
Solución numérica de flujos de material desagregado

Método penalizado de multidominios espectrales

por

Mario Germán Trujillo-Vela

Trabajo de grado presentado
como requisito parcial para optar al título de
Magister en Hidrosistemas



Maestría de Hidrosistemas
Facultad de Ingeniería
Pontificia Universidad Javeriana
Bogotá D.C., Colombia
23 de Enero de 2015

REGLAMENTO DE LA PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA.

Artículo 23. "La Universidad no se hace responsable por los conceptos emitidos por sus alumnos en sus trabajos de tesis. Sólo velará porque no se publique nada contrario al dogma y a la moral católica y por que las tesis no contengan ataques personales contra persona alguna, antes bien se vea en ellas el anhelo de buscar la verdad y la justicia".

Resolución No. 13 de julio de 1946.

DIRECTORES

Ph.D. Jorge Alberto Escobar Vargas

Profesor, Departamento de Ingeniería Civil
Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá D.C., Colombia
E-mail: jorge-escobar@javeriana.edu.co
Teléfono: 320 8320 Ext. 2719

Dr. Ing. Alfonso Mariano Ramos Cañón

Subdirector Instituto Geofísico
Profesor, Departamento de Ingeniería Civil
Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá D.C., Colombia
E-mail: a-ramos@javeriana.edu.co
Teléfono: 320 8320 Ext. 6545

JURADOS

Ph.D. José María González Ondina

Cornell University, Ithaca, NY., USA.
E-mail: Jg656@cornell.edu
Jurado

Ph.D. Jesús Daniel Villalba Morales

Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá D.C., Colombia
E-mail: jesus.villalba@javeriana.edu.co
Jurado

M.Sc. Wilson Rodríguez Calderón

Universidad Cooperativa de Colombia, Neiva, Colombia
E-mail: wilroca50@hotmail.com
Jurado

Aprobada en Bogotá D.C., el día 16 de Enero de 2015

A Sofía

Sofía que esquivas eres y yo que obstinado soy,
si buscarte he querido, tú dejarme has preferido,
si tus huellas me has dejado, yo seguirte he intentado,
si muy lejos te has marchado,
recordad que aquí estoy y que tuyo soy,
si al callado siempre has amado,
estas frases de mi hoy te han alejado,
pero de mis pensamientos no te has escondido,
pues en ti muchas veces he yacido,
y si solo con el tiempo me has de querer,
en tu nombre esperaré...

Mario G.

Dedico este trabajo a mis padres José Ricaurte y Pastora por todo el amor y el apoyo que me han brindado para realizar mis estudios y a mis hermanas Ileana y Daniela.

Agradecimientos

Agradezco a los profesores Alfonso Ramos y Jorge Escobar por haberme brindado la confianza, el apoyo académico para desarrollar este trabajo y todas sus enseñanzas. A la Maestría en Hidrosistemas por brindarme el apoyo económico a través de la asistencia de investigación durante el desarrollo de la misma. Agradezco a los miembros del USGS, Richard Iverson y Roger Denlinger por proporcionarme los datos experimentales para poder hacer la comparación con nuestros resultados numéricos.

Agradezco a Pervys Rengifo y Luis Carlos Leguizamón por el acompañamiento durante la maestría y por todas sus enseñanzas. Agradezco también a mis amigos Angelica Santofimio y Oscar Forero por la compañía en esos momentos de descanso.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Flujo de material desagregado	1
1.2. Planteamiento del problema	2
1.3. Objetivos	4
1.3.1. Objetivo general	4
1.3.2. Objetivos específicos	4
1.4. Esquema del documento	5
2. Modelación matemática de flujos de material desagregado	6
2.1. Leyes de conservación en un medio continuo	7
2.1.1. Conservación de masa	7
2.1.2. Conservación de momentum	8
2.2. Integración sobre la profundidad	9
2.2.1. Integración en la profundidad de la ecuación de masa	13
2.2.2. Integración en la profundidad de la ecuación de momentum	14
2.3. Estimación de esfuerzos	17
2.3.1. Estimación de esfuerzos de la fase sólida	17
2.3.2. Estimación de esfuerzos de la fase fluida	23
2.3.3. Evaluación de la presión de poros	25
2.3.4. Coeficiente de presión lateral de tierras	26
2.4. Ecuaciones de gobierno	29
2.5. Componente gravitacional	30
2.6. Discusión	32
3. Modelación analítica de flujos de material desagregado	33
3.1. Solución analítica para la velocidad	34
3.2. Solución analítica para la posición espacial	36

4. Modelación numérica de flujos de material desagregado	38
4.1. Métodos espectrales	39
4.2. Forma conservativa de las ecuaciones de flujo de material desagregado . . .	40
4.3. Discretización espacial:	
Método penalizado de multidominios espectrales	41
4.3.1. Interior de los subdominios	42
4.3.2. Tratamiento de las interfaces	43
4.4. Condiciones de frontera	47
4.4.1. Fronteras del dominio computacional	47
4.4.2. Seguimiento a la frontera del flujo	48
4.5. Discretización temporal:	
Runge-Kutta	49
4.5.1. Runge-Kutta de preservación de estabilidad fuerte (SSP-RK)	50
4.6. Técnica de estabilización	51
4.7. Condición de estabilidad	53
4.8. Conservación de masa y energía	53
4.9. Velocidad del centro de masa	54
4.10. Esquema general del código computacional	55
5. Casos de prueba	58
5.1. Configuración física	58
5.1.1. Experimento de flujo granular	59
5.2. Configuración numérica	60
5.2.1. Configuración numérica del flujo granular	60
5.2.2. Otras condiciones iniciales sin gradiente topográfico	62
6. Análisis de resultados	65
6.1. Predicción numérica del flujo granular	65
6.1.1. Predicción numérica del flujo granular	66
6.1.2. Test de independencia de malla	68
6.1.3. Propiedades de conservación en el tiempo	76
6.1.4. Análisis de condiciones de frontera	79
6.1.5. Análisis del factor de corrección de momentum (β)	83
6.1.6. Análisis del coeficiente de presión lateral de tierras ($k_{act/pas}$)	87
6.2. Predicción analítica	90
6.3. Discusión	93
6.3.1. Error del método numérico	93
6.3.2. Fronteras y parámetros	94
6.3.3. Solución analítica	97

<i>Índice general</i>	IX
7. Conclusiones	98
8. Trabajo futuro	100
Bibliografía	101
A. Polinomios de Legendre y método de colocación	108

Índice de figuras

1.1. Errores máximos para un problema hiperbólico lineal en $t = 2\pi$ para los métodos numéricos Fourier Galerkin y algunos esquemas de diferencias finitas (Canuto, 2006).	4
2.1. Definición de volumen elemental representativo fijo Iverson (2005).	7
2.2. Definición del sistema de coordenadas cartesiano, elevación variable del lecho b , espesor del material desagregado variable $h = \eta - b$ y los vectores de velocidad variables en un modelo de flujos de material desagregado promediado en la profundidad obtenido por la integración vertical de las ecuaciones de movimiento. Los componentes de la velocidad cartesianas (u, v, w) se representan por uno de los vectores de velocidad, y w es negativo cuando apunta hacia abajo como se muestra en Iverson (2005).	10
2.3. Relación de velocidad vertical y horizontal con la pendiente de la trayectoria de flujo.	11
2.4. Definición del sistema de coordenadas local y convenios de signos utilizados para calcular los esfuerzos y las velocidades. La coordenada z es un vector normal dirigido hacia el lecho. Las coordenadas x y y están orientados ortogonalmente pero de una manera arbitraria al plano normal z . Los componentes de esfuerzos normal (indicadas por flechas discontinuas) son positivos a compresión, y ambos componentes de esfuerzo cortante y normal son positivos cuando está orientado como se muestra aquí (Iverson and Denlinger, 2001).	18
2.5. Fracción de presión de poros.	21
2.6. Corte longitudinal esquemático de un flujo de material desagregado que desciende por una pendiente curvilínea, se ilustra el sistema de coordenadas local y variables dependientes. El componente x de curvatura del lecho se especifica por el radio de curvatura local r_x (Iverson and Denlinger, 2001).	22

2.7. Distribución de presión de poros basal normalizado pronosticado por la Ecuación 2.79. La línea continua representa los primeros 1000 términos de la solución y la línea punteada los primeros términos de la serie (Iverson and Denlinger, 2001).	26
2.8. Presión lateral de tierra regularizado por la introducción de una función que decrece monotonicamente con la divergencia de la velocidad $\partial u / \partial x$	28
2.9. Componentes de la aceleración gravitacional en las direcciones x y z , normal al plano sobre el cual la masa desciende.	31
4.1. Esquema de discretización del dominio dividido en subdominios. La línea continua ancha denota la frontera del dominio computacional, la línea punteada denota la interfaz vertical, la línea discontinua denota la interfaz horizontal. La estrella denota el interior de cada subdominio.	42
4.2. Unión de 4 subdominios discontinuos.	44
4.3. Interfaz vertical (Escobar-Vargas et al., 2012).	44
4.4. Interfaz horizontal (Escobar-Vargas et al., 2012).	45
4.5. Condiciones de frontera reflectivas y deslizantes.	48
4.6. Condiciones de frontera reflectivas y antideslizantes.	48
4.7. Función exponencial del filtro para diferentes valores de P	52
4.8. Diagrama de flujo del programa computacional.	56
5.1. Esquema del canal artificial de pequeña escala utilizado para ejecutar experimentos de flujos de arena seca. La distancia entre la fuente de luz, cámara, y el canal artificial es de ~ 2 m, y no se muestran a escala Denlinger and Iverson (2001).	59
5.2. Flujo granular experimental con el ancho de la compuerta del canal artificial (i.e., 20 cm). La compuerta se abre en un tiempo igual a cero. Los contornos representan 1 mm isopacas de profundidad de arena normales al lecho (Denlinger and Iverson, 2001).	60
5.3. Vista bidimensional de la base topográfica de un plano y talud curvilíneo especificado por el radio de curvatura r_x en la dirección x , con 24 y 4 subdominios en la dirección x y y , respectivamente, y el polinomio de grado 5.	61
5.4. Vista bidimensional del espesor inicial del flujo (h), con 24 y 4 subdominios en la dirección x y y , respectivamente, y el grado del polinomio es igual a 5.	62
5.5. Vista bidimensional de las condiciones iniciales del flujo ($\eta = b + h$), con 24 y 4 subdominios en la dirección x y y , respectivamente, y el grado del polinomio es igual a 5.	62

5.6. Vista bidimensional de la condición inicial de una Gaussiana de arena seca, con 20 subdominios en cada lado y el grado del polinomio es igual a 5. . . .	63
5.7. Vista bidimensional de la condición inicial de cilindro de arena seca, con 20 subdominios en cada lado y el grado del polinomio es igual a 5.	64
6.1. Comparación del experimento del flujo granular (a), con la predicción numérica generada con el SMPM cuando el refinamiento espacial presenta menor error por conservación de masa, $N = 8$, $Sub_x = 108$ y $Sub_y = 18$ (b). . . .	66
6.2. Comparación del experimento del flujo granular (a), con la predicción numérica generada con el SMPM cuando el refinamiento espacial presenta mayor error por conservación de masa, $N = 6$, $Sub_x = 60$ y $Sub_y = 10$ (b).	67
6.3. Comparación del experimento del flujo granular (a), con la predicción numérica generada con el SMPM cuando el refinamiento espacial presenta independencia en el error por conservación de masa, $N = 17$, $Sub_x = 36$ y $Sub_y = 6$ (b).	68
6.4. Conservación de la masa para el flujo granular en m^3 con diferentes “ h ” y “ p -refinamientos” del dominio espacial cuando se tiene condiciones de frontera <i>deslizantes</i>	69
6.5. Conservación de la masa para el flujo granular en m^3 con diferentes “ h ” y “ p -refinamientos” del dominio espacial cuando se tiene condiciones de frontera <i>antideslizantes</i>	70
6.6. Conservación de la energía para el flujo granular en m^4/s^4 con diferentes “ h ” y “ p -refinamientos” del dominio espacial cuando se tiene condiciones de frontera <i>deslizantes</i>	70
6.7. Conservación de la energía para el flujo granular en m^4/s^4 con diferentes “ h ” y “ p -refinamientos” del dominio espacial cuando se tiene condiciones de frontera <i>antideslizantes</i>	71
6.8. Condición de estabilidad Courant promedio (CFL_{mean}).	73
6.9. Condición de estabilidad de Courant máxima (CFL_{max}).	73
6.10. Tiempo computacional requerido para cada “ h ” y “ p -refinamientos”.	74
6.11. Conservación de la masa para el colapso de una Gaussiana en m^3 para diferentes discretizaciones del dominio espacial cuando se tiene una profundidad promedio $H_o = 1$	75
6.12. Conservación de la energía para el colapso de una Gaussiana para diferentes discretizaciones del dominio espacial cuando se tiene una profundidad promedio $H_o = 1$	76
6.13. Conservación de la masa en m^3 en función del tiempo para el flujo granular con 3 diferentes refinamientos de la malla.	77

6.14. Conservación de masa en m^3 en función del tiempo para la Gaussiana. . . .	78
6.15. Conservación de masa en m^3 en función del tiempo para el cilindro vertical. . . .	78
6.16. Comparación del experimento generado por el USGS (a y b), y dos tipos de condiciones de frontera, deslizantes (c) y antideslizantes (d).	80
6.17. Comparación de dos soluciones numéricas. (a y b) método Harten-Lax-vanLeer-Contact (HLLC) presentada por Denlinger and Iverson (2001) con refinamiento del $O(16^3)$, (c) SMPM con refinamiento del $O(16^3)$ y (d) SMPM con refinamiento del $O(12^4)$	81
6.18. Comparación de los diferentes factores de corrección de momentum con el experimento para $t=0.10$ s y $t=0.32$ s.	84
6.19. Comparación de los diferentes factores de corrección de momentum con el experimento para $t=0.53$ s y $t=0.93$ s.	85
6.20. Comparación de los diferentes factores de corrección de momentum con el experimento para $t=1.50$ s.	86
6.21. Comparación del experimento del flujo granular (a y b), con dos formulaciones para el coeficiente de presión lateral de tierras, constante (c) y regularizado (d), con un alto refinamiento espacial ($N=8$, $Sub_x=108$ y $Sub_y=18$).	88
6.22. Comparación del experimento del flujo granular (a y b), con dos formulaciones para el coeficiente de presión lateral de tierras, constante (c) y regularizado (d), con un bajo refinamiento espacial ($N=6$, $Sub_x=60$ y $Sub_y=10$).	89
6.23. (a) base topográfica y posición final del flujo granular representado con un asterisco. (b) predicción analítica y numérica de la posición en cada instante de tiempo, y (c) predicción analítica y numérica de la velocidad del centro de masa del flujo granular.	92
A.1. Polinomios de Legendre para $0 \leq N \leq 6$, estimado con la formula de recurrencia (Ecuación A.2) (Canuto, 2006).	109
A.2. Polinomios de Legendre para $N=100$. También es un esquema que ilustra la forma de todos los polinomios de Legendre Boyd (2001)	109
A.3. Distribución de los puntos de Gauss-Lobatto-Legendre en función del grado del polinomio.	110

Índice de tablas

1.1. Revisión bibliográfica de procedimientos para la modelación y solución de ecuaciones de flujos de material desagregado.	3
5.1. Propiedades de los materiales del experimento utilizados para la simulación numérica y analítica.	58

Introducción

Las zonas montañosas tropicales son susceptibles a sufrir movimientos en masa debido a que generalmente se reúnen cuatro de los elementos más importantes para su generación: gradiente topográfico, sismicidad, meteorización y lluvias intensas (Cheng et al., 2002; Suárez, 2001). Dentro de la clasificación de los movimientos en masa se encuentran los flujos, los cuales pueden ser lentos o rápidos dependiendo del contenido de humedad, de los tipos de material transportados y la pendiente de la trayectoria del flujo.

Los flujos de material desagregado son masas de suelo y roca, cargadas de agua, que descienden de las zonas montañosas siguiendo las líneas de drenaje con velocidades que pueden superar los 10 m/s, y volúmenes que pueden ir hasta los 10^9 m³. Los flujos de material desagregado pueden denudar laderas, enterrar las llanuras de inundación y devastar a personas y propiedades (Iverson, 2014). Estos eventos naturales pueden ser detonados en gran medida por precipitaciones y derretimiento de nieve como lo señala Schneider et al. (2010), de modo que, periodos con condiciones de clima húmedo y frío incrementan la actividad de flujos de material desagregado.

1.1. Flujo de material desagregado

Existen muchas definiciones de los movimientos en masa dadas por diferentes autores, particularmente si se trata de los movimientos que se comportan en forma de flujo. Las definiciones para formalizar las diferentes interpretaciones de cada fenómeno son muy ambiguas dado que se emplean algunas características como velocidad, volumen, tipo de material transportado y proporción de sólidos-fluido, entre otras. Ejemplos de múltiples definiciones se pueden encontrar en Coussot and Meunier (1996); Hungr et al. (2001); Hutchinson (1968); Jakob (2005); Pudasaini and Hutter (2007); Suárez (2009) y Varnes (1978).

Para no entrar en discusiones debido a las diferentes definiciones dadas para los movimientos en masa tipo flujo, que son de interés para este trabajo, aquí se generalizan con el

nombre de “flujos de material desagregado”. Los flujos de material desagregado se pueden definir como aquellos movimientos que se generan a partir de fallas difusas del geomaterial, es decir, ausentes de un patrón de localización de la falla, cuya fuerza desestabilizante es la debida a la gravedad. Los geomateriales siempre están entremezclados con un fluido, ya sea agua o aire (flujos secos). Así, dentro de flujos de material desagregado entrarían las siguientes definiciones: avalancha de detritos, avalancha granular, avalanchas de nieve, flujos de detritos, flujo granular, flujos de lodo, flujos de tierra, lahar, entre otras.

1.2. Planteamiento del problema

Este trabajo se enfoca en la necesidad de obtener una aproximación numérica precisa de las ecuaciones diferenciales parciales que describen el movimiento y depósito de eventos de flujos de material desagregado propuestas por Iverson and Denlinger (2001). Esta necesidad se evidencia cuando podemos referirnos al error numérico introducido por el uso de métodos numéricos de bajo orden como diferencias finitas, volúmenes finitos e incluso los elementos finitos. Estos métodos numéricos son denominados de bajo orden debido al grado de la función de interpolación en cada elemento (e.g., elementos finitos) o entre nodos (e.g., diferencias finitas y volúmenes finitos). Los métodos de bajo orden introducen un error numérico considerable, aún más en la solución de ecuaciones hiperbólicas que desarrollan un frente de propagación sobre una dirección dominante (Fletcher, 1991), como es típico en la simulación numérica de rompimiento de presa para flujos de material desagregado.

