

**XXVII CONGRESO LATINOAMERICANO DE HIDRÁULICA
LIMA, PERÚ, 28 AL 30 DE SETIEMBRE DE 2016**

**CARACTERIZACIÓN ESTADÍSTICA DE VARIABLES
HIDROCLIMATOLÓGICAS EN EL DEPARTAMENTO DE BOYACÁ
(COLOMBIA) CON PROPÓSITO DE PREDICCIÓN**

*Dayam Soret Calderón Rivera , Claudia Fernanda Navarrete López y José Luis Díaz Arévalo
Universidad Santo Tomás - Colombia, Colombia
dayamcalderon@usantotomas.edu.co, claudianavarrete@usantotomas.edu.co,
jluisdiaz@usantotomas.edu.co*

RESUMEN:

Se presenta un estudio acerca de la selección de la mejor distribución probabilística para las variables medias mensuales multianuales de la precipitación, temperatura y humedad relativa en el departamento de Boyacá (Colombia), para con base en estas distribuciones y el uso de iso-percentiles realizar predicciones de dichas variables. Se seleccionaron las distribuciones Normal, Gamma, Weibull y LogNormal para ajustar los datos; y para encontrar cual distribución ajusta mejor los datos se utilizaron los criterios de información basados en la máxima verosimilitud de Akaike (Akaike Information Criterion) y Bayesiano (Bayesian Information Criterion). Se presentan los resultados tanto en forma tabular como gráfica, y una validación de la metodología para los datos de precipitación.

ABSTRACT:

A study on the selection of the best probabilistic distribution for multi-year monthly average of rainfall, temperature and relative humidity variables in the department of Boyacá (Colombia) is presented, as the basis on these distributions and the use of iso-percentiles perform predictions of these variables. Normal, Gamma, Weibull and lognormal distributions were selected to fit the data. To find which best fits the data criteria information based in maximum likelihood, Akaike (Akaike Information Criterion) and Bayesian (Bayesian Information Criterion) were used. The results are presented in both tabular and graphical form, and a validation of the methodology for rainfall data.

PALABRAS CLAVES: Distribuciones de probabilidad; Variables climatológicas; Criterios de información; Boyacá; Iso-percentiles.

INTRODUCCIÓN

El objeto de éste trabajo es determinar la distribución probabilística de mejor ajuste para los datos medios multianuales de las variables climatológicas precipitación, temperatura y humedad relativa en el departamento de Boyacá (Colombia), y a partir de esta función de distribución encontrar iso-percentiles (25, 50 y 90) con los cuales poder predecir dichas variables. Los datos utilizados fueron tomados del catálogo de estaciones climatológicas proporcionado por el Instituto de Hidrología, Meteorología y Estudios Ambientales de Colombia (IDEAM). Se probaron las distribuciones Normal, Gamma, Weibull y LogNormal para ajustar los datos (Navarrete, 2008; Minka 2002; Aristizabal, 2012; Martínez, 2011; Calderón et al, 2015); y para encontrar cual distribución ajusta mejor los datos se utilizaron los criterios de información de Akaike (AIC) (Akaike, 1974) y Bayesiano (BIC) (Akaike, 1978; Schwarz 1978). Un aspecto importante de los criterios de información es que estos están asociados con el método de máxima verosimilitud, el cual, en modelos causales, está basado en el supuesto de que las variables observadas siguen una distribución normal multivariante (Caballero, 2011). La idea clave del AIC es la de penalizar un exceso de parámetros ajustados, mientras que en el BIC se penaliza el número de parámetros teniendo en cuenta que el AIC podría no ser asintóticamente justificable (Caballero, 2011; Montesinos, 2011; Ramírez, 2000). Para la predicción de las variables se utiliza el valor del percentil 50 como valor de la mediana de la distribución (Estudio para determinar la vulnerabilidad y las opciones de adaptación del sector energético colombiano frente al cambio climático, 2013)

Se encontró poca información del ajuste de distribuciones probabilísticas aplicada a series de datos hidrológicos (Ayodele, 2015; Chaouche, et.al., 2010; Donat, 2012; Räisänen, 2009; Hingray, 2007), entre los cuales a nivel local se destaca el trabajo presentado por Dorado et. al. en el 2006 donde analizaron la variabilidad espacio-temporal de la precipitación mensual y anual en el área de influencia aguas abajo del embalse de regulación y abastecimiento SARA-BRUT, ubicado en el departamento del Valle del Cauca, Colombia. Para el ajuste de las series históricas se usaron modelos de distribución de probabilidad teórica, como Gumbel, Normal, LogNormal y Wakeby, y modelos de distribución empírica, como Weibull y Landwehr. Se utilizó la prueba de Error Estándar de Ajuste (EEA) para seleccionar el modelo teórico de mejor ajuste. El modelo Wakeby presentó el mejor ajuste en el 89% del total de estaciones analizadas, el cual corresponde a un modelo probabilístico adecuado para representar los caudales de crecidas máximas diarias o instantáneas en una región. No obstante para nuestro estudio, la distribución Weibull se presenta como la más confiable debido a su versatilidad (Behar y Grimas, 2004), (Moreno et al 2011). En su trabajo de maestría (Navarrete, 2008) encuentra que para los criterios de AIC y BIC la distribución Weibull es la que mejor describe los datos. En el trabajo de Calderón *et al.* (2015) aplicado a la serie de temperaturas del departamento de Boyacá, se encuentra que gráficamente las distribuciones Normal, Gamma y Log normal presentan comportamientos muy similares para la variable temperatura media; la distribución Weibull difiere de estos comportamientos tanto gráficamente así como cuando se aplican los criterios AIC y BIC. El ajuste según el logaritmo de la función de máxima verosimilitud muestra que distribución Weibull es la más adecuada en la mayoría de las estaciones seguida de las funciones Normal y Gamma.

