiri-Kirigami

- Metamaterials. *Advanced Materials*, 29:1–9.
- Torrents, A., Schaedler, T. A., Jacobsen, A. J., Carter, W. B., y Valdevit, L. (2012). Characterization of nickel-based microlattice materials with structural hierarchy from the nanometer to the millimeter scale. *Acta Materialia*, 60:3511–3523.
- Torres León, J. F. (2019). Propuesta de actualización parcial del manual de evaluación y reforzamiento sísmico para reducción de vulnerabilidad en viviendas de mampostería no estructural de Build Change. Master thesis, Escuela de ingeniería civil, Bogotá, Colombia.
- Tsushima, N., Higuchi, R., y Arizono, H. (2022). Finite Element Procedure for Strength Evaluation in Lattice-Based Mechanical Metamaterials. In AIAA, Herausgeber, *AIAA Science and Technology Forum and Exposition, AIAA SciTech Forum 2022*, Band 1.
- Ungureanu, B., Achaoui, Y., Enoch, S., Brûlé, S., y Guenneau, S. (2015). Auxetic-like metamaterials as novel earthquake protections. *EPJ Applied Metamaterials*, 2.
- Van Eck, N. y Waltman, L. (2010). Software survey: VOSviewer, a computer program for bibliometric mapping. *Scientometrics*, 84:523–538.
- Veselago, V. (1968). The electrodynamics of the substances with simultaneously negative values of ϵ and μ . *Soviet physics uspekhi*, 10:509–514.
- Vitelli, V. (2012). Topological soft matter: Kagome lattices with a twist. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 109:12266–12267.
- Vogiatzis, P., Chen, S., Wang, X., Li, T., y Wang, L. (2017). Topology optimization of multi-

- material negative Poisson's ratio metamaterials using a reconciled level set method. *CAD Computer Aided Design*, 83:15–32.
- Waitukaitis, S., Menaut, R., Chen, B. G. G., y Hecke, M. V. (2015). Origami multistability: From single vertices to metasheets. *Physical Review Letters*, 114:2–6.
- Wang, G., Jin, L., Zhang, L., y Xu, Z. (2017). Phonon band structures of the three dimensional latticed pentamode metamaterials. *AIP Advances*, 7(2).
- Weber, F., Okumusoglu, D., Huber, P., Distl, J., Spensberger, S., y Braun, C. (2019). Adaptive TMD system for reduced space demand in tall buildings. In *20th Congress of IABSE, New York City 2019: The Evolving Metropolis - Report*, Band 1, Seiten 377 – 382.
- Wei, P., Li, Z., Li, X., y Wang, M. Y. (2018). An 88-line MATLAB code for the parameterized level set method based topology optimization using radial basis functions. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 58:831–849.
- Wei, Z. Y., Guo, Z. V., Dudte, L., Liang, H. Y., y Mahadevan, L. (2013). Geometric mechanics of periodic pleated origami. *Physical Review Letters*, 110:1–5.
- Wicks, N. y Hutchinson, J. W. (2004). Sandwich plates actuated by a Kagome planar truss. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 71:652–662.
- Wills, A. S., Ballou, R., y Lacroix, C. (2002). Model of localized highly frustrated ferromagnetism: The kagomé spin ice. *Physical Review B - Condensed Matter and Materials Physics*, 66:1–6.
- Witarto, W., Wang, S. J., Yang, C. Y., Nie, X., Mo, Y. L., Chang, K. C., Tang, Y., y Kassawara, R.