La Tabla 1.1 contiene una revisión bibliográfica de autores que han modelado este tipo de flujos desde la mecánica de medios continuos, basados típicamente en las ecuaciones de aguas someras, donde puede variar la forma de estimar los esfuerzos del fluido y los esfuerzos de los sólidos son estimados con la relación de Mohr-Coulomb. En la Tabla 1.1 se puede ver que los métodos de bajo orden han sido implementados por décadas para solucionar las ecuaciones de flujos de material desagregado, siendo los más utilizados las diferencias finitas y volúmenes finitos.

Existen otras técnicas más precisas de alto orden, que emplean un alto grado en la función de interpolación en cada elemento como son los métodos espectrales. Dentro de los métodos espectrales se pueden mencionar al método de Fourier (FM), el método de elementos espectrales (SEM), el método discontinuo de Galerkin (DGM) y el método penalizado de multidominios espectrales (SMPM).

Un ejemplo de la precisión superior que se puede obtener en los métodos espectrales para un problema lineal hiperbólico (e.g., advección lineal) se presenta en la Figura 1.1 (Canuto, 2006). En la Figura 1.1 se muestra la solución con diferentes métodos numéricos: a. El método de Fourier Galerkin (método espectral), b. Diferencias finitas centradas de

Tabla 1.1: Revisión bibliográfica de procedimientos para la modelación y solución de ecuaciones de flujos de material desagregado.

Autor	Geometría del basamento	Dimensiones espaciales	Esfuerzos del fluido	Método de solución
Savage and Hutter (1989)	\	1D	N, SWE	FDM
Denlinger and Iverson (2001)	c	2D	N, SWE	FVM
Iverson and Denlinger (2001)	c	1D, 2D	N, SWE	Analítico
Trujillo-Vela and Ramos (2012)	c	1D, 2D	N, SWE	Analítico
Denlinger and Iverson (2004)	c	1D, 2D	N, SWE	FVM-FEM
Pudasaini et al. (2005)	α	2D	N, SWE	FDM
Iverson (2005)	\	2D	B, SWE	—
Rickenmann et al. (2006)	i	2D	B,V,HB, SWE	FDM
Wang et al. (2008)	i	2D	N, SWE	FDM
Quan Luna et al. (2012)	i, c	1D	B, SWE	FDM
Ouyang et al. (2013)	i	2D	V, SWE	FDM

c : superficie curvada, α : superficie curvada y retorcida, \: superficie plana, i : superficie irregular, N : fluido Newtoniano, B: modelo Bingham, HB: modelo reológico Herschel-Bulkley, V: modelo de Voellmy, SWE: ecuaciones de aguas someras, FDM: método de diferencias finitas, FVM: método de volúmenes finitos, FEM: método de elementos finitos.

segundo orden (FD2) con tres puntos, c. Diferencias finitas centradas de cuarto orden (FD4) con cinco puntos, d. Métodos compactos de cuarto orden (CP4), e. Métodos compactos de sexto orden (CP6). El número entero N denota el grado de la expansión para el método de Fourier Galerkin y el número de puntos de la malla para diferencias finitas y métodos compactos (Canuto, 2006).

En la Figura 1.1 se puede ver que la convergencia de los métodos de bajo orden (diferencias finitas y métodos compactos) es menor que los métodos de alto orden (Fourier Galerkin), donde el error es tan bajo que puede llegar a ser del orden de aproximación del computador [e.g., $O(10^{-14})$].

Debido a las evidencias presentadas anteriormente, en este trabajo se busca la posibilidad de aprovechar la bondad de los métodos espectrales para solucionar las ecuaciones hiperbólicas bidimensionales implementadas aquí, que describen los flujos de material desagregado, propuestas por Iverson and Denlinger (2001). Esto se hace con el fin de disminuir el error numérico en la solución del conjunto de ecuaciones diferenciales parciales.

En este trabajo se evalúa la efectividad de una técnica numérica llamada método penalizado de multidominios espectrales para la solución numérica de las ecuaciones diferenciales parciales que describen los flujos de material desagregado. El origen de los métodos de multidominios espectrales es de finales de los 70's y la contribución final fue dada por Hesthaven a mediados de los 90's, quien introduce una penalización en la interconexión de los múltiples dominios empleados para la discretización espacial conocida como método penalizado

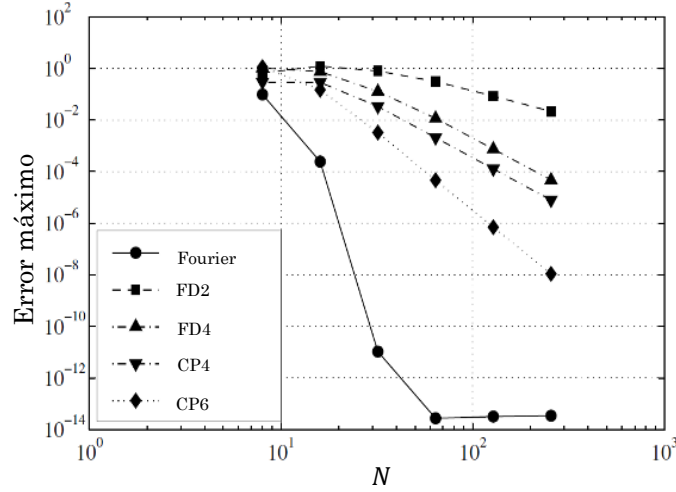


Figura 1.1: Errores máximos para un problema hiperbólico lineal en $t = 2\pi$ para los métodos numéricos Fourier Galerkin y algunos esquemas de diferencias finitas (Canuto, 2006).

de multidominios espectrales (Escobar-Vargas, 2012). El potencial de simulaciones precisas no disipativas y no dispersivas en flujos ambientales a través de los métodos espectrales será explorado en este trabajo teniendo en cuenta las características del método que se presentan en la Sección 4.3 basado en Escobar-Vargas et al. (2012).

Estas bondades de los métodos espectrales no han sido explotadas en la solución de problemas reales, como los que se pueden representar con las ecuaciones que describen los flujos de material desagregado (Tabla 1.1).

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general

Determinar la efectividad de la solución numérica de las ecuaciones de flujos de material desagregado propuestas Iverson and Denlinger (2001) con el método penalizado de multidominios espectrales.

1.3.2. Objetivos específicos

- Implementar las ecuaciones de flujos de material desagregado propuestas por Iverson and Denlinger (2001), con el método penalizado de multidominios espectrales.
- Evaluar la efectividad de la solución numérica dada por el método penalizado de multidominios espectrales respecto la soluciones analíticas de las ecuaciones de flujos

de material desagregado propuestas por Iverson and Denlinger (2001) y Trujillo-Vela and Ramos (2012).

- Evaluar la efectividad de la solución numérica dada por el método penalizado de multidominios espectrales respecto la solución numérica de las ecuaciones de flujos de material desagregado presentada por Denlinger and Iverson (2001), con el método Harten-Lax-vanLeer-Contact (HLLC).

1.4. Esquema del documento

Este trabajo es organizado de la siguiente manera:

El capítulo 2 contiene el marco teórico de la modelación matemática de flujo de material desagregado. Aquí se presentarán los siguientes conceptos: ecuaciones de conservación de masa y momentum para la mezcla de sólidos y fluido, integración en la profundidad de las ecuaciones de conservación, estimación de los esfuerzos de los sólidos y fluido, y finalmente las ecuaciones de gobierno para los flujos de material desagregado.

El desarrollo de la solución analítica unidimensional para el conjunto de ecuaciones de flujo de material desagregado presentado en el capítulo 2, con las cuales se puede determinar la posición y velocidad del centro de masa del flujo en función del tiempo se presenta en el capítulo 3.

En el capítulo 4 se presenta el marco teórico del método de integración numérica. Aquí se presentarán los siguientes conceptos: la forma conservativa de las ecuaciones de flujo de material desagregado, el método penalizado de multidominios espectrales (SMPM) para la discretización espacial, las condiciones de frontera, método de integración temporal Runge-Kutta de preservación de estabilidad fuerte (SSP-RK), técnica de estabilización, condición de estabilidad numérica, conservación de masa y energía, y cálculo de la velocidad del centro de masa.

Los datos experimentales de un flujo granular generado por Denlinger and Iverson (2001) y los casos de prueba implementados en este trabajo para solucionar las ecuaciones de flujo de material desagregado se presentan en el capítulo 5.

El capítulo 6 muestra los resultados de este trabajo con su respectivo análisis. Contiene tres grandes grupos de resultados. El primero contiene los resultados numéricos para el caso de un flujo granular que desciende por un canal rectangular. El segundo contiene el colapso de una Gaussiana y un cilindro vertical de arena. Y el tercero compara los resultados brindados por la solución analítica y la numérica. Finalmente, se realiza una discusión sobre los resultados obtenidos y presentados en este capítulo.

En el capítulo 7 se presentan las conclusiones y recomendaciones de este trabajo.

Finalmente, en el capítulo 8 se presentan los trabajos futuros.

Modelación matemática de flujos de material desagregado

Los movimientos en masa son estudiados principalmente desde dos puntos de vista. El primero busca comprender y predecir la susceptibilidad a los deslizamientos bajo diferentes condiciones de activación (e.g., geomorfología, hidrología y climatología), con lo cual muchos autores generan algunas relaciones como infiltración-deslizamientos (Iverson, 2000), y lluvia-deslizamientos (Dai and Lee, 2001; Glade et al., 2000; Guzzetti et al., 2008; Li et al., 2011; Terlien, 1998). El segundo busca estudiar la dinámica de los flujos que se puede realizar básicamente desde dos enfoques: discreto y continuo.

En el enfoque discreto, los flujos de material desagregado son modelados por un conjunto de partículas discretas (círculos o esferas para 2D o 3D, respectivamente). El movimiento de las partículas y la interacción entre ellas obedecen las leyes básicas de movimiento, una ley de fuerza-desplazamiento y la segunda ley de Newton. Las fuerzas entre las partículas durante el contacto son calculadas de acuerdo con algunos modelos mecánicos como resortes y amortiguadores (De Toni and Scotton, 2005; Teufelsbauer et al., 2009). También con el enfoque discreto, algunos autores como D´ambrosio et al. (1999) e Iovine et al. (2003) han realizado modelaciones de flujos de material desagregado basadas en autómatas celulares, en donde la complejidad del sistema emerge de las interacciones de sus unidades elementales (celulares) mediante la aplicación de reglas locales relativamente sencillas.

En el enfoque continuo, una forma de modelar los flujos de material desagregado se basa en los principios de conservación de masa y momentum, mediante el uso de la teoría de aguas someras bidimensionales que descienden sobre topografías suaves. La velocidad en la dirección vertical puede suponerse como despreciable, ya que las velocidades en el plano son considerablemente mayores (Iverson and Denlinger, 2001; Ouyang et al., 2013; Pudasaini and Hutter, 2007; Quan Luna et al., 2012; Rickenmann et al., 2006; Savage and Hutter, 1989; Wang et al., 2008).

En este trabajo se hace uso de la mecánica de medios continuos para modelar los flujos de material desagregado, con el fin de entender y predecir el comportamiento de estos procesos a nivel experimental. El modelo se basa en leyes físicas, reglas matemáticas, modelos constitutivos y teorías sobre esfuerzos tanto para los sólidos como para el fluido encargadas de la disipación de la energía. El desarrollo de este modelo se presenta en este capítulo con base en la formulación propuesta por Iverson and Denlinger (2001).

2.1. Leyes de conservación en un medio continuo

2.1.1. Conservación de masa

Para la modelación matemática de flujos de material desagregado se adopta la mecánica de medios continuos, perspectiva Euleriana, pero haciendo uso del concepto de volumen elemental representativo (Figura 2.1), donde se captura el comportamiento a escalas no tan pequeñas como para que contenga la suficiente cantidad de fluido y sólidos.

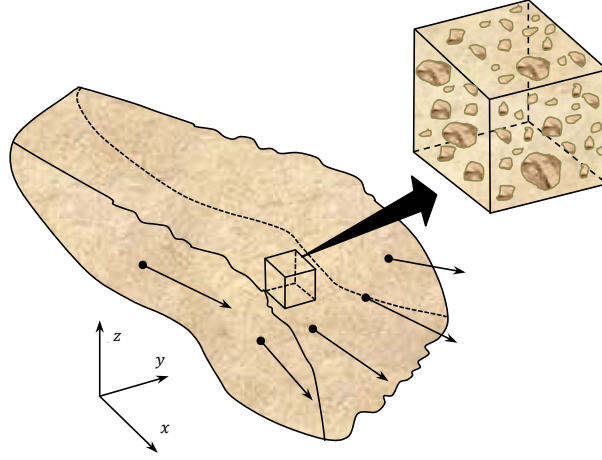


Figura 2.1: Definición de volumen elemental representativo fijo Iverson (2005).

Las leyes de conservación de masa y momentum proporcionan las herramientas fundamentales para el análisis de flujo de material desagregado. La ecuación diferencial de conservación de masa para cada fase de la mezcla del flujo de material desagregados es (Iverson, 2005).

$$\frac{\partial \rho_i n_i}{\partial t} + \nabla \cdot \rho_i n_i \mathbf{v}_i = 0 \quad (2.1)$$

donde el subíndice i indica que es para cada fase individual, n denota la fracción de volumen (tal que $\sum n_i = 1$), ρ_i la densidad de cada fase y $\mathbf{v}_i$ denota el vector de velocidad

del flujo para cada fase individual. La ecuación de conservación de masa para la mezcla de flujo de material desagregado se puede obtener utilizando un promedio ponderado, que define tanto la densidad como la velocidad de la mezcla (Iverson, 2005):

$$\rho = \rho_s n_s + \rho_f n_f \quad (2.2)$$

$$\mathbf{v} = \frac{\rho_s n_s \mathbf{v}_s + \rho_f n_f \mathbf{v}_f}{\rho} \quad (2.3)$$

los subíndices s y f denotan las fases sólida y fluida respectivamente, indicados genéricamente por “ i ”, en la Ecuación 2.1. Los que no tienen subíndices (i.e., ρ y $\mathbf{v}$) hacen referencia a la mezcla de sólido-fluido (Ecuaciones 2.2 y 2.3). Físicamente, en las ecuaciones de masa y momentum se supone que el movimiento del fluido con respecto a los sólidos es tan lento que las velocidades y aceleraciones del fluido difieren de forma despreciable de los sólidos adyacentes. Mediante la sustitución de 2.2 y 2.3 en la Ecuación 2.1 se obtiene la ecuación de conservación de masa de la mezcla para el flujo de materiales desagregado:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0 \quad (2.4)$$

La Ecuación 2.4 es expandida cuando se usa la regla de la derivada de un producto sobre el término de divergencia:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \cdot \rho \right) + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.5)$$

El término que esta entre paréntesis puede ser anulado, ya que se supone que la densidad de la mezcla ρ es esencialmente constante (i.e., $\partial \rho_i n_i / \partial t = 0$). Y dividiendo entre ρ a ambos lados de la Ecuación 2.5, se tiene la ecuación de conservación de masa de la mezcla de un flujo de material desagregado.

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.6)$$

2.1.2. Conservación de momentum

La ecuación diferencial de conservación del momentum para cada fase de la mezcla del flujo de material desagregado es (Iverson, 2005),

$$\frac{\partial \rho_i n_i \mathbf{v}_i}{\partial t} + \nabla \cdot \rho_i n_i \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_i = -\nabla \cdot T + \rho_i n_i \mathbf{g} + \mathbf{f}_i \quad (2.7)$$

donde $\otimes$ representa el producto diádico, T denota tensor de esfuerzos con componentes cartesianos de la forma τ_{yx} . El signo menos precede al término de esfuerzos porque el esfuerzo se define positivo a compresión, como en la mecánica de suelos y rocas convencional.

$\mathbf{g}$ representa la fuerza de la gravedad, y finalmente, el vector $\mathbf{f}_i$ indica la fuerza de interacción por unidad de volumen ejercida sobre la fase “ i ” debido al movimiento relativo de las fases. La ecuación de conservación del momentum para una mezcla de flujo de material desagregado se puede obtener mediante la sustitución de las Ecuaciones 2.2 y 2.3 en la Ecuación 2.7:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} = -\nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{g} \quad (2.8)$$

La fuerza de interacción $\mathbf{f}_i$ no aparece en la Ecuación 2.8 explícitamente porque la fuerza ejercida sobre los granos sólidos por el fluido equilibra la fuerza ejercida por los granos sobre el fluido, por lo que se satisface la tercera ley de Newton del movimiento (Iverson, 2005). La Ecuación 2.8 se expande mediante el uso de la regla de la derivada de un producto en los términos temporales y de divergencia,

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} + [\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})] \mathbf{v} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{g} \quad (2.9)$$

Reordenando,

$$\mathbf{v} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] + \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{g} \quad (2.10)$$

Lo que está entre corchetes es cero en virtud de la Ecuación 2.6 y dividiendo por ρ la Ecuación 2.10, se tiene que

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{g} \quad (2.11)$$

La Ecuación 2.11 describe la conservación de momentum de la mezcla de flujos de material desagregado.