En cuanto a la utilización de isopercentiles se encuentran trabajos como el de Walschburger *et al.* (2015) para la determinación de caudales ecológicos con base en desviaciones aceptables sobre el caudal medio interanual. Angarita *et al.* (2013) hacen uso de iso-percentiles de caudales de probabilidad de excedencia 97.5 utilizados como aproximación de caudales mínimos en diferentes escenarios, en el San Diego County Hydrology Manual (2003) se utiliza un mapa de iso-percentil 85 para estimar el volumen de escorrentía. Tang *et al.* (2009) proponen un método de índice de estación percentil para estimar la precipitación en modelos de paso de tiempo, haciendo uso de percentiles en periodos climatológicos para estaciones que reportan datos en tiempo real.

METODOLOGÍA

La información para la realización del estudio fue proporcionada por el Instituto de Hidrología, Meteorología y Estudios Ambientales de Colombia (IDEAM), el cual cuenta con 35 estaciones climatológicas en la región, las cuales se presentan en la tabla 1 junto con la extensión de la serie analizada. De estas estaciones se obtuvo el promedio multianual de la variable temperatura, y se realizaron los histogramas de frecuencia para cada una de las estaciones con la finalidad de determinar gráficamente las funciones a ajustar. En cuanto al tratamiento de las series no fue necesario realizar completado de datos.

Se aplicaron las pruebas de Mann-Kendall (Mann, 1945; Kendall, 1975) y Rachas con la finalidad de validar supuestos de homogeneidad y aleatoriedad de las estaciones muestreadas. Los resultados obtenidos mostraron que la mitad de las estaciones presentan un comportamiento homogéneo y aleatorio. Como el objetivo del trabajo es presentar las funciones de distribución de mejor ajuste a las series de datos, no se realizaron transformaciones a las mismas.

Tabla 1. Estaciones climatológicas

NOMBRE	CÓDIGO	AÑOS	NOMBRE	CÓDIGO	AÑOS
PTO BOYACA	23115010	39	TUNEL EL	35095030	42
OTANCHE	23125080	39	UPTC	24035130	45
Buena Vista	23125100	20	SURBATA BONZA	24035120	60
APTO FURATENA	23125140	23	TUNGUAVITA	24035170	46
INST AGR SANTA SOFÍA	24015090	28	CHITA	24035250	42
VILLA CARMEN	24015220	46	SATIVANORTE	24035320	39
VILLA DE LEIVA	24015300	34	NUEVO COLON	35075010	48
SIERRA LA	24025030	47	INST AGR MACANAL	35075040	32
CUSAGUI	24035010	28	CAMPOHERMOSO	35085050	27
BETEITIVA	24035010	23	CARDON	35235010	39
COPA LA	24035040	22	BELENCITO	24035150	47
GUICAN	24035070	23	COCUY	24035240	40
APTO A LLERAS C	24035340	32	ANDALUCIA	24035350	18
CHISCAS	24035310	40	VILLA LUISA	35075030	29
RONDON	35085020	42	VIVERO	35085040	30
SAN RAFAEL	24035180	34	CORINTO	35195050	29
SUTATENZA	35075020	44	TUNEBIA	37035010	40
BOAVITA	24035330	36			

Fuente: Catálogo red estaciones hidroclimáticas – IDEAM

Por medio de los software R¹ y ParameterSolver² se procesaron los datos y se estimaron los parámetros, con el fin de hallar las distribuciones de probabilidad y las funciones de máxima verosimilitud, las cuales fueron utilizadas para calcular los criterios de información Akaike (AIC) y Bayesiano (BIC); con base en estos se escogió la distribución de mejor ajuste (Calderón *et al.* 2015, Akaike, 1974, Akaike 1978, Schwarz 1978).

Las distribuciones de probabilidad y los criterios se describen a continuación:

¹ <https://www.r-project.org/>

² https://biostatistics.mdanderson.org/softwaredownload/SingleSoftware.aspx?Software_Id=6

Distribuciones de probabilidad

Distribución normal: está dada por dos parámetros de la función $f(\mu, \sigma)$, donde σ representa la desviación estándar y μ la media de la muestra.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad [1]$$

Distribución Gamma: es un caso especial de la distribución Pearson tipo III donde sus parámetros deben ser diferentes de 0. Esta distribución está dada por: $\Gamma(\alpha)$ la función gamma de α , β como el parámetro de escala y α es el parámetro de forma.