- (2018). Seismic isolation of small modular reactors using metamaterials. *AIP Advances*, 8.
- Wojciechowski, K. W. (1989). Two-dimensional isotropic system with a negative poisson ratio. *Physics Letters A*, 137:60–64.
- Wu, J., Luo, Z., Li, H., y Zhang, N. (2017). Level-set topology optimization for mechanical metamaterials under hybrid uncertainties. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 319:414–441.
- Wu, S., Luo, Z., Li, Z., Liu, S., y Zhang, L. C. (2021). Topological design of pentamode metamaterials with additive manufacturing. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 377.
- Xie, Y. M. y Steven, G. P. (1993). A simple evolutionary procedure for structural optimization. *Computers and Structures*, 49(5):885–896.
- Xie, Y. M., Yang, X., Shen, J., Yan, X., Ghaedizadeh, A., Rong, J., Huang, X., y Zhou, S. (2014). Designing orthotropic materials for negative or zero compressibility. *International Journal of Solids and Structures*, 51:4038–4051.
- Yago, D., Cante, J., Lloberas-Valls, O., y Oliver, J. (2021). Topology optimization using the unsmooth variational topology optimization (UNVARTOP) method: an educational implementation in MATLAB. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 63:955–981.
- Yago, D., Cante, J., Lloberas-Valls, O., y Oliver, J. (2022). Topology Optimization Methods for 3D Structural Problems: A Comparative Study. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 29:1525–1567.

- Yang, N., Deng, Y., Mao, Z. F., Chen, Y. T., Wu, N., y Niu, X. D. (2019). New network architectures with tunable mechanical properties inspired by origami. *Materials Today Advances*, 4.
- Yasuda, H. y Yang, J. (2015). Reentrant origami-based metamaterials with negative Poisson's ratio and bistability. *Physical Review Letters*, 114:1–5.
- Yu, X., Zhou, J., Liang, H., Jiang, Z., y Wu, L. (2018). Mechanical metamaterials associated with stiffness, rigidity and compressibility: A brief review. *Progress in Materials Science*, 94:114–173.
- Yuan, L., Shi, H., Ma, J., y You, Z. (2019). Quasi-static impact of origami crash boxes with various profiles. *Thin-Walled Structures*, 141:435–446.
- Yvonnet, J. (2019). *Computational homogenization of heterogeneous materials with finite elements*, Band 258. Springer.
- Zeng, Y., Xu, Y., Yang, H., Muzamil, M., Xu, R., Deng, K., Peng, P., y Du, Q. (2020). A Matryoshka-like seismic metamaterial with wide band-gap characteristics. *International Journal of Solids and Structures*, 185:334–341.
- Zhang, G. y Khandelwal, K. (2019). Computational design of finite strain auxetic metamaterials via topology optimization and nonlinear homogenization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 356:490–527.
- Zhang, L., Bai, Z., y Chen, Y. (2022). Dual-functional hierarchical mechanical metamaterial for vibration insulation and energy absorption. *Engineering Structures*, 271:114916.

- Zhang, W., Yuan, J., Zhang, J., y Guo, X. (2016). A new topology optimization approach based on Moving Morphable Components (MMC) and the ersatz material model. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 53:1243–1260.
- Zhao, Y., Guo, G., y Zuo, W. (2023). MATLAB implementations for 3D geometrically nonlinear topology optimization: 230-line code for SIMP method and 280-line code for MMB method. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 66(7):146.
- Zheng, X., Lee, H., Weisgraber, T. H., Shusteff, M., DeOtte, J., Duoss, E. B., Kuntz, J. D., Biener, M. M., Ge, Q., Jackson, J. A., Kucheyev, S. O., Fang, N. X., y Spadaccini, C. M. (2014). Ultralight, ultrastiff mechanical metamaterials. *Science*, 344:1373–1377.
- Zheng, X., Smith, W., Jackson, J., Moran, B., Cui, H., Chen, D., Ye, J., Fang, N., Rodriguez, N., Weisgraber, T., y Spadaccini, C. M. (2016). Multiscale metallic metamaterials. *Nature Materials*, 15:1100–1106.
- Zhu, J. H., Zhang, W. H., y Qiu, K. P. (2007). Bi-Directional Evolutionary Topology Optimization Using Element Replaceable Method. *Computational Mechanics volume*, 40:97–109.