2.2. Integración sobre la profundidad

Una forma más directa de solucionar las ecuaciones de conservación tridimensionales 2.6 y 2.11 puede obtenerse por medio de la integración de las ecuaciones a través del espesor del flujo h (Ecuación 2.12). h se mide verticalmente desde el lecho, en la cota $z = b(x, y, t)$ a la superficie del flujo $z = \eta(x, y, t)$, donde x y y son las coordenadas planimétricas (Figura 2.2). Esta forma reduce el número de incógnitas de 4 [i.e., $\mathbf{v}$ (u, v, w) y T] a 3 ($\bar{u}$, $\bar{v}$ y h), dos espaciales y la temporal (Iverson, 2005). Para llevar a cabo esta integración es necesario tener en cuenta cinco conceptos matemáticos importantes que se definen a continuación.

$$h(x, y, t) = \eta - b \quad (2.12)$$

1. Para hacer la integración de la ecuación de conservación de masa es útil definir “**el valor promedio de una función**”:

$$\bar{f} = \frac{1}{\eta - b} \int_b^{\eta} f(z) dz \quad (2.13)$$

El valor medio de una función $f(z)$ en el intervalo $[b, \eta]$ está dada por 2.13. Utilizando la definición anterior se halla el valor medio de la velocidad en las direcciones x y y :

$$\bar{u} = \frac{1}{h} \int_{z=b}^{z=\eta} u dz \quad y \quad \bar{v} = \frac{1}{h} \int_{z=b}^{z=\eta} v dz \quad (2.14)$$

donde la barra en la parte superior es una notación abreviada para el promedio integrado en la profundidad. Al reorganizar las ecuaciones en 2.14.

$$h\bar{u} = \int_{z=b}^{z=\eta} u dz \quad y \quad h\bar{v} = \int_{z=b}^{z=\eta} v dz \quad (2.15)$$

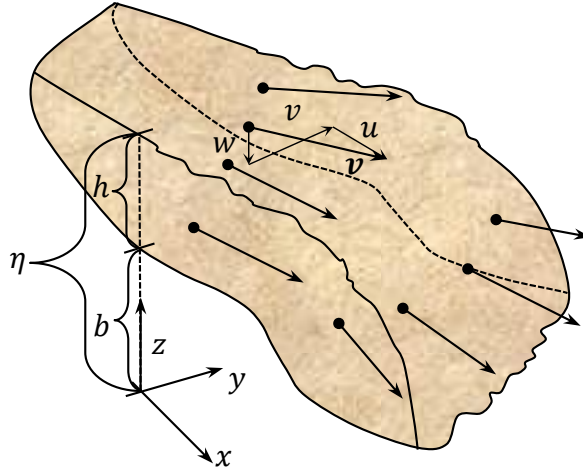


Figura 2.2: Definición del sistema de coordenadas cartesiano, elevación variable del lecho b , espesor del material desagregado variable $h = \eta - b$ y los vectores de velocidad variables en un modelo de flujos de material desagregado promediado en la profundidad obtenido por la integración vertical de las ecuaciones de movimiento. Los componentes de la velocidad cartesianas (u, v, w) se representan por uno de los vectores de velocidad, y w es negativo cuando apunta hacia abajo como se muestra en Iverson (2005).

2. También es necesario definir que la relación de “**las velocidades vertical y horizontal debe ser igual a la pendiente de la superficie**” (Liggett, 1994) (Figura 2.3).

De modo que para dos dimensiones la velocidad en la dirección z ($w(\eta)$), es:

$$\frac{w(\eta)}{u(\eta)} = \frac{d\eta}{dx} \longrightarrow w(\eta) = u(\eta) \frac{d\eta}{dx} \quad (2.16)$$

Utilizando la afirmación anterior, las condiciones cinemáticas en un flujo tridimensional en la superficie libre e inestable verticalmente (i.e., $\partial\eta/\partial t$) (Iverson, 2005), es:

$$w(\eta) = \frac{\partial\eta}{\partial t} + u(\eta) \frac{\partial\eta}{\partial x} + v(\eta) \frac{\partial\eta}{\partial y} + A(x, y, t) \quad (2.17)$$

Al despejar

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = -u(\eta) \frac{\partial\eta}{\partial x} - v(\eta) \frac{\partial\eta}{\partial y} + w(\eta) - A(x, y, t) \quad (2.18)$$

donde $A(x, y, t)$ especifica la tasa de acumulación vertical de material para la superficie libre del flujo como resultado del colapso de material de un banco adyacente. Las condiciones cinemáticas en las tres dimensiones de la superficie basal y el flujo inestable verticalmente (i.e., $\partial b/\partial t$) (Iverson, 2005), es:

$$w(b) = \frac{\partial b}{\partial t} + u(b) \frac{\partial b}{\partial x} + v(b) \frac{\partial b}{\partial y} + B(x, y, t) \quad (2.19)$$

Al despejar

$$\frac{\partial b}{\partial t} = -u(b) \frac{\partial b}{\partial x} - v(b) \frac{\partial b}{\partial y} + w(b) - B(x, y, t) \quad (2.20)$$

donde $B(x, y, t)$ especifica la tasa de cambio de la elevación del lecho como consecuencia de la sedimentación ($B > 0$) o la erosión ($B < 0$). Sino hay entrada o salida de masa al flujo, A y B así como $\partial\eta/\partial t$ y $\partial b/\partial t$ son iguales a cero.

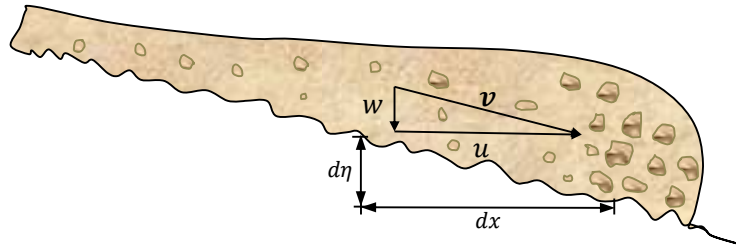


Figura 2.3: Relación de velocidad vertical y horizontal con la pendiente de la trayectoria de flujo.

3. La regla de integración de Leibniz esencialmente establece que cuando se deriva una integral con respecto a un parámetro diferente de la variable en la que está integrado,

derivada e integral se pueden intercambiar (Cañizo, 2004). Esta regla da una fórmula para la diferenciación de una integral definida, cuyos límites son funciones de la variable diferencial (Ecuación 2.21) (Weisstein, 2013). Esto a veces se conoce como la diferenciación bajo el signo integral.

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{b(x)}^{\eta(x)} f(x, z) dz = \int_{b(x)}^{\eta(x)} \frac{\partial f}{\partial x} dz + f(\eta(x), x) \frac{\partial \eta}{\partial x} - f(b(x), x) \frac{\partial b}{\partial x} \quad (2.21)$$

Al despejar,

$$\int_{b(x)}^{\eta(x)} \frac{\partial f}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{b(x)}^{\eta(x)} f(x, z) dz - f(\eta(x), x) \frac{\partial \eta}{\partial x} + f(b(x), x) \frac{\partial b}{\partial x} \quad (2.22)$$

4. El teorema fundamental del cálculo consiste en que la derivación e integración de una función son operaciones inversas. Esto significa que la derivada de una integral de cualquier función continua integrable es igual a la misma función (Ecuación 2.23) (Edwards et al., 1996).

$$\frac{\partial}{\partial z} \int f(z) dz = f(z) \quad (2.23)$$

5. Para solucionar el segundo y el tercer término de la ecuación 2.43, se usa el “**primer teorema generalizado del valor medio para integrales**”, definido como:

$$\int_b^\eta f(z) g(z) dz = f(\xi) \int_b^\eta g(z) dz \quad (2.24)$$

donde $f(z)$ y $g(z)$ son dos funciones continuas $\in [b, \eta]$, $g(z) \geq 0$ para cualquier $z \in [b, \eta]$, entonces existe un punto $\xi \in [b, \eta]$ (Spiegel, 1963; Spivak, 2008). Con la definición 2.24 se puede escribir en términos de velocidades que:

$$\int_b^\eta u^2 dz = \hat{u}_{xx} \int_b^\eta u dz \quad (2.25)$$

Al reemplazar la integral del lado derecho de la Ecuación 2.25, por la Ecuación 2.15, resulta:

$$\int_b^\eta u^2 dz = \hat{u}_{xx} h \bar{u} \quad (2.26)$$

Por el uso de la Ecuación 2.26 se tiene el resultado de la integración del producto de las velocidades:

$$\int_b^\eta u^2 dz = \hat{u}_{xx} h \bar{u} \quad y \quad \int_b^\eta v u dz = \hat{u}_{yx} h \bar{v} \quad (2.27)$$

donde $\hat{u}_{xx} = \beta_{xx} \bar{u}$ y $\hat{u}_{yx} = \beta_{yx} \bar{u}$, β_{xx} y β_{yx} son los factores de corrección del momentum

que brindan información sobre el alejamiento de los perfiles de velocidad de la uniformidad, desarrollados en el flujo (Liggett, 1994; Uoane, 2011). Estos factores se pueden determinar basados en la Ecuación 2.29. La Ecuación 2.27 se puede reescribir como:

$$\beta_{xx}h\bar{u}^2 = \int_b^\eta u^2 dz \quad y \quad \beta_{yx}h\bar{v}\bar{u} = \int_b^\eta vudz \quad (2.28)$$

Al despejar

$$\beta_{xx} = \frac{1}{h\bar{u}^2} \int_b^\eta u^2 dz \quad y \quad \beta_{yx} = \frac{1}{h\bar{v}\bar{u}} \int_b^\eta vudz \quad (2.29)$$

2.2.1. Integración en la profundidad de la ecuación de masa

Después de sintetizar las cinco definiciones matemáticas anteriormente descritas, se lleva a cabo la integración de la ecuación de conservación de masa (Ecuación 2.6).

$$\begin{aligned} \int_b^\eta (\nabla \cdot \mathbf{v}) dz &= \int_b^\eta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz \\ &= \int_b^\eta \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_b^\eta \frac{\partial v}{\partial y} dz + \int_b^\eta \frac{\partial w}{\partial z} dz \end{aligned} \quad (2.30)$$

Después de separar los componentes de velocidad, al último término de la Ecuación 2.30 se aplica el teorema fundamental del cálculo:

$$= \int_b^\eta \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_b^\eta \frac{\partial v}{\partial y} dz + [w]_b^\eta \quad (2.31)$$

Mediante el uso de la regla de integración de Leibniz en el segundo y tercer término de la Ecuación 2.31 y mediante la evaluación de la velocidad w entre η y b .

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial}{\partial x} \int_b^\eta u dz - u(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} + u(b) \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \int_b^\eta v dz - v(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} + v(b) \frac{\partial b}{\partial y} \\ &\quad + w(\eta) - w(b) \end{aligned} \quad (2.32)$$

Mediante la agrupación de términos

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial}{\partial x} \int_b^\eta u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_b^\eta v dz - \left[u(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} + v(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} - w(\eta) \right] \\ &\quad + \left[u(b) \frac{\partial b}{\partial x} + v(b) \frac{\partial b}{\partial y} - w(b) \right] \end{aligned} \quad (2.33)$$

donde los términos agrupados por los corchetes denotan la superficie libre y el lecho,

indicado por η y b , respectivamente. Estas variables encerradas por los corchetes son términos de corrección que proceden de la integración y diferenciación con la posición límite como función de x y y (Vreugdenhil, 1994). Al reemplazar el valor medio de la velocidad (Ecuación 2.15) en el segundo y tercer término de la Ecuación 2.33.

$$= \frac{\partial h\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{v}}{\partial y} - \left[u(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} + v(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} - w(\eta) \right] + \left[u(b) \frac{\partial b}{\partial x} + v(b) \frac{\partial b}{\partial y} - w(b) \right] \quad (2.34)$$

donde $h\bar{u}$, $h\bar{v}$ son las descargas por unidad de ancho en la dirección x y y (Tan, 1992). Mediante la incorporación de condiciones de contorno cinemáticas (Ecuaciones 2.18 y 2.20) en la Ecuación 2.34, se tiene:

$$\frac{\partial h\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial b}{\partial t} + A - B = 0 \quad (2.35)$$

La variación de la profundidad del flujo de material desagregado en función del tiempo ($\partial h / \partial t$) es igual a la variación de la superficie libre ($\partial \eta / \partial t$) menos la variación del lecho respecto al tiempo ($\partial b / \partial t$), que se puede escribir matemáticamente como:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial b}{\partial t} \quad (2.36)$$

Por último, la ecuación de conservación de la masa integrada en la profundidad promedio se obtiene sustituyendo la Ecuación 2.36 en 2.35.

$$\frac{\partial h\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial t} + A - B = 0 \quad (2.37)$$

Así, se obtiene las *ecuaciones de aguas someras* aplicadas al flujo de material desagregado si $A = B = 0$.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (2.38)$$

2.2.2. Integración en la profundidad de la ecuación de momentum

La integración en la profundidad de la ecuación de momentum (Ecuación 2.11) en la dirección x es

$$\int_b^\eta \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial vu}{\partial y} + \frac{\partial wu}{\partial z} \right) dz = -\frac{1}{\rho} \int_b^\eta \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dz \quad (2.39)$$

Los términos del lado izquierdo en la Ecuación 2.39 son separados.

$$\int_b^\eta \frac{\partial u}{\partial t} dz + \int_b^\eta \frac{\partial u^2}{\partial x} dz + \int_b^\eta \frac{\partial vu}{\partial y} dz + \int_b^\eta \frac{\partial wu}{\partial z} dz \quad (2.40)$$

Mediante el uso de la regla de integración de Leibniz en los primeros tres términos de la Ecuación 2.40 y el teorema fundamental del cálculo para el último término de la ecuación 2.40, se tiene,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_b^\eta u dz - u(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial t} + u(b) \frac{\partial b}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_b^\eta u^2 dz - u^2(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} + u^2(b) \frac{\partial b}{\partial x} \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \int_b^\eta v u dz - v(\eta) u(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} + v(b) u(b) \frac{\partial b}{\partial y} + w(\eta) u(\eta) - w(b) u(b) \end{aligned} \quad (2.41)$$

Al agrupar términos y factorizar,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_b^\eta u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_b^\eta u^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_b^\eta v u dz - u(\eta) \left[\frac{\partial \eta}{\partial t} + u(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} + v(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} - w(\eta) \right] \\ & + u(b) \left[\frac{\partial b}{\partial t} + u(b) \frac{\partial b}{\partial x} + v(b) \frac{\partial b}{\partial y} - w(b) \right] \end{aligned} \quad (2.42)$$

Al despejar e incorporar las condiciones de contorno cinemáticas (Ecuaciones 2.18 y 2.20), la Ecuación 2.42 es reducida a:

$$\frac{\partial h \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_b^\eta u^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_b^\eta v u dz - u(\eta) [-A] + u(b) [-B] \quad (2.43)$$

Por el reemplazo de la Ecuación 2.28 en la Ecuación 2.43:

$$\frac{\partial h \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \beta_{xx} h \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \beta_{yx} h \bar{v} \bar{u}}{\partial y} + A u(\eta) - B u(b) \quad (2.44)$$

Los valores de β pueden ser diferentes de la unidad para perfiles de velocidad no uniformes. Para perfiles de velocidad parabólicos (que tiene corte diferencial y antideslizante) $\beta = 6/5$, mientras que para un perfil uniforme (flujo de corte) $\beta = 1$ (Savage and Hutter, 1989). Dado que es probable que exista deslizamiento en las paredes del flujo, el corte de la zona activa se limita a una capa delgada y el perfil de velocidad es “romo” (Savage and Hutter, 1989). En otras palabras, cuando se supone que las velocidades no son una función de z (constante en la vertical), el término β se toma generalmente como la unidad ($\beta = 1$), lo que equivale a perfiles de velocidad uniformes (Liggett, 1994; Uoane, 2011).

Hutter et al. (2005) presenta una forma de estimar los efectos de los factores de co-

rección de momentum β considerando un flujo cortante impulsado por la gravedad de un fluido cuyo perfil de velocidad sigue una ley de potencia y viaja por un plano inclinado, infinitamente largo, estable y de altura constante. Lo anterior permite para un plano paralelo de velocidad que consta de una velocidad de deslizamiento u_s y un corte, que es dado por $d\tilde{u}/dz = A\tau^n$ (Hutter et al., 2005). En el Sección 6.1.5 se presenta un análisis sobre el factor de corrección de momentum para diferentes valores entre $\beta = 1$ y $\beta = 1,2$.

La ecuación de conservación momentum en la dirección x , integrada en la profundidad, se obtiene sustituyendo la Ecuación 2.44 en el lado izquierdo de la ecuación 2.39.

$$\frac{\partial h\bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \beta_{xx} h\bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \beta_{yx} h\bar{v}\bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \int_b^\eta \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dz - Au(\eta) + Bu(b) \quad (2.45)$$

La ecuación de conservación de momentum en la dirección y , integrada en la profundidad, se obtiene haciendo tratamiento análogo a la ecuación 2.45.

$$\frac{\partial h\bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial \beta_{xy} h\bar{u}\bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \beta_{yy} h\bar{v}^2}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \int_b^\eta \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) dz - Av(\eta) + Bv(b) \quad (2.46)$$

donde $Av(\eta)$ y $Bv(b)$ representan los cambios del momentum asociados con la aceleración de la masa recién añadida o perdida (fuentes y sumideros), como resultado de la erosión o la sedimentación de masas respectivamente. Si los cambios del momentum asociado a la aceleración de la masa recién añadida o perdida son iguales a cero y los términos de esfuerzos se dividen en esfuerzos sólidos y fluido (i.e., $\sigma_{xx} = \sigma_{s(xx)} + \sigma_{f(xx)}$), las ecuaciones de momentum en las direcciones x y y , respectivamente son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h\bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \beta_{xx} h\bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \beta_{yx} h\bar{v}\bar{u}}{\partial y} = & -\frac{1}{\rho} \int_b^\eta \left(\frac{\partial \sigma_{f(xx)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{f(yx)}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{f(zx)}}{\partial z} \right. \\ & \left. + \frac{\partial \sigma_{s(xx)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{s(yx)}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{s(zx)}}{\partial z} - g_x \right) dz \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h\bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial \beta_{xy} h\bar{u}\bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \beta_{yy} h\bar{v}^2}{\partial y} = & -\frac{1}{\rho} \int_b^\eta \left(\frac{\partial \tau_{f(xy)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{f(yy)}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{f(zy)}}{\partial z} \right. \\ & \left. + \frac{\partial \tau_{s(xy)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{s(yy)}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{s(zy)}}{\partial z} - g_y \right) dz \end{aligned} \quad (2.48)$$

2.3. Estimación de esfuerzos

En esta sección se muestran las condiciones de esfuerzos para la ecuación de flujo de material desagregado suponiendo que los esfuerzos normales se definen positivo en compresión como se muestra en la Figura 2.4. La profundidad promedio también implica que el esfuerzo normal total (la suma de los esfuerzos normales de sólidos y fluido) en la dirección z equilibra el peso de la mezcla en el componente z .

$$\sigma_{s(zz)} + \sigma_{f(zz)} = \rho g_z (h - z) \quad (2.49)$$

La Ecuación 2.49, a su vez, lleva a las expresiones para el esfuerzo normal total en el lecho y para el esfuerzo normal total promediado en la profundidad en la dirección z ,

$$\sigma_{s(zz)}|_{z=0} + \sigma_{f(zz)}|_{z=0} = \rho g_z h \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{s(zz)} + \bar{\sigma}_{f(zz)} &= \frac{1}{h} \int_0^h \rho g_z (h - z) dz = \frac{1}{h} \int_0^h \rho g_z h dz - \frac{1}{h} \int_0^h \rho g_z z dz \\ &= \frac{1}{h} \rho g_z h z \Big|_{z=0}^{z=h} - \frac{1}{2h} \rho g_z z^2 \Big|_{z=0}^{z=h} \\ &= \rho g_z (h) - \rho g_z (0) - \frac{1}{2h} \rho g_z (h)^2 + \frac{1}{2h} \rho g_z (0)^2 \\ &= \rho g_z h - \frac{1}{2} \rho g_z h \\ &= \frac{1}{2} \rho g_z h \end{aligned} \quad (2.51)$$

2.3.1. Estimación de esfuerzos de la fase sólida

En los flujos granulares muy rápidos, el transporte de momentum puede ser dominado por breves colisiones en lugar de prolongados contactos de fricción intergranular (Savage, 1984). Por otro lado, algunos valores tabulados muestran que muchos de los flujos geofísicos probablemente caen dentro del régimen dominado por la fricción en lugar de ser dominado por el régimen de colisión (Iverson and Denlinger, 2001).