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{(\alpha-1)} e^{-\frac{x}{\beta}} \quad [2]$$

donde $\alpha = \frac{1}{(\frac{\sigma}{\mu})^2}$ y $\beta = \frac{\mu}{\sigma^2}$

Distribución Weibull: se describe según los parámetros de escala y localización β , forma m y α como origen de la distribución.

$$f(x) = \frac{m}{\beta} \left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^{m-1} e^{-\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^m} \quad [3]$$

donde $\alpha = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i)^\beta$ y $\beta = \frac{\mu}{\sigma}$

Distribución Log normal: está dada por dos parámetros donde σ representa la desviación estándar y μ la media de la muestra

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad [4]$$

Máxima verosimilitud

La función de máxima de verosimilitud está dada por la máxima probabilidad de que ocurra o se dé una determinada muestra si es cierta la estimación que hemos efectuado, o el estimador que hemos planteado. La densidad conjunta para esas observaciones es denotada como $L = f(x_i, p)$, y la máxima verosimilitud puede ser obtenida tomando la derivada de L en relación con la probabilidad p igualando la función a 0, para lo cual es mejor tomar logaritmos de la función L y derivarlo; n es el número de observaciones.

Normal

$$\ln(x)L(x, \mu, \sigma^2) = -n \ln(x) (\sigma\sqrt{2\pi}) \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)}{2\sigma^2} \quad [5]$$

Gamma

$$\ln(x)L(x, \alpha, \beta) = n\alpha \ln(\beta) - n \ln[\Gamma(\alpha)] + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n (\ln(x_i)) - \beta \sum_{i=1}^n (x_i) \quad [6]$$

Weibull

$$\ln(x)L(x, \alpha, \beta) = n[\ln(\alpha) - \alpha \ln(\beta)] + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n (\ln(x_i)) - \frac{1}{\beta^\alpha} \sum_{i=1}^n (x_i^\alpha) \quad [7]$$

Log-normal

$$\ln(x)L(x, \mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \sum_{i=1}^n (\ln(x_i)) - \frac{\sum_{i=1}^n (\ln(x_i)^2)}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^n (\mu \ln(x_i))}{\sigma^2} - \frac{n\mu^2}{2\sigma^2} \quad [8]$$

Calculo AIC y BIC

El criterio de información Akaike propuesto en 1974 y utilizado como un estimador insesgado, precisa que el modelo de probabilidad de menor valor AIC es el que se selecciona como el mejor al que se le ajustan los datos. La función está dada por la maximización del logaritmo de la máxima verosimilitud denotado como $(\ln L)$ y K es el número de parámetros de la función de probabilidad (parámetros en el modelo):

$$AIC = 2K - 2\ln(L) \quad [9]$$

La estructura del AIC está compuesta por la maximización del logaritmo de verosimilitud, es decir, como componente de la falta de ajuste del modelo y K como el número de parámetros estimados dentro del modelo como componente de penalidad. La penalidad es una medida de la complejidad o compensación por el sesgo debido a la falta de ajuste cuando los estimadores de máxima verosimilitud son empleados (Bozdogan, 1987 en Acuña et. al. 2012).

BIC sirve para la selección del modelo entre un conjunto finito de modelos, está estrechamente relacionado con el criterio AIC y se basa en parte en la función de probabilidad. Para mejorar la inconsistencia del criterio AIC, Akaike 1978 y Schwarz 1978 presentaron un criterio de selección de modelos desde la perspectiva bayesiana. Schwarz estableció que la solución de bayes consiste en seleccionar el modelo con una alta probabilidad a posteriori. El criterio de información bayesiana (BIC) se define como:

$$BIC = 2 \ln(L) + K \ln(n) \quad [10]$$

Percentiles

Los percentiles corresponden a una medida de localización con la cual se describe una muestra (Ballesteros, 2012), donde se distribuye la población ordenada en 100 partes correspondientes de 1%,...,99%; en este sentido, el percentil es un valor que no supera determinado porcentaje de miembros de una población o un valor de la variable en la posición determinada (Devore, 2008). El percentil se define mediante la siguiente ecuación, donde n es el número total de datos de la muestra y q es el percentil el cual se desea calcular:

$$(n * q)/100 = \text{percentil} \quad [11]$$

RESULTADOS

Como se puede apreciar en la Tabla 2 la distribución que mejor ajusta la mayoría de las series de datos climatológicos tomados es la Weibull. También se presenta el valor del percentil 50 como base para la construcción de los planos de iso-percentiles los cuales pueden ser utilizados con propósito de predicción de las variables. Aunque también se calcularon los valores de percentil 25 y 90, se utilizó el percentil 50 como valor apropiado para la predicción ya que los otros o subestimarían o sobreestimarían el valor.

Tabla 2. Distribuciones de probabilidad de mejor ajuste y percentil 50 para cada variable

Estación	Humedad Relativa (%)		Precipitación (mm)		Temperatura (°C)	
	Distribución	P-50	Distribución	P-50	Distribución	P-50
PTO BOYACA	Weibull	78.3	Normal	189.6	Weibull	27.76
OTANCHE	Normal	88.6	Normal	290.9	Weibull	24.11
BUENAVISTA	Normal	88.7	Gamma	164.1	Normal	15.98
APTO FURATENA	Normal	85.7	Weibull	157.9	Log Normal	22.56
INST AGR SANTA SOFÍA	Gamma	77.7	Weibull	106.4	Normal	16.2
VILLA CARMEN	Weibull	77.8	Weibull	75.3	Weibull	13.95
VILLA DE LEYVA	Weibull	72.4	Gamma	91	Weibull	16.97
SIERRA LA	Weibull	84.9	Weibull	163.1	Gamma	12.3
CUSAGUI	Gamma	80.3	Gamma	99.3	Weibull	12.35
BETEITIVA	Weibull	78.9	Weibull	84.2	Normal	15.1
COPA LA	Normal	80.4	Gamma	68.4	Log Normal	13.5
GUICAN	Gamma	80.1	Gamma	93.3	Gamma	13.3
APTO A LLERAS C	Weibull	70.1	Weibull	72.3	Weibull	14.2
CHISCAS	Normal	72	Normal	114.5	Weibull	16.5
RONDON	Gamma	87.6	Weibull	170.1	Gamma	16.15
SAN RAFAEL	Normal	75.1	Gamma	71.7	Normal	15.2
SUTATENZA	Weibull	77.8	Weibull	99	Normal	18.05
TUNEL EL	Gamma	83.6	Weibull	68.7	Normal	11.7
UPTC	Normal	82.4	Weibull	71.9	Weibull	13.1
SURBATA BONZA	Weibull	72	Weibull	76.1	Gamma	14.55
TUNGUAVITA	Weibull	75.8	Weibull	89.1	Weibull	14.6
CHITA	Weibull	73.3	Weibull	85.2	Weibull	11.85
SATIVANORTE	Weibull	67.6	Weibull	88.7	Weibull	9.15
NUEVO COLON	Weibull	81.9	Weibull	80.7	Weibull	14.45
INST AGR MACANAL	Log normal	76.1	Normal	193.6	Weibull	17.14
CAMPOHERMOSO	Weibull	85	Weibull	154.1	Gamma	21.2
CARDON EL	Weibull	78	Weibull	213.7	Weibull	6.35
BELENCITO	Weibull	74	Weibull	76.8	Gamma	15.7
SIERRA NEVADA COCUY	Weibull	85.5	Weibull	77.5	Weibull	6.55
ANDALUCIA	Weibull	84.1	Weibull	106.1	Weibull	9.7
VILLA LUISA	Weibull	81.2	Weibull	90.8	Weibull	16.9
EL VIVERO	Log normal	77	Weibull	130.1	Weibull	19.15
CORINTO	Weibull	86.8	Weibull	245.9	Weibull	18.45
TUNEBIA	Weibull	75.4	Weibull	408.1	Weibull	24.5
BOAVITA	Weibull	74.8	Weibull	102.5	Weibull	17.4

A continuación se presentan gráficos de las distribuciones de probabilidad para una de las estaciones climatológicas del estudio, en color verde se puede apreciar la distribución Weibull.