La influencia de la fricción de Coulomb y la colisión de granos en flujos de material desagregado impulsado por la gravedad se puede evaluar utilizando un criterio numérico identificado por Savage (1984). Este criterio distingue los regímenes de flujo sobre la base de un parámetro adimensional, N_S , que caracteriza el esfuerzo en flujos constantes y uniformes.

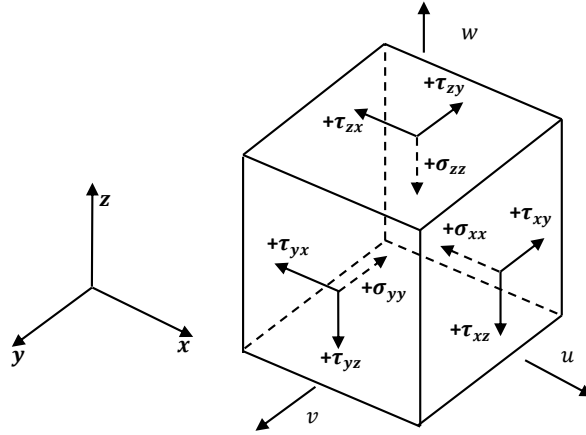


Figura 2.4: Definición del sistema de coordenadas local y convenios de signos utilizados para calcular los esfuerzos y las velocidades. La coordenada z es un vector normal dirigido hacia el lecho. Las coordenadas x y y están orientados ortogonalmente pero de una manera arbitraria al plano normal z . Los componentes de esfuerzos normal (indicadas por flechas discontinuas) son positivos a compresión, y ambos componentes de esfuerzo cortante y normal son positivos cuando está orientado como se muestra aquí (Iverson and Denlinger, 2001).

$$N_S = \frac{\rho_s \dot{\gamma}^2 \delta^2}{(\rho_s - \rho_f) g H} \quad (2.52)$$

donde ρ_s y ρ_f son las densidades de masa de los granos sólidos y fluido intergranular, respectivamente, $\dot{\gamma}$ es la tasa de deformación por corte, δ es el diámetro de grano, g es la magnitud de la aceleración gravitacional, y H es la profundidad del flujo. Entonces, N_S representan la proporción de esfuerzos por colisión de granos a esfuerzos de contacto que producen fricción de Coulomb. Por ejemplo, si $N_S > 1,0$ corresponde a un estado fluidizado de la mezcla en la que los esfuerzos de colisión de granos pueden afectar significativamente la dinámica de flujo. Si $N_S < 1,0$, la fricción de Coulomb puede superar todas las otras formas de corte (Iverson, 1997).

Bagnold (1954) evaluó el papel de los esfuerzos de fluidos viscosos en mezclas granulares. Esta evaluación distingue la contribución de esfuerzos por colisión de granos y el esfuerzo viscoso con un parámetro adimensional N_B , definido como:

$$N_B = \left(\frac{n_s^{1/3}}{n_*^{1/3} - n_s^{1/3}} \right)^{1/2} \frac{\rho_s \dot{\gamma} \delta^2}{\mu} \quad (2.53)$$

donde n_s es la fracción de volumen de los sólidos granulares, n_* es el valor máximo de

n_s , y μ es la viscosidad del fluido intergranular. Por ejemplo, $N_B < 40$ indica que el régimen “macroviscoso” domina los esfuerzos del flujo. Si $N_B > 450$ indica que el régimen de flujo es dominado por colisiones (Iverson, 1997).

Para flujos delgados y rápidos en pendientes pronunciadas, altas tasas de deformación hacen que N_S y N_B sean moderadamente grandes. Los valores pequeños de N_S y N_B indican que las colisiones probablemente transmiten fuerzas insignificantes en tales flujos y que la fricción y viscosidad dominan el flujo. Valores tabulados de N_S y N_B indican que muchos flujos geofísicos probablemente son dominados por la fricción en lugar de ser dominado por las colisiones, porque N_S tiene valores del orden de 10^{-7} , 10^{-4} y N_B del orden de 10^{-3} (Iverson and Denlinger, 2001).

La presión de poros del fluido intergranular influencia la fricción de Coulomb en la deformación de masas granulares y pueden diferir de la presión de equilibrio constante supuesto en la Ecuación 2.52. Algunos cálculos y datos indican que el principio de esfuerzo efectivo de Terzaghi (1936) puede describir estos efectos de la presión de poros, incluso si las deformaciones son grandes y moderadamente rápidas (Iverson and Denlinger, 2001). La ecuación de Coulomb con efectos de la presión de poros se puede expresar de varias formas.

$$\tau_{yield} = (\sigma_{yield} - P) \tan \phi + c \quad (2.54)$$

$$\tau_{max} = (\sigma_{mean} - P) \sin \phi + c \cos \phi \quad (2.55)$$

$$\left[\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{1/2} = \left[\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right) + P \right] \sin \phi + c \cos \phi \quad (2.56)$$

donde τ es el esfuerzo de corte intergranular, σ es el esfuerzo total normal de compresión, P es la presión de poros del fluido, ϕ es el ángulo de fricción intergranular de Coulomb, c es la cohesión intergranular, y $\sigma - P$ es el esfuerzo efectivo intergranular. Los subíndices *yield*, *max* y *mean* denotan si los esfuerzos actúan en planos de fluencia (Ecuación 2.54), sobre planos de máximos esfuerzos de corte y esfuerzos normales medios (Ecuación 2.55), respectivamente, o sobre planos arbitrarios definidos por un sistema de coordenadas rectangulares (Ecuación 2.56)

Por lo tanto, se supone que la evaluación de los esfuerzos que se producen entre los sólidos obedece a la ecuación de Coulomb (Ecuaciones 2.54, 2.55 y 2.56). Debido a la gran deformación de los sólidos se supone que las reglas de Coulomb no tienen cohesión (i.e., $c = 0$). Esta suposición es generalmente apropiada para sólidos granulares sometidos a grandes deformaciones que rompen las uniones cohesivas.

Para simplificar la formulación y hacerla comparable a la mecánica de suelos convencional, se define el esfuerzo del fluido como $T_f = IP + n_f T_{f_{vis}}$, donde I es el tensor identidad,

P es la presión de poros del fluido, n_f es la fracción de volumen de fluido y $T_{f_{vis}}$ es el esfuerzo viscoso del fluido. También se iguala los esfuerzos de los sólidos y los esfuerzos efectivos, $T_s = T_e$. Entonces la definición de los esfuerzos totales de la mezcla es dada como $T_s + T_f = T_e + IP + n_f T_f$.

Para evaluar los esfuerzos, es necesario reemplazar los esfuerzos de los sólidos en las Ecuaciones 2.47 y 2.48 por los esfuerzos normal y de corte basal promediados en la profundidad obtenidos por la integración en el lado derecho de las Ecuaciones 2.47 y 2.48.

$$-\int_0^h \left(\frac{\partial \sigma_{s(xx)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{s(yx)}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{s(zx)}}{\partial z} \right) dz = \frac{\partial h \bar{\sigma}_{s(xx)}}{\partial x} + \frac{\partial h \bar{\tau}_{s(yx)}}{\partial y} + \bar{\tau}_{s(zx)} \Big|_{z=0} \quad (2.57)$$

$$-\int_0^h \left(\frac{\partial \tau_{s(xy)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{s(yy)}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{s(zy)}}{\partial z} \right) dz = \frac{\partial h \bar{\tau}_{s(xy)}}{\partial x} + \frac{\partial h \bar{\sigma}_{s(yy)}}{\partial y} + \bar{\tau}_{s(zy)} \Big|_{z=0} \quad (2.58)$$

Las ecuaciones 2.57 y 2.58 utilizan una aproximación de “placa uniforme”, que supone que los esfuerzos en cualquier punto y tiempo (x, y, z, t) dependen solamente del espesor local $h(x, y, t)$ y no depende del gradiente del espesor ($\partial h / \partial x$ and $\partial h / \partial y$).

El esfuerzo normal integrado en la profundidad promedio $\bar{\sigma}_{s(xx)}$ y $\bar{\sigma}_{s(yy)}$ en la dirección x y y , respectivamente, es relacionado con el esfuerzo normal en la dirección z promediado en la profundidad $\bar{\sigma}_{s(zz)}$ por el uso de un coeficiente lateral de esfuerzos, $k_{act/pas}$, derivado de la teoría de Coulomb. Este coeficiente escalar asegura invariancia en el plano $x - y$ y preserva la simetría de los esfuerzos $\bar{\tau}_{s(yx)} = \bar{\tau}_{s(xy)}$ (Iverson and Denlinger, 2001).

$$\bar{\sigma}_{s(xx)} = \bar{\sigma}_{s(yy)} = k_{act/pas} \bar{\sigma}_{s(zz)} \quad (2.59)$$

donde el coeficiente de presión lateral de tierras es descrito por Savage and Hutter (1989) (Sección 2.3.4, Ecuación 2.80). Volviendo a la Ecuación 2.51.

$$\bar{\sigma}_{s(zz)} = \frac{1}{2} \rho g_z h - \bar{\sigma}_{f(zz)} \quad (2.60)$$

Por el reemplazo de la Ecuación 2.60 en 2.59

$$\bar{\sigma}_{s(xx)} = \bar{\sigma}_{s(yy)} = k_{act/pas} \left(\frac{1}{2} \rho g_z h - \bar{\sigma}_{f(zz)} \right) \quad (2.61)$$

Para encontrar el esfuerzo normal del fluido promediado en la profundidad $\sigma_{f(zz)}$ que aparece en la ecuación 2.61 (identificado como la presión de poros del fluido), se supone que la presión de poros del fluido varía linealmente desde un valor máximo en la base del flujo (P_{bed}) hasta cero en la superficie libre (i.e., presión atmosférica), por lo tanto, la integración entre estos dos límites

$$\bar{\sigma}_{f(zz)} = \frac{1}{h} \int_0^h \sigma_{f(zz)} dz = \frac{1}{2} \sigma_{f(zz)} \Big|_{z=0} = \frac{1}{2} P_{bed} \quad (2.62)$$

donde P_{bed} es la presión de poros en el lecho del flujo. La suposición de la variación lineal de la presión del fluido también permite expresar la presión del fluido como una fracción λ del esfuerzo normal total basal.

$$P_{bed} = \lambda \rho g_z h \quad (2.63)$$

Por lo tanto, si $\lambda = 1$ indica que el esfuerzo efectivo basal es cero o que el suelo se encuentra en un completo estado de licuación (Figura 2.5).

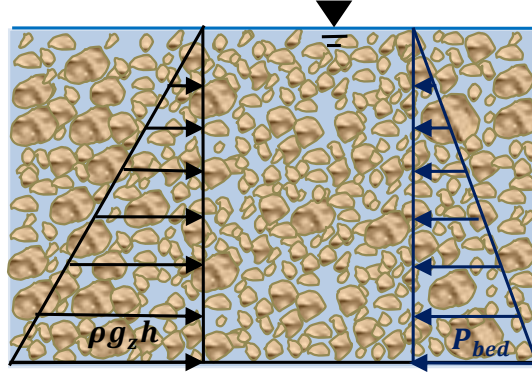


Figura 2.5: Fracción de presión de poros.

Combinando las Ecuaciones 2.61, 2.62 y 2.63

$$\bar{\sigma}_{s(xx)} = \bar{\sigma}_{s(yy)} = k_{act/pas} \left(\frac{1}{2} \rho g_z h - \frac{1}{2} \lambda \rho g_z h \right) = k_{act/pas} \left[\frac{1}{2} \rho g_z h (1 - \lambda) \right] \quad (2.64)$$

La Ecuación 2.64 describe el esfuerzo efectivo intergranular $[\sigma_e = \bar{\sigma}_{s(xx)} = \bar{\sigma}_{s(xx)} - \bar{\sigma}_{f(xx)}]$. Esto implica que $\bar{\sigma}_{s(xx)}$ y $\bar{\sigma}_{s(yy)}$ actúan sobre planos conjugados de máximo corte, como se demuestra en 2.55 y 2.56.

Con el objetivo de derivar una expresión para los esfuerzos cortantes transversales de los sólidos $\bar{\tau}_{s(yx)}$ y $\bar{\tau}_{s(xy)}$, se combinan las Ecuaciones 2.55 y 2.64 de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{s(yx)} = \bar{\tau}_{s(xy)} &= (\sigma_{(xx)} - P) \sin \phi_{int} = \bar{\sigma}_{s(xx)} \sin \phi_{int} \\ &= -sgn \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \left\{ k_{act/pas} \left[\frac{1}{2} \rho g_z h (1 - \lambda) \right] \right\} \sin \phi_{int} \end{aligned} \quad (2.65)$$

donde el factor $-sgn(\partial\bar{u}/\partial y)$ designa la función signo (+ o -) opuesto al argumento $\partial\bar{u}/\partial y$, asegurando que los esfuerzos cortantes se oponen a la deformación por corte en el plano $x - y$.

La evaluación de esfuerzos cortantes de los sólidos en el lecho se obtiene mediante la combinación de las Ecuaciones 2.50, 2.54 y 2.63.

$$\tau_{s(zx)}\big|_{z=0} = -sgn(\bar{u}) [\rho g_z h(1 - \lambda)] \tan \phi_{bed} \quad (2.66)$$

donde el factor $-sgn(\bar{u})$ que asegura que el esfuerzo basal de Coulomb es opuesto al deslizamiento basal.

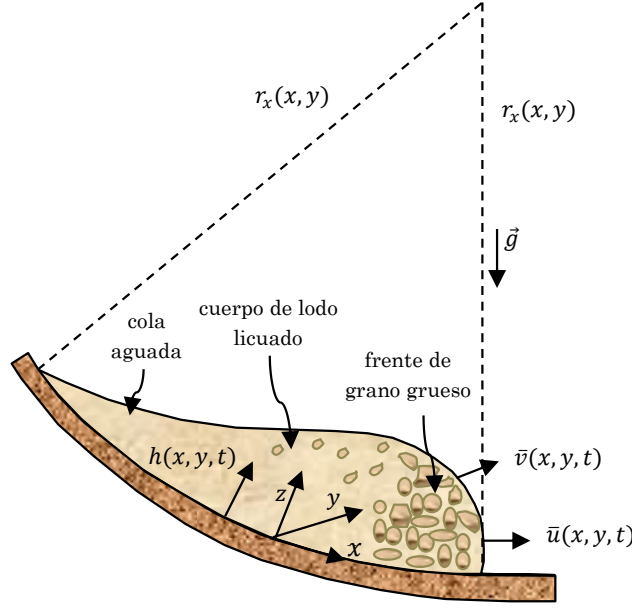


Figura 2.6: Corte longitudinal esquemático de un flujo de material desagregado que desciende por una pendiente curvilínea, se ilustra el sistema de coordenadas local y variables dependientes. El componente x de curvatura del lecho se especifica por el radio de curvatura local r_x (Iverson and Denlinger, 2001).

La resistencia debida a la fricción basal es modificada por cambios en la pendiente del lecho que afectan el peso aparente de la masa en movimiento (Figura 2.6). La acción-reacción en el lecho también aumenta localmente el esfuerzo normal al lecho por una cantidad $(\rho h \bar{u}^2)/r_x$, donde r_x es el radio local de curvatura del lecho en la dirección x y $\bar{u}^2/r_x$ es asociado con la aceleración centrípeta (Iverson and Denlinger, 2001). Así, la resistencia por fricción en el lecho es dada como

$$\tau_{s(zx)}|_{z=0} = -sgn(\bar{u}) \left[\rho g_z h (1 - \lambda) \left(1 + \frac{\bar{u}^2}{r_x g_z} \right) \right] \tan \phi_{bed} \quad (2.67)$$

La Ecuación 2.67 se puede reducir a 2.66 en el limite cuando $r_x \rightarrow \infty$, aplicable a topografía planas. Esto se aplica tanto a lechos cóncavos con curvatura positiva ($r_x > 0$) como a lechos convexos con curvatura negativa ($r_x < 0$) (Iverson and Denlinger, 2001).

2.3.2. Estimación de esfuerzos de la fase fluida

Para evaluar los esfuerzos de la fase fluida se supone que el fluido tiene un comportamiento Newtoniano. Los esfuerzos del fluido incluyen tanto un componente de presión isotrópica que no depende de la deformación viscosa como un componente viscoso desviador. Al tomar los términos de disipación de energía de las ecuaciones de Navier-Stokes para fluidos Newtonianos incompresibles con el fin de representar los esfuerzos debido a la componente de fluido de la mezcla, se tiene que

$$- \int_0^h \left(\frac{\partial \sigma_{f(xx)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{f(yx)}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{f(zx)}}{\partial z} \right) dz = - \int_0^h \left[\frac{\partial P}{\partial x} - n_f \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \right] dz \quad (2.68)$$

La fracción de volumen de fluido n_f multiplica a la viscosidad del fluido μ , porque sólo esta fracción de la mezcla produce esfuerzos viscosos. Con el supuesto de que la presión del fluido varía linealmente desde un máximo en el lecho P_{bed} hasta cero en la superficie libre, y usando el teorema de Leibniz, la presión se integra, de modo que

$$\begin{aligned} - \int_0^h \frac{\partial P}{\partial x} dz &= - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h P dz + P(h) \frac{\partial h}{\partial x} - P(0) \frac{\partial 0}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h P dz + P(h) \frac{\partial h}{\partial x} \\ &= - \frac{\partial h P}{\partial x} + P(h) \frac{\partial h}{\partial x} = - P \frac{\partial h}{\partial x} - h \frac{\partial P}{\partial x} + P(h) \frac{\partial h}{\partial x} = - h \frac{\partial P}{\partial x} \\ &= - h \frac{\partial P_{bed}}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.69)$$

Del mismo modo, los términos derivados de velocidad son interpretados por el teorema de Leibniz y el teorema del valor medio para integrales.

$$\begin{aligned}
\int_0^h n_f \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dz &= n_f \mu \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^h u dz - u(h) \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial u(h)}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \right] \\
&= n_f \mu \left[\frac{\partial^2 h \bar{u}}{\partial x^2} - u(h) \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial u(h)}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \right] \\
&= n_f \mu \left[h \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - u(h) \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial u(h)}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \right] \\
&= n_f \mu \left[h \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} - u(h)) \frac{\partial h}{\partial x} + (\bar{u} - u(h)) \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right] \quad (2.70)
\end{aligned}$$

donde $u(h)$ especifica el valor de u en la superficie del flujo. Mediante el uso de la misma aproximación “placa uniforme” ($\partial h / \partial x = 0$) utilizado para derivar las ecuaciones de esfuerzos de Coulomb, como se muestra en la Sección 2.3.1, la Ecuación 2.70 puede ser reducida a

$$\int_0^h n_f \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dz = n_f \mu h \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} \quad (2.71)$$

La misma simplificación reduce la ecuación análoga para $\partial^2 v / \partial y^2$ a

$$\int_0^h n_f \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dz = n_f \mu h \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \quad (2.72)$$

El término final de esfuerzo viscoso se puede integrar directamente como se muestra en la Ecuación 2.73 (Denlinger and Iverson, 2001).

$$\int_0^h n_f \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz = n_f \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=h} - \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} \right) = -3n_f \mu h \frac{\bar{u}}{h} \quad (2.73)$$

La forma de la Ecuación 2.73 resulta de suponer una condición de frontera basal antideslizante para el flujo del fluido y un perfil de velocidad parabólico en la dirección z (Denlinger and Iverson, 2001). Con la combinación de las Ecuaciones 2.69, 2.71, 2.72 y 2.73 se tiene la ecuación que representa el esfuerzo del fluido en la Ecuación 2.68.

$$-\int_0^h \left(\frac{\partial \sigma_{f(xx)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{f(yx)}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{f(zx)}}{\partial z} \right) dz = -h \frac{\partial P_{bed}}{\partial x} + n_f \mu h \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + n_f \mu h \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + -3n_f \mu h \frac{\bar{u}}{h} \quad (2.74)$$

Y una expresión análoga para la dirección y .

$$-\int_0^h \left(\frac{\partial \sigma_{f(xy)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{f(yy)}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{f(zy)}}{\partial z} \right) dz = -h \frac{\partial P_{bed}}{\partial y} + n_f \mu h \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + n_f \mu h \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + -3n_f \mu h \frac{\bar{v}}{h} \quad (2.75)$$

2.3.3. Evaluación de la presión de poros

La escala de tiempo para la disminución de la presión de poros se define por el cociente de un coeficiente de difusión de la presión de poros y el cuadrado de la longitud de la trayectoria de drenaje característica. Mediciones y modelaciones hechas por Major and Iverson (1999) muestra que el drenaje es predominantemente vertical en depósitos de flujo de material desagregado que tienen longitudes y anchos que superan el espesor h . Así, la longitud de la trayectoria de drenaje característica es h (Iverson, 1997).

Iverson and Denlinger (2001) infieren que la presión de poros del fluido basal se advecta de forma pasiva con el flujo en las direcciones x y y y la presión de poro se difunde de forma simultánea en la dirección z debido a la consolidación mezcla dependiente del tiempo. La presión de poros obedece una ecuación de advección-difusión.

$$\frac{\partial P_{bed}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial P_{bed}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial P_{bed}}{\partial y} = D \left. \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right|_{bed} \quad (2.76)$$

donde D es la difusividad de la presión de poros de la mezcla grano-fluido y el término difusivo que involucra $\partial^2 P / \partial z^2$ se evalúa en el lecho. La disipación final de la presión de poros en flujos saturados resulta del drenaje gravitacional y al final se produce una presión menor a la atmosférica (Iverson, 1997). Con esto, los términos advectivos de la Ecuación 2.76 se pueden suponer como cero. Así, la solución de la ecuación de difusión en la dirección z se puede obtener fácilmente mediante la adaptación de una solución de la ecuación de transporte de calor dada por Carslaw and Jaeger (1959) (Ecuación 2.79), sujeta a las condiciones iniciales y de contorno dadas por la Ecuación 2.78, tal como se presenta en Iverson and Denlinger (2001).

$$\left. \frac{\partial P}{\partial t} \right|_{bed} = D \left. \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right|_{bed} \quad (2.77)$$

$$P(z, 0) = \kappa[\rho g_z(h - z)], \quad \frac{\partial P}{\partial z}(0, t) = 0, \quad P(h, t) = 0 \quad (2.78)$$

La condición inicial, especifica que la presión de poros es igual a una fracción $\kappa \epsilon [\kappa = 0, \kappa = 1]$ del esfuerzos normal total en cada profundidad z (Iverson and Denlinger, 2001). Las condiciones de contorno especifican que la difusión de la presión de poros se dirige lejos del lecho ($z = 0$) y hacia la superficie libre ($z = h$), donde la presión del fluido es cero

(Iverson and Denlinger, 2001). Debido a que el modelo se integra en la profundidad, se evalúa la presión del fluido de poros sólo en el lecho (P_{bed}). Mediante la evaluación de la solución de P_{bed} en el lecho (donde $z = 0$) se obtiene

$$\frac{P_{bed}}{\rho g_z h} = \lambda = \kappa \left\{ 1 - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n \operatorname{erfc} \left((2n+1) \frac{h}{\sqrt{4Dt}} \right) \right] \right\} \quad (2.79)$$

donde λ es definida por la Ecuación 2.63, D es la difusividad hidráulica que gobierna la disipación de la presión de poros del fluido. La Ecuación 2.79 permite describir que, cuando el tiempo tiende a cero, el valor de la presión de poros es máximo para el flujo en función de κ . Mientras que, si el tiempo tiende a infinito, la presión de poros se ha reducida a cero, causado por el coeficiente de difusión. En la Figura 2.7 se presenta el cálculo de la Ecuación 2.79 para los primeros 1000 términos de la serie infinita.

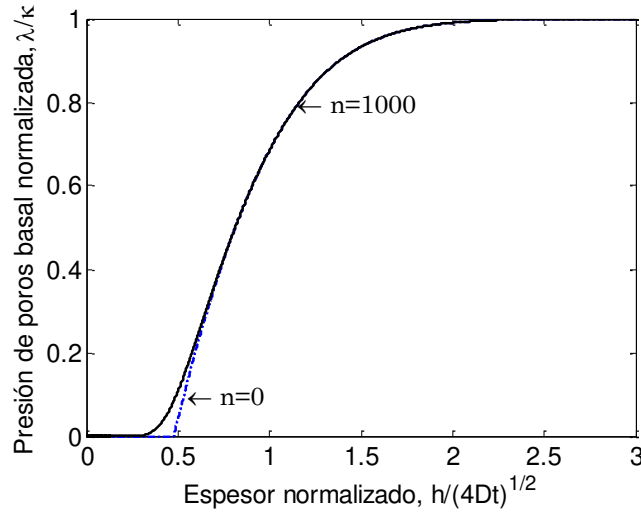


Figura 2.7: Distribución de presión de poros basal normalizado pronosticado por la Ecuación 2.79. La línea continua representa los primeros 1000 términos de la solución y la línea punteada los primeros términos de la serie (Iverson and Denlinger, 2001).

2.3.4. Coeficiente de presión lateral de tierras

Savage and Hutter (1989) construyeron el coeficiente de presión lateral de tierras mediante el uso del círculo de Mohr, suponiendo que un estado de esfuerzos activo y pasivo se desarrolla dependiendo de si un elemento de material está siendo alargado o comprimido en la dirección paralela al lecho. Por lo tanto, los esfuerzos normales y paralelos al ángulo medio de inclinación pueden estar relacionados mediante el uso de un coeficiente de empuje

dado por

$$k_{act/pas} = 2 \frac{1 \pm [1 - \cos^2 \phi_{int}(1 + \tan^2 \phi_{bed})]^{1/2}}{\cos^2 \phi_{int}} - 1 \quad (2.80)$$

donde ϕ_{int} y ϕ_{bed} son los ángulos de fricción interna del material que fluye y del lecho, respectivamente. El coeficiente de presión lateral de tierra $k_{act/pas}$ se puede hallar con las velocidades sobre los puntos adyacentes con una definición de activo (signo positivo) o pasivo (signo negativo) según si el movimiento pendiente abajo es de dilatación o compresión dado por la Ecuación 2.81.

$$k_{act/pas} = \begin{cases} k_{act}, & \text{si } \partial u / \partial x, \partial v / \partial y > 0, \\ k_{pas}, & \text{si } \partial u / \partial x, \partial v / \partial y < 0, \end{cases} \quad (2.81)$$

Si el lecho tiene una máxima rugosidad, en cuyo caso $\phi_{bed} = \phi_{int}$, el coeficiente de presión lateral de tierra se puede describir como

$$k_{act/pas} = k_0 = k^{nat} = \frac{1 + \sin^2 \phi_{int}}{1 - \sin^2 \phi_{int}} \quad (2.82)$$

La Ecuación 2.82 permite encontrar el $k_0 = k^{nat}$ (Figura 2.8) como un punto medio entre los coeficiente activo y pasivo, indicando que un bloque de material de Coulomb se puede mover pendiente abajo con divergencia de velocidad cero (que no implica adelgazamiento o engrosamiento) sólo si el ángulo de fricción del lecho es igual al ángulo de fricción interna (Iverson and Denlinger, 2001).

2.3.4.1. Regularización del coeficiente de presión lateral de tierras

La teoría de Savage and Hutter (1989) para avalanchas granulares supone que el material granular está en cualquiera de los dos estados de esfuerzos límites, dependiendo de si la masa se contrae o se dilata. Esta transición puede generar discontinuidades en esfuerzos entre regiones convergente y divergentes (i.e., contracción o dilatación) lo que necesariamente implica que hay un salto en la velocidad de la avalancha y/o su espesor (Tai and Gray, 1998). Estas discontinuidades introducidas sobre todo en la velocidad desestabilizan la solución numérica dada por el método penalizado de multidominios espectrales (Sección 4.3), por lo tanto, es necesario hacer uso de un esquema de regularización para el coeficiente de presión lateral de tierra como el que se presenta en Tai and Gray (1998).

La regularización del coeficiente de presión lateral de tierras se puede hacer mediante la introducción de una transición suave entre los diferentes límites de estados de esfuerzos (Figura 2.8). Para grandes pendientes de convergencia $k_{act/pas}$ se acerca k_{pas} y grandes pendientes de divergencia $k_{act/pas}$ se aproxima a k_{act} .

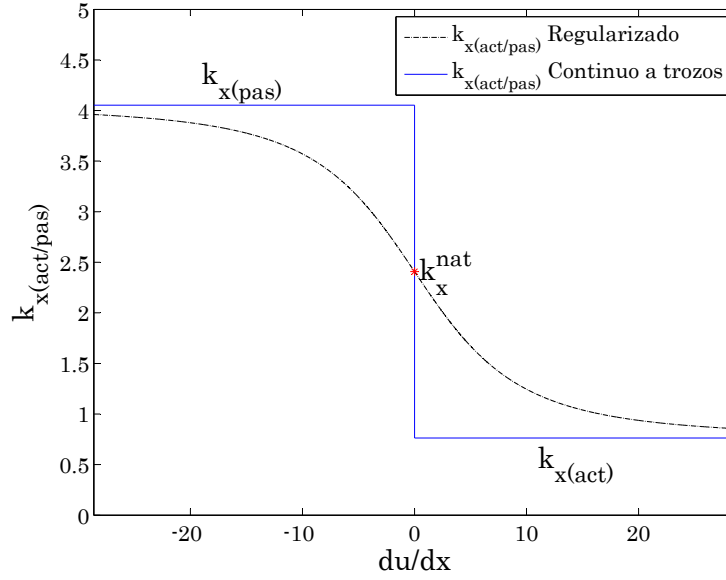


Figura 2.8: Presión lateral de tierra regularizado por la introducción de una función que decrece monótonicamente con la divergencia de la velocidad $\partial u/\partial x$.

Existe una transición suave que decrece monótonicamente entre estos dos estados limítantes, que cruza $\partial u/\partial x = 0$ en la línea $k_{x_{act/pas}} = k_{x_0}$. Tai and Gray (1998) presenta un coeficiente lateral de tierra modificado definido como:

$$k_{x_{act/pas}} = \frac{(k_{x_{act}} + k_{x_{pas}})}{2} + A \frac{(k_{x_{act}} - k_{x_{pas}})}{2} \quad (2.83)$$

$$k_{y_{act/pas}} = \frac{(k_{y_{act}} + k_{y_{pas}})}{2} + B \frac{(k_{y_{act}} - k_{y_{pas}})}{2} \quad (2.84)$$

donde las funciones A y B son dependientes del gradiente de velocidad $\partial u/\partial x$ y $\partial v/\partial y$, respectivamente. Estas funciones se describen como,

$$A = \frac{[\psi(\partial u/\partial x) - (\partial u/\partial x_0)]}{\sqrt{1 + [\psi(\partial u/\partial x) - (\partial u/\partial x_0)]^2}} \quad (2.85)$$

$$B = \frac{[\psi(\partial v/\partial y) - (\partial v/\partial y_0)]}{\sqrt{1 + [\psi(\partial v/\partial y) - (\partial v/\partial y_0)]^2}} \quad (2.86)$$

$$(2.87)$$

donde ψ determina la pendiente de la transición. Las variables $\partial u/\partial x$ y $\partial v/\partial y$ se eligen

de manera que el origen $k_{x_{act}/pas}|_{\partial u/\partial x=0} = k_{x_0}$ y $k_{y_{act}/pas}|_{\partial v/\partial y=0} = k_{y_0}$, indicando que

$$\frac{\partial u}{\partial x_0} = \frac{-A_0}{\sqrt{(1-A_0^2)}} \quad (2.88)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y_0} = \frac{-B_0}{\sqrt{(1-B_0^2)}} \quad (2.89)$$

donde

$$A_0 = \frac{(2k_{x_0} - k_{x_{act}} - k_{x_{pas}})}{(k_{x_{act}} - k_{x_{pas}})} \quad (2.90)$$

$$B_0 = \frac{(2k_{y_0} - k_{y_{act}} - k_{y_{pas}})}{(k_{y_{act}} - k_{y_{pas}})} \quad (2.91)$$

Un punto natural entre el estado de esfuerzos activo y pasivo se da cuando el coeficiente de empuje cruza el origen en

$$k_{x_0} = k_x^{nat} = 2 \sec^2 \phi_{int} - 1 \quad (2.92)$$

donde $k_{act} \leq k_x^{nat} \leq k_{pas}$ y $k_{act} \leq k_y^{nat} \leq k_{pas}$ para todos los valores de los ángulos de fricción interna. Utilizar el coeficiente de presión lateral de tierra regularizado proporciona estabilidad a la solución numérica dada por el método penalizado de multidominios espectrales (ver Sección 4.3), a diferencia de utilizar el coeficiente de presión lateral como función discontinua (Ecuación 2.80).

2.4. Ecuaciones de gobierno

En esta sección se presentan de forma resumida la ecuaciones integradas en la profundidad de flujos de material desagregado que se obtuvieron a partir de los desarrollos presentados en las Secciones 2.2 y 2.3, y que tienen en cuenta los esfuerzos de los sólidos y el fluido se pueden escribir como:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial h \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (2.93)$$

$$\begin{aligned}
 \rho \left(\frac{\partial h \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial h \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial h \bar{v} \bar{u}}{\partial y} \right) = & -sgn(\bar{u}) \left[\rho g_z h - P_{bed} \left(1 + \frac{\bar{u}^2}{r_x g_z} \right) \right] \tan \phi_{bed} - 3n_f \mu \frac{\bar{u}}{h} \\
 & - h k_{x_{act/pas}} \frac{\partial}{\partial x} (\rho g_z h - P_{bed}) - h \frac{\partial P_{bed}}{\partial x} - n_f \mu h \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} \\
 & - sgn \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) h k_{x_{act/pas}} \frac{\partial}{\partial x} (\rho g_z h - P_{bed}) \sin \phi_{int} + n_f \mu h \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \\
 & + \rho g_x h
 \end{aligned} \tag{2.94}$$

$$\begin{aligned}
 \rho \left(\frac{\partial h \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial h \bar{u} \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial h \bar{v}^2}{\partial y} \right) = & -sgn(\bar{v}) \left[\rho g_z h - P_{bed} \left(1 + \frac{\bar{v}^2}{r_y g_z} \right) \right] \tan \phi_{bed} - 3n_f \mu \frac{\bar{v}}{h} \\
 & - h k_{y_{act/pas}} \frac{\partial}{\partial y} (\rho g_z h - P_{bed}) - h \frac{\partial P_{bed}}{\partial y} - n_f \mu h \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \\
 & - sgn \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) h k_{y_{act/pas}} \frac{\partial}{\partial y} (\rho g_z h - P_{bed}) \sin \phi_{int} + n_f \mu h \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \\
 & + \rho g_y h
 \end{aligned} \tag{2.95}$$

donde $\bar{u}$ y $\bar{v}$ son las velocidades horizontales promedio en la dirección x y y , respectivamente, h es el espesor del flujo, y g es la constante gravitacional. Los términos del lado derecho de las Ecuaciones 2.94 y 2.95 se agrupan de acuerdo al tipo de esfuerzo: la primer línea representa el esfuerzo cortante basal, la segunda línea representa el esfuerzo normal longitudinal, la tercera línea representa el esfuerzo cortante transversal y la cuarta línea representa la fuerza que impulsa el flujo debido a la gravedad. El desarrollo de cada uno de estos términos de esfuerzos tanto de los sólidos como del fluido se presentan detalladamente en las Secciones 2.3.1 y 2.3.2, respectivamente.