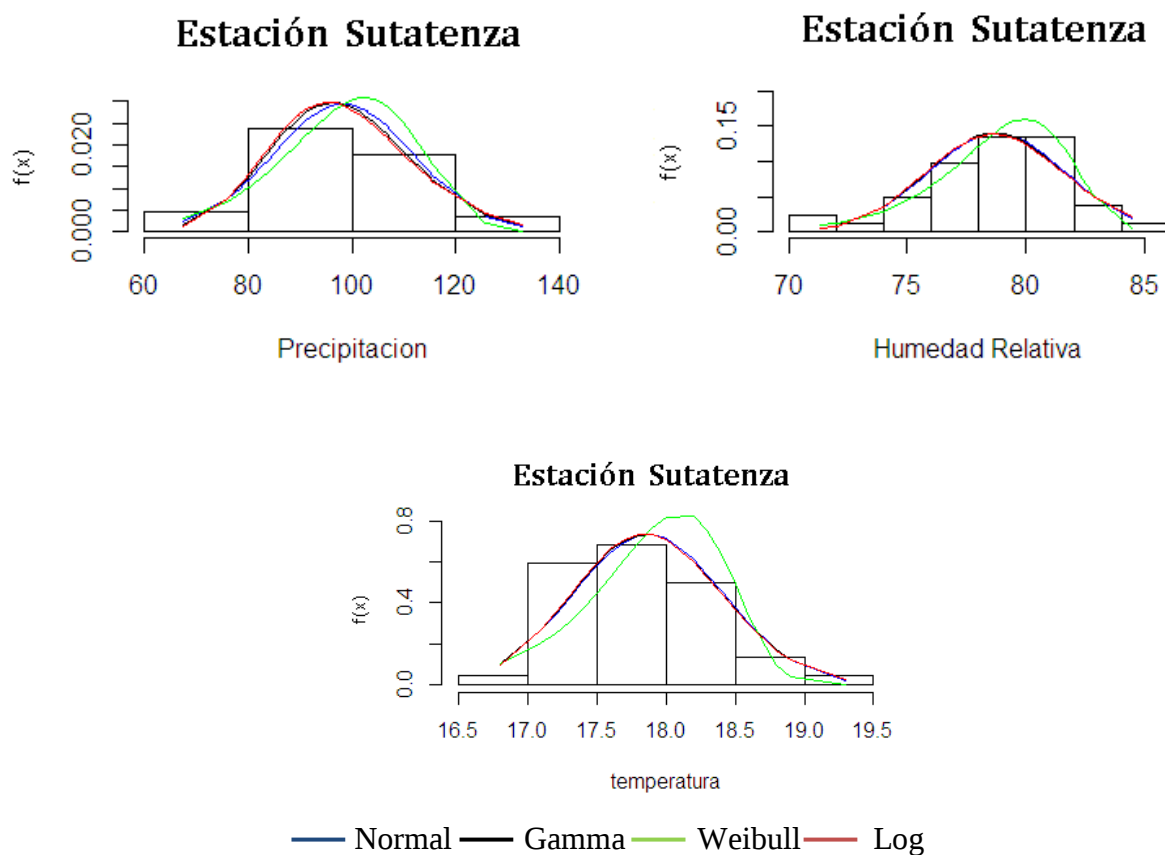


Figura 1.- Distribuciones de probabilidad

Con base en estas funciones de distribución y luego de estimar la distribución acumulada para cada una de las variables en cada estación, se estimaron los valores de iso-percentil 25, 50 y 90. A continuación se presentan los planos para el iso-percentil 50 para cada una de las variables.