2.5. Componente gravitacional

Las ecuaciones de flujos de detritos integradas en la profundidad son escritas en términos de un sistema de coordenadas cartesiano, ortogonal y local en donde la coordenada z es normal a cada trozo del plano sobre el cual la masa desciende. Para un caso de prueba que se presenta en la Sección 5.2.1 donde se tiene un plano inclinado, los componentes de la aceleración gravitacional en la dirección longitudinal, transversal y normal, respectivamente, se describen como:

$$g_x = g \sin \theta, \quad g_y = 0, \quad g_z = -g \cos \theta \tag{2.96}$$

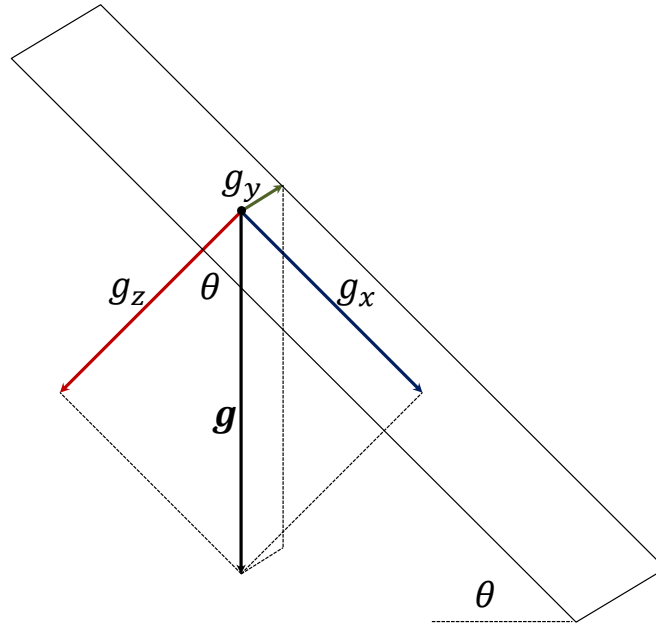


Figura 2.9: Componentes de la aceleración gravitacional en las direcciones x y z , normal al plano sobre el cual la masa desciende.

La descomposición de los componentes gravitacionales es muy importante ya que si se trata del componente vertical de la gravedad (i.e., g_z) hace que a partir de la condición inicial el material pueda caer y redistribuirse en el espacio computacional. Los componentes horizontales de la gravedad (i.e., g_x y g_y) impulsan el material predominantemente en una dirección horizontal (Figura 2.9). La importancia que tiene esta descomposición de la gravedad se puede apreciar de forma más clara en el Capítulo 4.3.

2.6. Discusión

La integración de las ecuaciones de conservación de masa y momentum reduce el número de dimensiones espaciales de tres a dos, para lo cual es necesario suponer que el esfuerzo normal basal es hidrostático, llegando así a la teoría de aguas someras. En los flujos de material desagregado el estado de esfuerzos puede diferir significativamente del estado hidrostático debido a que la aceleración vertical puede cambiar el peso de una masa de material desagregado en movimiento. Para tratar de corregir esta falencia, Denlinger and Iverson (2004) describe una manera de estimar la velocidad vertical media, promediando las velocidades u y v entre la superficie y el lecho.

El uso de un coeficiente de presión lateral de tierras regularizado constante, indica que un bloque de material se mueve pendiente abajo sin divergencia de velocidad, es decir, sin la presencia de adelgazamientos o engrosamientos en el espesor del flujo. Este coeficiente único puede no ser la implementación más apropiada desde el punto de vista físico, ya que la velocidad puede cambiar de un punto a otro de forma considerable como muestra Pudasaini et al. (2005) en algunos experimentos.

En la regularización del coeficiente de presión lateral de tierras discontinuo se utiliza un factor ψ que determina la pendiente de la función de transición. En este trabajo se empleó un valor de ψ de modo que la transición entre los dos estados de esfuerzos, activo y pasivo, fuese lo menos abrupto posible con el fin de asegurar la estabilidad de la solución. Esto crea la necesidad de saber que tan pronunciada debe ser la pendiente de la transición entre los dos estados de esfuerzos. Indicios de respuestas a la pregunta generada anteriormente pueden darse mediante la experimentación y medición del campo de velocidades en el plano como se hace en Pudasaini et al. (2005), donde se muestra con el uso de la técnica llamada “particle image velocimetry” los cambios abruptos de velocidad que se pueden presentar de un punto a otro para flujos granulares.

La integración en la profundidad de las ecuaciones de conservación y el uso del coeficiente de presión lateral de tierras evita el cálculo del tensor de esfuerzos, de modo que facilita la solución del conjunto de ecuaciones y reduce el tiempo computacional requerido para obtener dicha solución. Los trabajos presentados por Denlinger and Iverson (2004) y Hutter et al. (2005) incluyen algunos términos para evaluar la influencia de la velocidad vertical, calcular los esfuerzos de Coulomb conjugados a los desplazamientos en el espacio tridimensional de esfuerzos y utilizan un factor de corrección de momentum que cambia la distribución de material desagregado en el espacio y el tiempo. Estas consideraciones adicionales implican que un modelo bidimensional no es suficiente para obtener una optima predicción de este tipo de flujos, indicando que los supuestos planteados en este tipo de ecuaciones son lo suficientemente importantes para evitar conseguir una predicción precisa.

Modelación analítica de flujos de material desagregado

La solución analítica de la Ecuación 2.94 se puede obtener para una masa de mezcla de Coulomb homogénea con un espesor uniforme ($h = H$) que viaja pendiente abajo sin gradiente de velocidad en la dirección x y y (i.e., la velocidad varía solo con el tiempo y no con el espacio). La presión de poros es constante en el tiempo y el espacio, y el terreno es un plano inclinado. La ecuación de momentum promediada en la profundidad (Ecuación 2.94), se reduce a una ecuación lineal que describe el movimiento traslacional de la masa.

$$\rho \frac{dH\bar{u}}{dt} = -(\rho g_z H - P_{bed}) \tan \phi_{bed} - 3n_f \mu \frac{\bar{u}}{H} + \rho g_x H \quad (3.1)$$

La Ecuación 3.1 se expande mediante el uso de la regla de la derivada de un producto sobre el termino de la derivada local.

$$\rho H \frac{d\bar{u}}{dt} + \rho \bar{u} \frac{dH}{dt} = -(\rho g_z H - P_{bed}) \tan \phi_{bed} - 3n_f \mu \frac{\bar{u}}{H} + \rho g_x H \quad (3.2)$$

Ya que se supone un espesor constante (H), entonces el segundo término del lado izquierdo de la ecuación 3.2 se pueden despreciar.

$$\rho H \frac{d\bar{u}}{dt} = -(\rho g_z H - P_{bed}) \tan \phi_{bed} - 3n_f \mu \frac{\bar{u}}{H} + \rho g_x H \quad (3.3)$$

$$\rho H \frac{d\bar{u}}{dt} = -\rho g_z H \tan \phi_{bed} + \lambda \rho g_z H \tan \phi_{bed} - 3n_f \mu \frac{\bar{u}}{H} + \rho g_x H \quad (3.4)$$

Dividiendo la ecuación entre ρH :

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = -g_z (1 - \lambda) \tan \phi_{bed} - 3 \frac{n_f \mu}{\rho H^2} \bar{u} + g_x \quad (3.5)$$

Reagrupando términos

$$\frac{d\bar{u}}{dt} + 3\frac{n_f\mu}{\rho H^2}\bar{u} = -g_z(1-\lambda)\tan\phi_{bed} + g_x \quad (3.6)$$

Se normaliza por la división entre g_z .

$$\frac{1}{g_z}\frac{d\bar{u}}{dt} + 3\frac{n_f\mu}{\rho g_z H^2}\bar{u} = \frac{g_x}{g_z} - (1-\lambda)\tan\phi_{bed} \quad (3.7)$$

Por el reemplazo de $g_x/g_z = \tan\theta$ en la Ecuación 3.7 se obtiene:

$$\frac{1}{g_z}\frac{d\bar{u}}{dt} + 3\frac{n_f\mu}{\rho g_z H^2}\bar{u} = \tan\theta - (1-\lambda)\tan\phi_{bed} \quad (3.8)$$

$$\frac{1}{g_z}\frac{d\bar{u}}{dt} + 3\frac{n_f\mu}{\rho g_z H^2}\bar{u} = \Theta \quad (3.9)$$

$\Theta = \tan\theta - (1-\lambda)\tan\phi_{bed}$, es el parámetro que representa la fuerza gravitacional normalizada menos la resistencia debida a la fricción basal de Coulomb. Además, Θ es constante si la relación de la presión de poros λ , el ángulo del talud θ y el ángulo de fricción ϕ_{bed} son constantes (Iverson and Denlinger, 2001).

$$\frac{d\bar{u}}{dt} + 3\frac{n_f\mu}{\rho H^2}\bar{u} = g_z\Theta \quad (3.10)$$

3.1. Solución analítica para la velocidad

Con el objetivo de solucionar la Ecuación 3.10 (ecuación diferencial ordinaria de primer orden) los parámetros constantes son agrupados de la siguiente manera:

$$a = 3\frac{n_f\mu}{\rho H^2} \quad \text{y} \quad b = g_z\Theta \quad (3.11)$$

entonces,

$$\frac{d\bar{u}}{dt} + a\bar{u} = b \quad (3.12)$$

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = b - a\bar{u} \quad (3.13)$$

La Ecuación 3.13 se puede solucionar integrando con el método de separación de variables. Reescribiendo la Ecuación 3.13 y separando las variables.

$$\frac{d\bar{u}}{b - a\bar{u}} = dt \quad (3.14)$$

Ahora la Ecuación 3.14 es integrada

$$\int \frac{d\bar{u}}{b - a\bar{u}} = \int dt \quad (3.15)$$

$$-\frac{1}{a} \ln(b - a\bar{u}) = t + C \quad (3.16)$$

$$b - a\bar{u} = e^{-aC} e^{-at} \quad (3.17)$$

$$b - a\bar{u} = A e^{-at} \quad (3.18)$$

donde la nueva constante A es la magnitud e^{-aC} y el mismo signo ($\pm$) que $(b - a)$. Mediante la solución de la Ecuación 3.14 se obtiene la *velocidad instantanea* del flujo de material desagregado, que describe el comportamiento del centro de masa en un tiempo específico.

$$\bar{u} = \frac{b}{a} - \frac{A}{a} e^{-at} \quad (3.19)$$

Para encontrar el valor de la constante A , es necesario reemplazar las condiciones iniciales $\bar{u} = \bar{u}_0$ y $t = 0s$ en la solución general (Ecuación 3.19).

$$\bar{u}_0 = \frac{b}{a} - \frac{A}{a} e^{-a(0)} \quad (3.20)$$

$$A = b - a\bar{u}_0 \quad (3.21)$$

El valor de la constante A (Ecuación 3.21), se reemplaza en la Ecuación 3.19

$$\bar{u} = \frac{b}{a} - \frac{b - a\bar{u}_0}{a} e^{-at} \quad (3.22)$$

$$\bar{u} = \frac{b}{a} - \frac{b}{a} e^{-at} + \bar{u}_0 e^{-at} \quad (3.23)$$

$$\bar{u} = \frac{b}{a} (1 - e^{-at}) + \bar{u}_0 e^{-at} \quad (3.24)$$

Reemplazando las constantes a y b (Ecuaciones 3.11) en la Ecuación 3.24,

$$\bar{u} = \frac{g_z \Theta}{3 \frac{n_f \mu}{\rho H^2}} \left(1 - e^{-\left(3 \frac{n_f \mu}{\rho H^2} \right) t} \right) + \bar{u}_0 e^{-\left(3 \frac{n_f \mu}{\rho H^2} \right) t} \quad (3.25)$$

Finalmente, por la integración de la Ecuación 3.10 se obtiene la solución analítica.

La Ecuación 3.26 es la ecuación de velocidad instantánea del centro de masa del flujo de material desagregado.

$$\bar{u} = \frac{\rho g_z H^2}{3n_f \mu} \Theta \left[1 - e^{\left(-t/\frac{\rho H^2}{3n_f \mu}\right)} \right] + \bar{u}_0 e^{\left(-t/\frac{\rho H^2}{3n_f \mu}\right)} \quad (3.26)$$

Si los esfuerzos generados en las fronteras laterales son insignificantes comparados con los esfuerzos basales, la Ecuación 3.26 describe el movimiento del centro de masa de un cuerpo en deformación así como un cuerpo en traslación. Entonces, incluso si Θ varía como una función arbitraria de la posición y el tiempo, la Ecuación 3.26 se puede usar como una base para el cálculo paso a paso del movimiento del centro de masa de la mezcla de Coulomb ya sea con λ constante o variable (Hutchinson, 1986).

3.2. Solución analítica para la posición espacial

Para encontrar la posición del flujo de material desagregado en un tiempo determinado, la Ecuación 3.24 se reordena y se integra de la siguiente manera.

$$\bar{u} = \frac{b}{a} + \left(\bar{u}_0 - \frac{b}{a} \right) e^{-at} \quad (3.27)$$

$$x = \int \bar{u} dt = \frac{b}{a} t - \frac{1}{a} \left(\bar{u}_0 - \frac{b}{a} \right) e^{-at} + c \quad (3.28)$$

Para encontrar el valor de la constante c , es necesario reemplazar las condiciones iniciales $x = x_0$ y $t = 0$ en la solución general (Ecuación 3.28).

$$x_0 = \frac{b}{a}(0) - \frac{1}{a} \left(\bar{u}_0 - \frac{b}{a} \right) e^{-a(0)} + c \quad (3.29)$$

$$c = x_0 + \frac{1}{a} \left(\bar{u}_0 - \frac{b}{a} \right) \quad (3.30)$$

El valor constante c es reemplazado en la Ecuación 3.28.

$$x = \frac{b}{a} t - \frac{1}{a} \left(\bar{u}_0 - \frac{b}{a} \right) e^{-at} + x_0 + \frac{1}{a} \left(\bar{u}_0 - \frac{b}{a} \right) \quad (3.31)$$

$$x = \frac{b}{a} t - \frac{1}{a} \bar{u}_0 e^{-at} + \frac{b}{a^2} e^{-at} + x_0 + \frac{1}{a} \bar{u}_0 - \frac{b}{a^2} \quad (3.32)$$

$$x = x_0 + \frac{b}{a} t + \frac{1}{a} \bar{u}_0 - \frac{1}{a} \bar{u}_0 e^{-at} - \frac{b}{a^2} + \frac{b}{a^2} e^{-at} \quad (3.33)$$

$$x = x_0 + \frac{b}{a}t + \frac{\bar{u}_0}{a} (1 - e^{-at}) - \frac{b}{a^2} (1 - e^{-at}) \quad (3.34)$$

Después de algunas manipulaciones algebraicas se tiene que:

$$x = x_0 + \frac{b}{a}t + \frac{1}{a} \left(\bar{u}_0 - \frac{b}{a} \right) (1 - e^{-at}) \quad (3.35)$$

Reemplazando las constantes a y b en la Ecuación 3.35:

$$x = x_0 + \frac{g_z \Theta}{3 \frac{n_f \mu}{\rho H^2}} t + \frac{1}{3 \frac{n_f \mu}{\rho H^2}} \left(\bar{u}_0 - \frac{g_z \Theta}{3 \frac{n_f \mu}{\rho H^2}} \right) \left(1 - e^{-\left(3 \frac{n_f \mu}{\rho H^2} \right) t} \right) \quad (3.36)$$

Finalmente, por la integración de la Ecuación 3.28 se obtiene la solución analítica. La Ecuación 3.37 es la ecuación de desplazamiento instantáneo del centro de masa del flujo de material desagregado (DIF).

$$x = x_0 \frac{\rho g_z H^2}{3 n_f \mu} \Theta t + \frac{\rho H^2}{3 n_f \mu} \left[\bar{u}_0 - \frac{\rho g_z H^2}{3 n_f \mu} \Theta \right] \left[1 - e^{-\left(-t / \frac{\rho H^2}{3 n_f \mu} \right)} \right] \quad (3.37)$$

Si Θ varia como una función arbitraria de la posición y el tiempo, las Ecuaciones 3.26 y 3.37 pueden ser empleadas para calcular paso a paso la velocidad y posición del centro de masa de un flujo de material desagregado. Las Ecuaciones 3.26 y 3.37 son utilizadas para obtener la velocidad y posición de un caso de prueba y se comparan con la solución numérica en la Sección 6.2.

Modelación numérica de flujos de material desagregado

La solución numérica de las ecuaciones de gobierno para flujos de material desagregado presentadas en la Sección 2.4 se puede obtener mediante el uso de una técnica de discretización espacial y temporal. Típicamente se han utilizado métodos de bajo orden como diferencias finitas, volúmenes finitos y elementos finitos para la solución de este conjunto de ecuaciones que describen el movimiento de los flujos de material desagregado.

Los primeros intentos por solucionar ecuaciones para flujos de material desagregado fueron dados por Gray et al. (1999); Hutter and Greve (1993); Hutter and Koch (1991); Hutter et al. (1995); Ouyang et al. (2013); Savage and Hutter (1989); Tai et al. (2002); Wieland et al. (1999), mediante el uso de diferentes esquemas de diferencias finitas como two-step explicit finite-difference, MacCormack-TVD y shock-capturing methods [e.g., Non-Oscillatory Central (NOC) y Essentially Non-Oscillatory (ENO)] (Hutter et al., 2005). Otros trabajos (Denlinger and Iverson, 2001, 2004; Koschdon and Schäfer, 2003; Vollmöller, 2004; Wang et al., 2004) han generado soluciones con diferentes esquemas de volúmenes finitos como, Godunov, Riemann solver [e.g., Harten-Lax-vanLeer-Contact (HLLC) y Roe] y total variation diminishing (TVD). También los elementos finitos han sido utilizados para calcular los esfuerzos de Coulomb conjugado a los desplazamientos en el espacio tridimensional de esfuerzos (Denlinger and Iverson, 2004).

Debido a que no se ha reportado el uso de los métodos de alto orden para la solución numérica de las ecuaciones de flujos de material desagregado, en este trabajo soluciona las ecuaciones hiperbólicas que describen estos fenómenos con un método de alto orden que se describe en este capítulo.

4.1. Métodos espectrales

Los métodos espectrales pertenecen a la categoría más amplia de los métodos de residuos ponderados, para el que las aproximaciones se definen en términos de expansiones de series. Muchas ecuaciones de evolución se pueden escribir de forma general como Boyd (2001); Canuto (2006):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = M(u) \quad (4.1)$$

donde $u(\mathbf{x}, t)$ es la variable dependiente, y $M(u)$ es un operador (lineal o no lineal) que contiene todas las derivadas espaciales de u . La Ecuación 4.1 debe ir acompañada con una condición inicial $u(\mathbf{x}, 0)$ y condiciones de contorno adecuadas. La solución aproximada se puede representar como Canuto (2006):

$$u^N = \sum_{k=0}^N u_k \phi_k(x) \quad (4.2)$$

donde $\phi_k(x)$ se denomina la función de prueba (Canuto, 2006).

La diferencia entre los métodos de bajo orden y los métodos de alto orden se encuentra principalmente en el orden de aproximación de las funciones de prueba. Las funciones de prueba para los llamados métodos espectrales clásicos son globales (Canuto, 2006). Los métodos de elementos finitos, el dominio se divide en pequeños elementos y se especifican funciones de prueba de bajo orden (i.e., $N \leq 3$) en cada elemento. Las funciones de prueba para métodos de elementos finitos son por lo tanto de carácter local. Por tanto, los elementos finitos son adecuados para la manipulación de geometrías complejas (Canuto, 2006). Los métodos de diferencias finitas son típicamente vistos desde una perspectiva de aproximación puntual en lugar de una perspectiva de función base de prueba. Sin embargo, cuando se traduce en una formulación adecuada, las funciones base de prueba de diferencias finitas son igualmente local (Canuto, 2006).

Los métodos espectrales se distinguen no sólo por el tipo fundamental del método (Galerkin, colocación, Galerkin con integración numérica, o tau), sino también por la elección particular de las funciones de prueba (Canuto, 2006). La mayor frecuencia funciones de prueba utilizados son polinomios trigonométricos, polinomios de Chebyshev, y polinomios de Legendre que son implementados en este trabajo (Canuto, 2006).

En este trabajo se emplea un método discontinuo de alto orden que consiste en un enfoque de colocación de multidominios basados en subdominios discontinuos, rectangulares, no superpuestos que son conectados de forma débil por las interfaces con un término de penalización (Escobar-Vargas et al., 2012; Hesthaven and Gottlieb, 1996). Esta técnica es llamada método penalizado de multidominios espectrales y su fundamento se presenta en

la Sección 4.3.

4.2. Forma conservativa de las ecuaciones de flujo de material desagregado

El sistema de ecuaciones de flujo de material desagregado se pueden escribir de forma conservativa como

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{q})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{q})}{\partial y} = \mathbf{S}(\mathbf{q}) \quad (4.3)$$

donde $\mathbf{q}$ denota el vector de las variables conservativas, $\mathbf{F}(\mathbf{q})$ y $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ representan los flujos horizontales en la dirección x y y , respectivamente, y $\mathbf{S}(\mathbf{q})$ es el vector que contiene los términos fuente. Al descomponer este sistema de ecuaciones se tiene

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} h \\ m_x \\ m_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} m_x \\ m_x^2/h + \frac{1}{2} \left[(1 - \lambda) k_{x_{act/pas}} + \lambda \right] g_z h^2 \\ m_x m_y / h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ \beta_{xx} F_2 \\ \beta_{yx} F_3 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} m_y \\ m_x m_y / h \\ m_y^2/h + \frac{1}{2} \left[(1 - \lambda) k_{y_{act/pas}} + \lambda \right] g_z h^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1 \\ \beta_{xy} G_2 \\ \beta_{yy} G_3 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ S_x \\ S_y \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

donde las variables conservativas $m_x = h\bar{u}$ y $m_y = h\bar{v}$. S_x y S_y son términos que contienen las fuerzas de los sólidos y el fluido en la dirección x y y , respectivamente, encargados de la disipación de la energía. Los términos que disipan la energía son descritos por las Ecuaciones 4.8 y 4.9.

$$\begin{aligned}
S_x = & g_x h - \operatorname{sgn}(\bar{u})(1 - \lambda) \left(g_z + \bar{u}^2 \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) h \tan \phi_{bed} - \frac{3n_f \mu}{\rho} \frac{\bar{u}}{h} + \frac{n_f \mu h}{\rho} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} \\
& - \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) h k_{x_{act/pas}} \frac{\partial}{\partial y} [g_z h (1 - \lambda)] \sin \phi_{int} + \frac{n_f \mu h}{\rho} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}
S_y = & g_y h - \operatorname{sgn}(\bar{v})(1 - \lambda) \left(g_z + \bar{v}^2 \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) h \tan \phi_{bed} - \frac{3n_f \mu}{\rho} \frac{\bar{v}}{h} + \frac{n_f \mu h}{\rho} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \\
& - \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) h k_{y_{act/pas}} \frac{\partial}{\partial x} [g_z h (1 - \lambda)] \sin \phi_{int} + \frac{n_f \mu h}{\rho} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

$\bar{u}$ y $\bar{v}$ son las velocidades en la dirección x y y , respectivamente, que son determinadas por la definición de las variables conservativas como $\bar{u} = m_x/h$, $\bar{v} = m_y/h$, cuando $h \neq 0$. El cálculo de $\bar{u}$ y $\bar{v}$ son presentados detalladamente en la Sección 4.4.2. $\partial \theta_x / \partial x$ y $\partial \theta_y / \partial y$ representan la variación del ángulo de inclinación θ en función del espacio, que trata de capturar el radio de curvatura de la base topográfica. Los términos de esfuerzos de los sólidos y el fluido son desarrollado de forma detallada en la Sección 2.3.

4.3. Discretización espacial:

Método penalizado de multidominios espectrales

En este trabajo se soluciona el conjunto de ecuaciones de flujos de material desagregado (Ecuación 4.3) con un método numérico en el que el frente de propagación de onda sea no disipativo y no dispersivo. Los esquemas basados en elementos discontinuos con un alto orden de precisión son particularmente atractivos para satisfacer estas necesidades (Escobar-Vargas et al., 2012). Estos sistemas combinan la convergencia exponencial, débil disipación artificial y la dispersión de los métodos espectrales estándar de un solo dominio (Boyd, 2001) con la adaptabilidad espacial de las técnicas de elemento-volúmenes finitos clásicos. La técnica de discretización espacial llamada método penalizado de multidominios espectrales (SMPM) cumple con los requerimientos anteriormente planteados Hesthaven and Gottlieb (1996).

Específicamente, el método penalizado de multidominios espectrales consiste en un enfoque de colocación de multiples dominios discontinuos, rectangulares, no superpuestos que son conectados por un término de penalización que asegura la estabilidad de la solución por la imposición de una continuidad débil en las interfaces de los subdominios (Escobar-Vargas et al., 2012; Hesthaven and Gottlieb, 1996). Teniendo en cuenta las discontinuidades intrínsecas del método y la unión de las interfaces (Figura 4.1), la formulación de este método

espectral se presentará en dos partes, primero el interior de los subdominios (Sección 4.3.1), y en seguida el tratamiento dado en la interfaces verticales y horizontales (Sección 4.3.2).

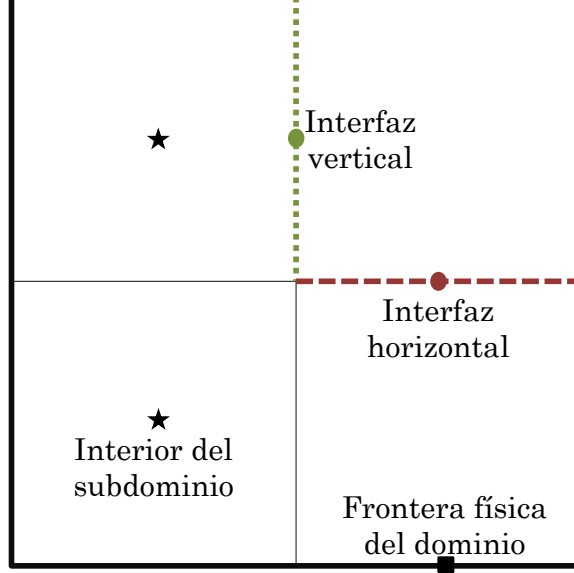


Figura 4.1: Esquema de discretización del dominio dividido en subdominios. La línea continua ancha denota la frontera del dominio computacional, la línea punteada denota la interfaz vertical, la línea discontinua denota la interfaz horizontal. La estrella denota el interior de cada subdominio.

4.3.1. Interior de los subdominios

En el interior de cada subdominio cualquier función $q(x, y, t)$ se puede aproximar por el uso de polinomios de interpolación de Lagrange de N -ésimo orden sobre una malla de Gauss-Lobatto-Legendre (GLL) (Hesthaven and Gottlieb, 1996).

$$q(x, y, t) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N q(x_i, y_j, t) l_i(x) l_j(y) \quad (4.10)$$

donde $q(x_i, y_j, t)$ es el valor de la función en el punto discreto (x_i, y_j) , y $l_i(x)$, $l_j(y)$ es el i -ésimo y j -ésimo polinomio de interpolación de Lagrange basado sobre los nodos de GLL en las direcciones x y y , respectivamente. Las derivadas espaciales en la dirección x en el sistema de coordenadas se aproxima como,

$$\frac{\partial q(x_i, y_j, t)}{\partial x} = \frac{\partial q(x_i, y_j, t)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \sum_{k=0}^N D_{ik} q(x_k, y_j, t) \quad (4.11)$$

$\partial\xi/\partial x$ representa el mapeo del sistema de coordenadas local $\xi \in [-1, 1]$ dado por los puntos de GLL en el sistema de coordenadas global $x \in \mathbf{R}$, donde se supone que $x = x(\xi)$ y $\xi = \xi(x)$ con $\eta \neq \eta(x)$. $D_{i,k}$ es la matriz de diferenciación espectral del Legendre que es calculada como en Costa and Don (2000). La n -ésima derivada es aproximada de una manera similar. Los polinomios de Legendre se presentan detalladamente en el Apéndice A.

4.3.2. Tratamiento de las interfaces

La unión de los subdominios discontinuos no superpuestos se da mediante la penalización de los puntos de colocación localizados a lo largo de las fronteras de cada subdominio (Figura 4.2).

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial F(q)}{\partial x} + \frac{\partial G(q)}{\partial y} = S(q) \\ + \tau_1 Q(x)[F^+(q) - F^+(q^*)] \\ + \tau_2 Q(x)[F^-(q) - F^-(q^*)] \\ + \tau_3 Q(x)[G^+(q) - G^+(q^*)] \\ + \tau_4 Q(x)[G^-(q) - G^-(q^*)] \end{aligned} \quad (4.12)$$

donde $\tau_i (i = 1, \dots, 4)$ es el coeficiente de penalización, $Q(x)$ actúa como una función delta Dirac que es diferente de cero solamente en las interfaces de los subdominios donde el término de penalización se activa y $F^\pm(q)$, $G^\pm(q)$, $F^\pm(q^*)$, y $G^\pm(q^*)$ representan los flujos positivos y negativos en los puntos de la malla sobre las interfaces de los subdominios ($*$ indica el punto correspondiente sobre la interfaz vecina) sobre el subdominio bajo consideración (Escobar-Vargas et al., 2012). En un sentido general, los coeficientes de penalización se pueden ver como factores de peso para los flujos positivos y negativos a través de las interfaces (Escobar-Vargas et al., 2012).

La forma penalizada de las ecuaciones de flujo de material desagregado se presentan para el caso de mallas cuadriláteras estructuradas con subdominios rectangulares, donde el tratamiento para las interfaces verticales se determina por los flujos horizontales $\partial F/\partial x$, y para las interfaces horizontales por los flujos verticales $\partial G/\partial y$. Embebidos en los coeficientes de penalización τ_i ($i = 1, \dots, 4$) están los factores de mapeo para permitir la coherencia en unidades entre los diferentes términos de la Ecuación 4.12.

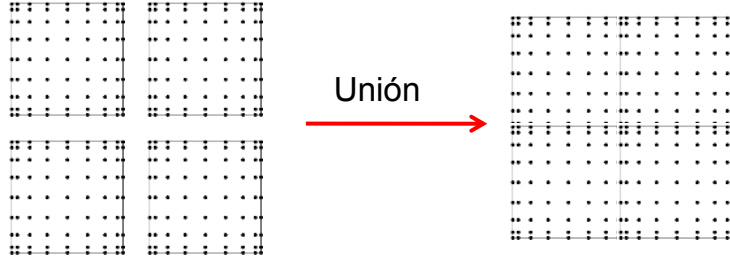


Figura 4.2: Unión de 4 subdominios discontinuos.

4.3.2.1. Interfaces verticales

La Figura 4.3 presenta un esquema de las interfaces verticales entre los subdominios I y II, donde L o R representa cualquier punto de colocación en los bordes izquierdo y derecho de la interfaz. La forma penalizada de las ecuaciones de flujo de material desagregado para un punto localizado en el borde izquierdo de la interfaz es,

$$\frac{\partial q^L}{\partial t} + \frac{\partial F^L}{\partial x} + \frac{\partial G^L}{\partial y} = S(q)^L + \tau_1 Q_L[(F^+)^L - (F^+)^R] + \tau_2 Q_L[(F^-)^L - (F^-)^R] \quad (4.13)$$

Para un punto a lo largo del borde derecho de la interfaz, la forma penalizada es

$$\frac{\partial q^R}{\partial t} + \frac{\partial F^R}{\partial x} + \frac{\partial G^R}{\partial y} = S(q)^R + \tau_5 Q_R[(F^+)^R - (F^+)^L] + \tau_6 Q_R[(F^-)^R - (F^-)^L] \quad (4.14)$$

En la Ecuación 4.14 τ_5 y τ_6 es el correspondiente coeficiente de penalización para el borde derecho de la interfaz.

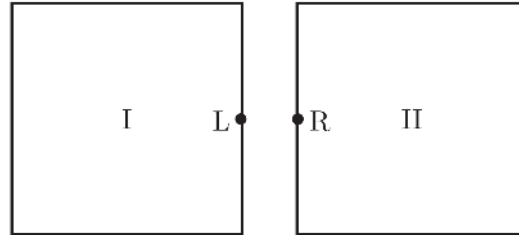


Figura 4.3: Interfaz vertical (Escobar-Vargas et al., 2012).

4.3.2.2. Interfaces horizontales

La Figura 4.4 presenta un esquema de las interfaces horizontales entre los subdominios I y III. En este caso, B y T representa los puntos de colocación a lo largo del borde superior e inferior de la interfaz. La ecuación de penalización para los puntos localizados en el borde inferior de la interfaz horizontal es

$$\frac{\partial q^B}{\partial t} + \frac{\partial F^B}{\partial x} + \frac{\partial G^B}{\partial y} = S(q)^B + \tau_3 Q_B[(G^+)^B - (G^+)^T] + \tau_4 Q_B[(G^-)^B - (G^-)^T] \quad (4.15)$$

Para un punto a lo largo del borde superior de la interfaz, la forma penalizada es

$$\frac{\partial q^T}{\partial t} + \frac{\partial F^T}{\partial x} + \frac{\partial G^T}{\partial y} = S(q)^T + \tau_7 Q_T[(G^+)^T - (G^+)^B] + \tau_8 Q_T[(G^-)^T - (G^-)^B] \quad (4.16)$$

En la Ecuación 4.16 τ_7 y τ_8 es el coeficiente de penalización para el borde superior de la interfaz.

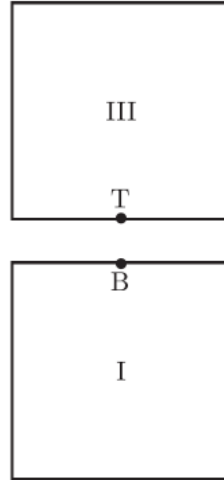


Figura 4.4: Interfaz horizontal (Escobar-Vargas et al., 2012).

4.3.2.3. Implementación en este trabajo

En este trabajo se implementa el método del promedio de modo que se toman los coeficientes de penalización para flujos positivos y negativos en los lados de las interfaces para que sean iguales (Escobar-Vargas et al., 2012). Lo anterior lleva a

$$\tau_L = \tau_1 = \tau_2 = \frac{1}{2\omega} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{\omega \Delta x} \quad (4.17)$$

$$\tau_B = \tau_3 = \tau_4 = \frac{1}{2\omega} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{\omega \Delta y} \quad (4.18)$$

$$\tau_R = \tau_5 = \tau_6 = \frac{1}{2\omega} \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{1}{\omega \Delta x} \quad (4.19)$$

$$\tau_T = \tau_7 = \tau_8 = \frac{1}{2\omega} \frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{1}{\omega \Delta y} \quad (4.20)$$

donde $\partial \xi / \partial x$, $\partial \eta / \partial y$ son los factores de mapeo para los términos de penalización actuando sobre las interfaces vertical y horizontal, respectivamente.

Las ecuaciones de flujo de material desagregado penalizadas se pueden reescribir de acuerdo con cada posible orientación de las interfaces de subdominio:

Interfaces verticales

El borde izquierdo de la interfaz es

$$\frac{\partial q^L}{\partial t} + \frac{\partial F^L}{\partial x} + \frac{\partial G^L}{\partial y} = S(q)^L + \tau_L Q_L [F^L - F^R] \quad (4.21)$$

El borde derecho de la interfaz es

$$\frac{\partial q^R}{\partial t} + \frac{\partial F^R}{\partial x} + \frac{\partial G^R}{\partial y} = S(q)^R + \tau_R Q_R [F^R - F^L] \quad (4.22)$$

Interfaces horizontales

El borde inferior de la interfaz es

$$\frac{\partial q^B}{\partial t} + \frac{\partial F^B}{\partial x} + \frac{\partial G^B}{\partial y} = S(q)^B + \tau_B Q_B [G^B - G^T] \quad (4.23)$$

El borde superior de la interfaz es

$$\frac{\partial q^T}{\partial t} + \frac{\partial F^T}{\partial x} + \frac{\partial G^T}{\partial y} = S(q)^T + \tau_T Q_T [G^T - G^B] \quad (4.24)$$

A diferencia de Hesthaven and Gottlieb (1996) en este esquema no se utiliza una formulación especial para las esquinas, que simplemente se tratan como puntos que pertenecen a dos bordes de la misma ortogonal. Este enfoque simplificado es más estable que la derivación

teórica (Escobar-Vargas et al., 2012).