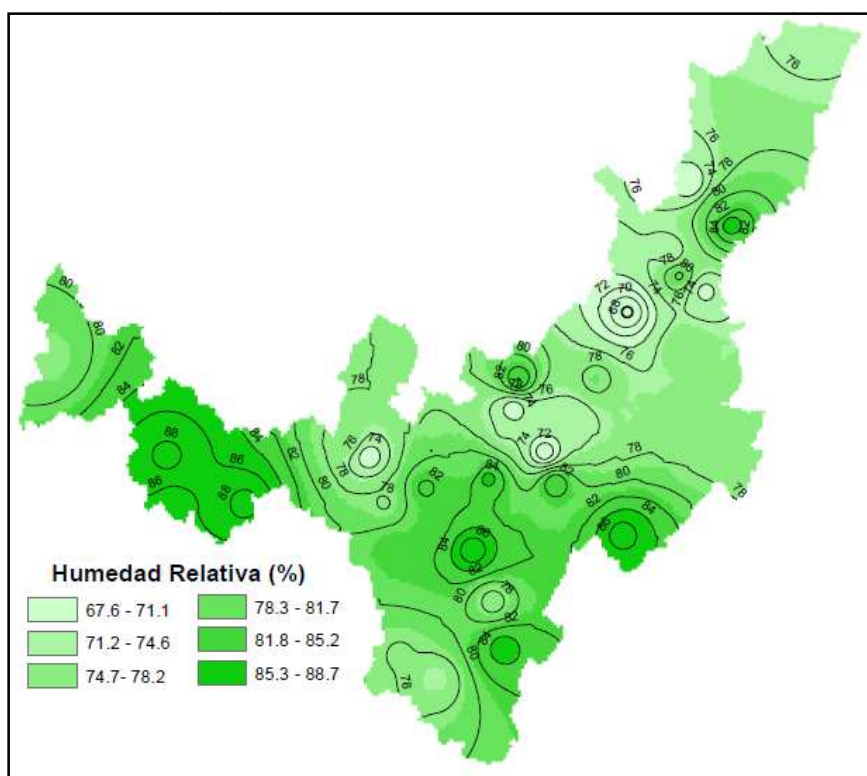


Figura 1.- Iso-percentil 50 para la humedad relativa

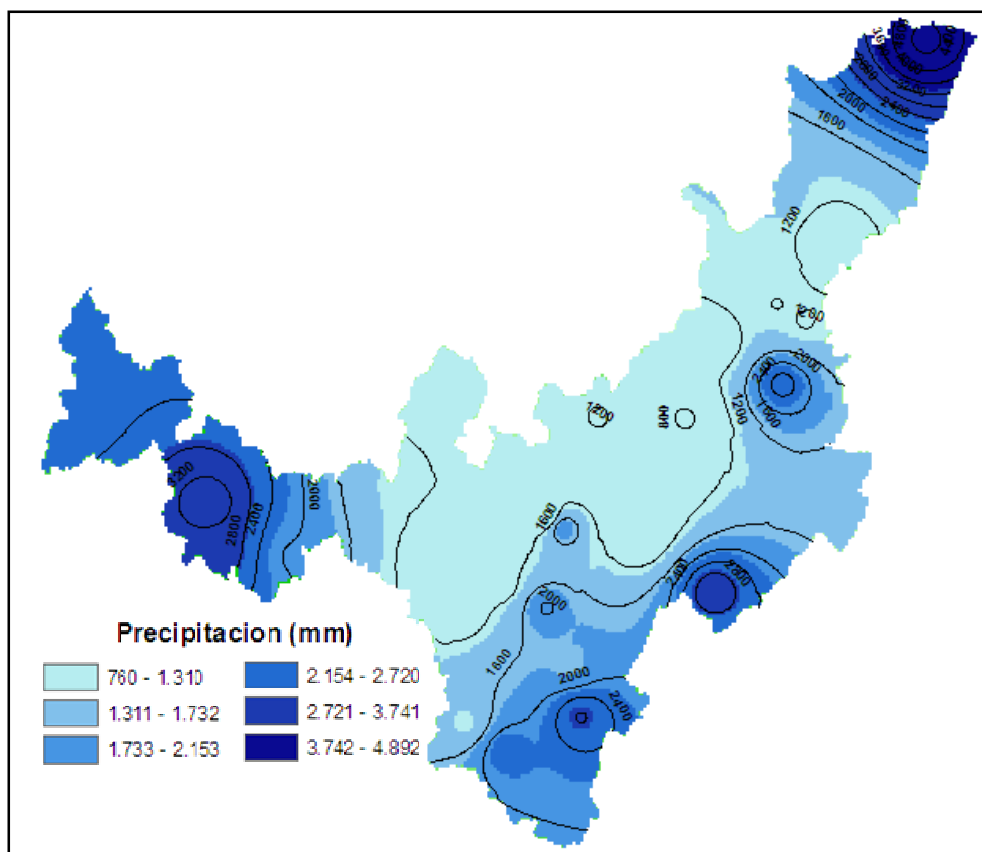


Figura 2.- Iso-percentil 50 para la precipitación

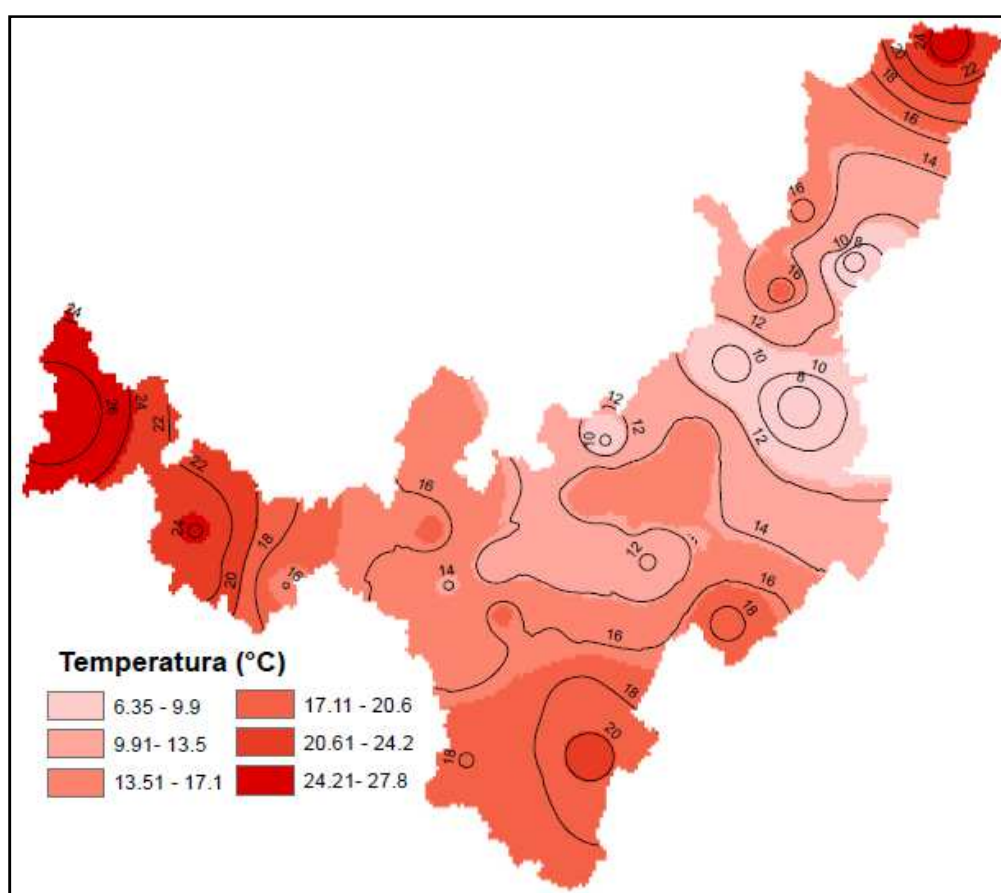


Figura 3. Iso-percentil 50 para la temperatura

Se presenta en la Tabla 3 el error cuadrático medio para las series multianuales de estaciones de precipitación que no se tomaron en cuenta para la construcción del plano de iso-percentiles y que son utilizadas para validar la metodología.

Si bien el error absoluto medio (EAM) es más propio como medida de error, el error cuadrático medio (RECM) es más sensible a los casos en que las diferencias entre valores estimados y observados son grandes, debido a que las diferencias están elevadas al cuadrado.

Tabla 3. Estimación de la raíz del error cuadrático medio para la precipitación

ESTACION	REAL	ESTIMADO	(ESTIM. – OBSERV.) ²
PTO NINO [23110030]	2281	2285	16
TRIQUE EL [23110040]	2290	2853	316969
PAUNA [23120140]	2317	2922	366025
COPER [23120210]	2392	3400	1016064
BORBUR 2 [23120250]	2864	2030	695556
GACHANTIVA [24010810]	1206	1573	134689
EMPORIO EL HDA [24010410]	1158	765	154449
ARCABUCO [24010630]	1121	1954	693889
SABOYA LA GRANJA [24010700]	1466	1437	841
MONQUIRA [24010710]	1253	1953	490000
MINAS LAS [24010800]	1190	894	87616
CERINZA [24030590]	988	1062	5476
HOTEL EL [24030780]	928	713	46225
CAZADERO [35090060]	1721	3026	1703025
PAJARITO [35190050]	2580	5357	7711729
TUTAZA [24030650]	1045	1257	44944
SUSACON [24030240]	1212	1483	73441
GUAMO DE SISBACA [35090070]	1656	1462	37636
CURITAL [24030690]	1505	1206	89401
CAMPO REAL [35070500]	1617	1416	40401
ZETAQUIRA [35080010]	1776	2119	117649
MUZO [23120050]	2907	2970	3969

El valor del error cuadrático medio se estima de la siguiente forma:

$$RECM = \sqrt{\frac{1}{n} \sum (estimado - observado)^2} = \sqrt{\frac{1}{22} 13826041^2} = 792.75 \text{ mm}$$

CONCLUSIONES

La distribución de mejor ajuste para las variables analizadas es la distribución Weibull en la cual para los parámetros de humedad relativa y temperatura se ajusta a un 60 % de las estaciones analizadas, y para el parámetro de precipitación se ajusta a un 54% del total de estaciones, lo cual puede estar basado en la versatilidad de dicha función, la cual puede adoptar diferentes formas según sus parámetros siendo muy adaptable a los parámetros climatológicos.

En cuanto a la distribución espacial del percentil 50 se puede evidenciar que los mayores valores de los parámetros se ubican en la zona nororiental y occidental, en la zona sur se evidencian valores medios, y en la parte central del departamento de Boyacá se presentan los valores más bajos

de las variables, lo cual concuerda con la relación existente entre las variables, ya que la humedad relativa depende de la temperatura siendo que el agua disponible ya sea precipitación, cuerpos de agua y/o humedad del suelo se puede evaporar en el ambiente.

Se considera que para el alcance de este trabajo el modelo propuesto para la estimación de la variable precipitación presenta resultados bastante aceptables, estando sujeto a mejoras en cuanto a la utilización de más estaciones para la elaboración del plano de iso-percentiles. No obstante se aprecia en la Tabla 3 que los resultados obtenidos en la mayoría de los casos están en márgenes de error permisibles.

Los métodos propuestos en el presente trabajo permiten ajustar y determinar de manera sencilla distribuciones probabilísticas continuas aplicadas a las variables climatológicas presentadas, permitiendo futuras estimaciones y proyecciones de la variable en condiciones de incertidumbre.

El tamaño de la muestra influye directamente en la confiabilidad de los datos en el cual se trabaja con un mínimo de 18 y un máximo de 60 años para las estaciones analizadas.

REFERENCIAS

- Acuña, C., J.A.; Dominguez, C., A.H.; Toro, O., E.M.** (2012). "Una comparación entre métodos estadísticos clásicos y técnicas metaheurísticas en el modelamiento estadístico". *Scientia et Technica* Año XVII, No 50, Abril de 2012. Universidad Tecnológica de Pereira. ISSN 0122-1701
- Akaike, H.** (1974). "A new look at the statistical model identification". *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 19, No. 6, pp. 716-723.
- Akaike, H.** (1978). "A Bayesian analysis of the minimum AIC procedure". *The Annals of Statistics*, vol. 30, No. 1, pp. 9-14, 1978.
- Angarita, H.; Delgado, J.; Escobar, M.; Walschburger, T.** (2013). "Escenarios de alteración regional del régimen hidrológico en la cuenca Magdalena - Cauca por intensificación de la demanda para hidroenergía". *Memorias del congreso internacional AGUA*. Cali: Universidad del Valle.
- Aristizabal, R. J.** (2012). *Estimating the parameters of the three-parameter lognormal distribution*. Florida International University. FIU Electronic Theses and Dissertations. Paper 575.
- Ballesteros, E.** (2012). *Estadística descriptiva una herramienta de análisis en la investigación social*. Cuartiles, deciles y percentiles: Cálculo, aplicaciones y prácticas resueltas para «enseñar y aprender». Departamento de Sociología IV Facultad de Ciencias Políticas y Sociología Universidad Complutense de Madrid. Junio de 2012.
- Behar, G., R.; Grima, C., P.** (2004). *55 Respuestas a dudas típicas de estadística*. Ediciones Díaz de Santos, S. A.
- Ayodele, T.R.; Ogunjuyigbe, A.S.O.** (2015). "Prediction of monthly average global solar radiation based on statistical distribution of clearness index". *Energy* 90. 1733-1742.
- Bozdogan, H.** (1987). "Model selection and Akaike's information criterion (AIC): The general theory and its analytical extensions". *Psychometrika*, vol. 52, No. 3, pp. 345-379, 1987.
- Caballero, D.; F.F.** (2011). *Selección de modelos mediante criterios de información en análisis factorial. Aspectos teóricos y computacionales*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada. Departamento de Estadística e I.O. ISBN 978-84-694-5742-9.
- Calderón R, D.S.; Navarrete L, C.F.; Díaz A., J.L.** (2015). "Ajustes de distribuciones probabilísticas para la variable temperatura media multianual para el departamento de Boyacá (Colombia)". *Revista Ingeniería y Región*. 2015;14(2):125-142
- Chaouche, K.; Neppel, L.; Dieulin, C.; Pujol, N.; Ladouche, B.; Martin, E.; Salas, D.; Caballero, Y.** (2010). "Analyses of precipitation, temperature and evapotranspiration in a French Mediterranean region in the context of climate change". *C. R. Geoscience* 342. 234-243.
- Devore, J.** (2008). *Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias*. Cengage Learning Editores, S.A. de C.V., una Compañía de Cengage Learning, Inc. Séptima edición.
- Dorado, D., J.; Burbano, C., J.C.; Molina, T., J.M.; Carvajal, E., Y.; Aristizábal, H.F.** (2006). "Ajuste de modelos probabilísticos para el estudio de la variabilidad espacio-temporal de la precipitación: caso de estudio sistema Sara-Brut". *Meteorología Colombiana*. No. 10. pp. 60-75. Marzo 2006. ISSN 0124-6984.
- Donat, M.G.; Alexander, L.V.** (2012). "The shifting probability distribution of global daytime and night-time temperatures". *GEOPHYSICAL RESEARCH LETTERS*, VOL. 39, L14707, doi:10.1029/2012GL052459, 2012.
- Estudio para determinar la vulnerabilidad y las opciones de adaptación del sector energético colombiano frente al cambio climático* (2013) Unión Temporal ACON – OPTIM. UPME-0223-290-dic/2013-V1

- Hingray, B.; Mezghani, A.; Buishand, T.A.** (2007). "Development of probability distributions for regional climate change for uncertain global mean warming and uncertain scaling relationship". *Hydrology & Earth Systems Sciences*, 11(3), 1097-1114.
- Kendall, M.G.** (1975). *Rank Correlation Methods*, 4th edition, Charles Griffin, London.
- Mann, H.B.** (1945). "Non-parametric tests against trend", *Econometrica* 13:163-171.
- Martínez, F., L.** (2011). *Métodos de inferencia para la distribución Weibull: aplicación en fiabilidad industrial*. Trabajo fin de máster. Máster en Técnicas Estadísticas. Universidad de Vigo
- Minka, T. P.** (2002). *Estimating a Gamma distribution*. Microsoft Research, Cambridge, UK, Tech. Rep.
- Montesinos, L., A.** (2011). *Estudio del AIC y BIC en la selección de modelos de vida con datos censurados*. Tesina de Maestría. Centro de Investigación en Matemáticas, A.C. Guanajuato, Gto.
- Moreno, R. S., Aguilar, A. R., Hernández, E. F., & Soto, F. P.** (2011). "Aplicaciones de la distribución Weibull en ingeniería de confiabilidad". Memoria del XXI Coloquio Mexicano de Economía Matemática y Econometría, 148.
- Navarrete, L., C.F.** (2008). *Distribuição de probabilidade e dimensionamento amostral para tamanho de partícula em gramíneas forrageiras*. Teses de Mestra. Universidade de São Paulo. Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz.
- Ramírez, Á. S.** (2000). *Criterios para la selección de modelos estadísticos*. Banco Central de Costa Rica. DIE-NT-07-00.
- Räisänen, J.** (2009). Probability distributions of monthly-to-annual mean temperature and precipitation in a changing climate (CES Climate Modelling and Scenarios Deliverable D2.4, task I). Department of Physics, P.O. Box 48, FI-00014 University of Helsinki, Finland. AVAILABLE FROM: http://www.atm.helsinki.fi/~jaraisan/CES_D2.4/CES_D2.4_task1.html
- San Diego County Hydrology Manual* (2003) Prepared by the County of San Diego Department of Public Works Flood Control Section June 2003.
- Schwarz, G.** (1978). "Estimating the dimension of a model". *The Annals of Statistics*, vol. 6, No. 2, pp. 461-464.
- Tang, Q., A. W. Wood, and D. P. Lettenmaier** (2009) "Real-time precipitation estimation based on index station percentiles". *J. Hydrometeor.*, 10, 266–277.
- Walschburger, T.; Angarita, H.; Delgado, J.** (2015) "Hacia una gestión integral de las planicies inundables en la cuenca Magdalena-Cauca". Este documento hace parte de una serie de ocho artículos contratados para presentar en los foros regionales "¿Para dónde va el río Magdalena? Riesgos sociales, ambientales y económicos del proyecto de navegabilidad". Foro Nacional Ambiental y Fescol.