4.3.2.4. Representación compacta del SMPM

Escobar-Vargas et al. (2012) escribe una forma compacta de las Ecuaciones 4.21 a la 4.24.

$$\frac{\partial q^e}{\partial t} + \frac{\partial F^e}{\partial x} + \frac{\partial G^e}{\partial y} = S(q)^e + \sum_{i=1}^4 \hat{\tau}_e Q_e n^{(e,l)} \cdot [F^e - F^l] \quad (4.25)$$

donde $n^{(e,l)}$ es el vector unitario que apunta hacia afuera en la dirección de volumen de control de e a l y $\hat{\tau}_e$ es el coeficiente de penalización, que se puede escribir como

$$\hat{\tau} \equiv |\tau| = \frac{1}{\omega \Delta s} \quad (4.26)$$

ω son los pesos de la cuadratura GLL asignados a los puntos a lo largo de las interfaces de la izquierda, derecha, arriba y abajo. Para un orden uniforme de aproximación polinómica, N , en cada subdominio se puede utilizar un único valor de $\omega = 2/N(N+1)$ y $\Delta s = (\Delta x, \Delta y)$ depende de la orientación de las interfaces del subdominio.

4.4. Condiciones de frontera

En esta sección se presenta el tratamiento de las fronteras del dominio computacional y el tratamiento en la frontera entre zonas en las que hay y no hay material granular.

4.4.1. Fronteras del dominio computacional

4.4.1.1. Condiciones de frontera reflectivas y deslizantes

Las condiciones de fronteras en la dirección perpendicular a cada pared del dominio computacional se imponen como reflectivas, es decir, el vector de velocidades es $\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} = 0$, donde $\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}, \bar{v})$ (Figura 4.5). Esta condición permite obtener las velocidades en la dirección paralela al flujo, que en adelante se denomina como *deslizante* (Figura 4.5).

Las condiciones reflectivas son adecuadas para las fronteras que restringen el flujo en la dirección y , debido a las paredes laterales del canal ($\bar{v} = 0$, Figura 4.5). Mientras que las condiciones reflectivas para las fronteras que restringen el flujo en la dirección x ($\bar{u} = 0$, Figura 4.5) pueden no ser las más apropiadas. Si el flujo no se detiene antes de chocar con la pared del lado derecho es necesario extender el dominio en la dirección x para poder capturar la forma del depósito del material desagregado (tal como se hizo en este trabajo).

Las condiciones reflectivas en la frontera derecha tienen más sentido si se quiere capturar el comportamiento de choque y forma del depósito del flujo de material desagregado

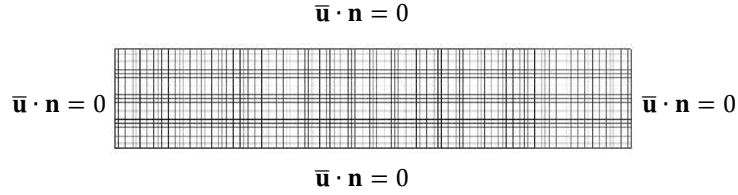


Figura 4.5: Condiciones de frontera reflectivas y deslizantes.

contra un muro de contención inamovible (e.g., muros para el control de flujos de material desagregado). Con esto también se podría analizar la aceleración y los esfuerzos justo antes de chocar contra la pared.

4.4.1.2. Condiciones de frontera reflectivas y antideslizantes

La condición de frontera denominada *antideslizante* consiste en que el vector de velocidad en las fronteras superior e inferior se impone como cero, es decir, aun cuando el material esta en movimiento $\bar{\mathbf{u}} = 0$ (Figura 4.6).

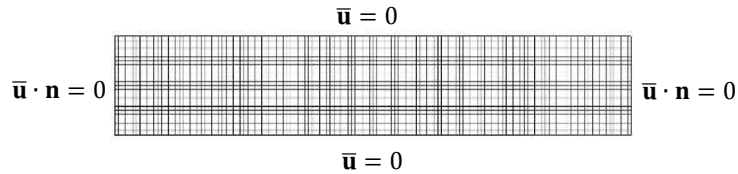


Figura 4.6: Condiciones de frontera reflectivas y antideslizantes.

4.4.2. Seguimiento a la frontera del flujo

Para la solución de la ecuaciones de flujos de material desagregado se debe definir un seguimiento en las fronteras del dominio del flujo, es decir, entre puntos con material ($z = b$), y puntos sin material ($z = h$). Las velocidades $\bar{u}$ y $\bar{v}$ en la dirección x y y , respectivamente, son determinadas por la definición de las variables conservativas (Ecuación 4.27).

$$\bar{u} = m_x/h, \quad \bar{v} = m_y/h, \quad \text{para} \quad h \neq 0 \quad (4.27)$$

En las ecuaciones de aguas someras la altura h se define como $h = H_o + \gamma$, en donde

H_o es la profundidad promedio y γ es el desplazamiento de la superficie libre. El uso de una profundidad promedio permite la presencia de oscilaciones negativas que no pueden suceder en zonas secas (h). En el caso de las ecuaciones de flujos de material desagregado $H_o = 0$, por lo que $h = \gamma$. Para las ecuaciones de flujos de material desagregado en las zonas en donde no hay material ($h = 0$) la solución del sistema de ecuaciones en forma conservativa genera una indeterminación matemática (i.e., división por cero). Para evitar la indeterminación matemática se tiene principalmente dos opciones.

- Una primera opción es la adición de una capa muy delgada de material sobre todo el dominio computacional (Pudasaini and Hutter, 2007). Esta elección genera hundimientos y levantamientos pronunciados sobre las fronteras izquierda y derecha del dominio a medida que se da la solución en cada paso de tiempo. Esto es debido a la aplicación del componente de la fuerza gravitacional horizontal (i.e., g_x) sobre la delgada capa de material que se encuentra en todo el dominio.
- La segunda alternativa es configurar todas las variables físicas como iguales a cero fuera del dominio del flujo, es decir, el esquema conservativo (Ecuación 4.3) sufre una solución trivial, $0 = 0$, cuando $h = 0$ para la ecuación de conservación de momentum (Pudasaini and Hutter, 2007). Para mantener una solución estable, es necesario definir una tolerancia τ y las nuevas velocidades son calculadas en puntos que tengan material solo si $h^{n+1} > \tau$ (Bradford and Sanders, 2002). En este trabajo se utilizó un valor de tolerancia $\tau = 10^{-4}$. Esta elección es mucho mejor para resolver el conjunto de ecuaciones conservativas con el método penalizado de multidominios espectrales, evitando los hundimientos y levantamientos en las fronteras que se generan con la primer opción.

4.5. Discretización temporal: Runge-Kutta

La derivada temporal presentada en la Ecuación 4.3 se pueden integrar mediante el uso de técnicas de paso de tiempo estándar como los métodos de varios pasos lineales o el método de Runge-Kutta. El análisis de estabilidad estándar para los solucionadores de tales sistemas en general se centra en la estabilidad lineal. Este tipo de análisis es adecuado cuando las soluciones deseadas son suaves. Sin embargo, las soluciones de ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas no pueden ser suaves, ya que se pueden desarrollar ondas de choque o cualquier otro comportamiento discontinuo incluso a partir de una condición inicial suave (Spiteri and Ruuth, 2002).

En tales casos, las discretizaciones estándar basadas en el análisis de estabilidad lineal sufren de bajo rendimiento debido a la presencia de oscilaciones indeseadas, sobreimpulsos

y manchas progresivas. Las soluciones numéricas obtenidas a partir de estas discretizaciones a menudo presentan una forma débil de inestabilidad (inestabilidad no lineal) que resulta en un comportamiento no físico y son un precursor para que la solución numérica se convierta en completamente inestable (Spiteri and Ruuth, 2002).

Para resolver este problema, Spiteri and Ruuth (2002) desarrollaron, implementaron y analizaron una nueva clase óptima de Runge-Kutta de preservación de estabilidad fuerte (SSP-RK) que tiene una propiedad de estabilidad no lineal que lo hace particularmente adecuado para la integración de leyes de conservación hiperbólicas donde se presentan comportamientos discontinuos. Así, se logra mantener la precisión de alto orden que brinda el método penalizado de multidominio espectrales y la selección del tamaño de paso de tiempo se puede basar más en los requisitos de precisión, en lugar de los requisitos de estabilidad.

4.5.1. Runge-Kutta de preservación de estabilidad fuerte (SSP-RK)

El método de discretización temporal explícito implementado aquí evita el costo de los solucionadores de sistemas de ecuaciones no lineales en cada paso.

Considere el siguiente problema de valor inicial,

$$\frac{dq}{dt} = R(q) \quad (4.28)$$

Donde la Ecuación 4.28 se ha discretizado en sus variables espaciales con el método penalizado de multidominios espectrales. La predicción en el tiempo $n + 1$ se basa en la solución existente en el tiempo n y el termino de fuerza $R(q)$. El esquema se puede escribir como se presenta en Spiteri and Ruuth (2002):

$$q^0 = q^n \quad (4.29)$$

$$q^i = \sum_{k=0}^{i-1} \left[\alpha_{i,k} q^k + \Delta t \beta_{i,k} R(q^k) \right], \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4.30)$$

$$q^{n+1} = q^m \quad (4.31)$$

La consistencia requiere que $\sum_{k=0}^{i-1} \alpha_{i,k} = 1$. m es el número de etapas del enfoque SSP-RK, $\alpha_{i,k}$ y $\beta_{i,k}$ son coeficientes constantes que $\alpha_{i,k} \geq 0$, y $\alpha_{i,k} = 0$ solo si $\beta_{i,k} = 0$ y Δt es el tamaño de paso de tiempo en un tiempo específico (Spiteri and Ruuth, 2002).

Por ejemplo, el esquema óptimo de la clase de métodos de cuarto orden con cinco evaluaciones de las funciones generales es el esquema SSP-RK(5,4) (Gottlieb, 2005; Ruuth, 2006; Spiteri and Ruuth, 2002), que puede escribirse como:

$$\begin{aligned}
q^{(1)} &= q^n + 0,391752226571890\Delta t R(q^n), \\
q^{(2)} &= 0,444370493651235q^n + 0,555629506348765q^{(1)} + 0,368410593050371\Delta t R(q^{(1)}), \\
q^{(3)} &= 0,620101851488403q^n + 0,379898148511597q^{(2)} + 0,251891774271694\Delta t R(q^{(2)}), \\
q^{(4)} &= 0,178079954393132q^n + 0,821920045606868q^{(3)} + 0,544974750228521\Delta t R(q^{(3)}), \\
q^{n+1} &= 0,517231671970585q^{(2)} + 0,096059710526147q^{(3)} + 0,063692468666290\Delta t R(q^{(3)}) \\
&\quad + 0,386708617503269q^4 + 0,226007483236906\Delta t R(q^{(4)})
\end{aligned} \tag{4.32}$$

SSP-RK(5,4) es superior al esquema Runge-Kutta de cuarto orden clásico (i.e., no SSP), con más de un 40 % de mejora en la restricción de paso de tiempo, los mejores esquemas de SSP-RK superan a los esquemas clásicos cuando surgen discontinuidades en la solución. Los resultados que confirman esta descripción son representados en la Figura 4.2 de Spiteri and Ruuth (2002).

4.6. Técnica de estabilización

En el tratamiento interfacial del método penalizado de multidominios espectrales no existe un término disipativo que elimine las oscilaciones de alto número de onda indeseadas que se desarrollan en las simulaciones no lineales (Escobar-Vargas et al., 2012). La estabilidad de la solución numérica de las ecuaciones de flujo de material desagregado en presencia de oscilaciones indeseadas desarrolladas por altas pendientes en la solución se garantiza por el uso de un filtro espectral (Blackburn and Schmidt, 2003).

Para solucionar las ecuaciones de flujo de material desagregado a través del método penalizado de multidominios espectrales se usa una expansión nodal de la solución u , de la forma

$$u(x) = \sum_{k=0}^N u(x_k) l_k(x) \tag{4.33}$$

donde $l_k(x)$ es el k -ésimo orden de la función nodal (también llamadas funciones cardinales), generalmente de tipo Lagrange y N es el grado de la interpolación. Sin embargo, se quiere filtrar los coeficientes modales de la solución como se encuentra en la expansión.

$$u(x) = \sum_{k=0}^N \tilde{u}_k P_k(x) \tag{4.34}$$

$P_k(x)$ representa el k -ésimo orden de las funciones base, en este caso los polinomios de

Legendre y $\tilde{u}_k$ son los coeficientes de expansión. La solución filtrada será de la forma

$$u^f(x) = \sum_{k=0}^N \sigma_k \tilde{u}_k P_k(x) \quad (4.35)$$

donde σ_k es una función filtro espectral discreta típica de orden P . Una función de filtro comúnmente utilizada que se da por una exponencial es

$$\sigma_k = \exp \left[-\alpha \left(\frac{k-1}{N-1} \right)^P \right] \quad (4.36)$$

El parámetro α mide la modificación del modo máximo. Típicamente, $\alpha = -\ln \epsilon_m$ y ϵ_m es la precisión de la maquina (i.e., $\epsilon_m \sim 10^{-16}$) (Hesthaven and Kirby, 2008). Si se disminuye α implica una pequeña modificación de los altos modos. La Figura 4.7 muestra los valores de filtro con el incremento de P dados por la Ecuación 4.36.

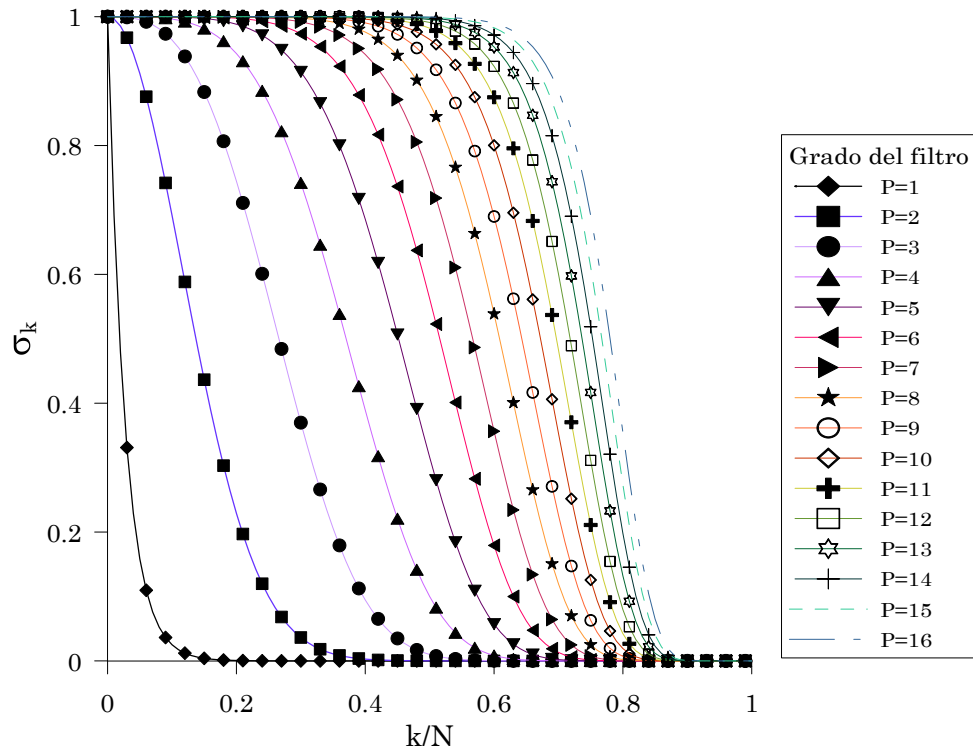


Figura 4.7: Función exponencial del filtro para diferentes valores de P .

4.7. Condición de estabilidad

Un método numérico puede ser convergente sólo si su dominio numérico de dependencia contiene el verdadero dominio de dependencia de las ecuaciones diferenciales parciales, al menos en el límite cuando Δt y Δx tienden a cero (LeVeque, 2002). Es muy importante tener en cuenta que la condición de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) es sólo una condición necesaria para la estabilidad, y por tanto, para la convergencia de la solución numérica (LeVeque, 2002). Aunque no siempre es suficiente para garantizar la estabilidad. En la Sección 4.6 se presentó una técnica de estabilización para filtrar las oscilaciones indeseadas generadas por las discontinuidades que se pueden desarrollar en los frentes de flujo y que son precursores a la inestabilización de la solución.

Para calcular el CFL se utiliza una técnica de celda de alto orden, donde las celdas se definen basadas sobre los puntos de Gauss-Lobatto-Legendre sobre cada subdominio (Escobar-Vargas et al., 2012). Se define una velocidad y altura media en el centro de cada celda (Giraldo and Warburton, 2008). Con esas consideraciones, el número de Courant se define como

$$\text{CFL} = \max \left(\frac{\Delta t (U + \sqrt{\Phi})}{\Delta S} \right) \quad (4.37)$$

donde Δt es el tamaño del paso de tiempo, U es la magnitud de la velocidad media en la celda, $\Phi = gh$ es la altura geopotencial promedio en la celda y $\Delta S = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ es el espaciamiento de la malla. La suma de $U + \sqrt{\Phi}$ es conocida como la velocidad característica a la cual se desplaza la onda (LeVeque, 2002). Para el método penalizado de multidomios espectrales, el máximo número de Courant Δt que asegura la estabilidad de la simulación numérica es 1 (i.e., número de Courant ≤ 1) (Escobar-Vargas et al., 2012).

4.8. Conservación de masa y energía

La forma para determinar el error introducido por el método numérico es a través de la conservación de la masa que se tiene inicialmente. La masa (M) y la energía (E) del sistema se puede calcular con las Ecuaciones 4.38 y 4.39, respectivamente.

$$M = \int_{\Omega} h d\Omega \quad (4.38)$$

$$E = \int_{\Omega} [\Phi(u^2 + v^2) + \Phi^2] d\Omega \quad (4.39)$$

La métrica para la evaluación de la conservación de masa y energía se basa en el error relativo, definido con respecto a los valores iniciales correspondientes de M y E . Esto se

calcula como

$$R_M = \left| \frac{M_t - M_0}{M_0} \right|, \quad R_E = \left| \frac{E_t - E_0}{E_0} \right| \quad (4.40)$$

donde R_M y R_E son los errores relativos en la masa y la energía, y M_0 , E_0 , M_t , E_t son los correspondientes valores para la masa y la energía en el tiempo inicial y final de la simulación, respectivamente. Para cada caso de prueba, se especifica de forma explícita si la masa y la energía se pierde o se genera al final de la simulación.

4.9. Velocidad del centro de masa

En esta sección se presentan dos alternativas para calcular la velocidad y posición del centro de masa de la solución numérica generada por el método penalizado de multidominios espectrales. El cálculo de la velocidad del centro de masa permite comparar la velocidad y posición del centro de masa dada por la solución numérica del conjunto de ecuaciones bidimensional (Sección 4.2, Ecuación 4.3) con la velocidad y posición del centro de masa dado por la soluciones analíticas unidimensionales (Capítulo 3, Ecuaciones 3.26 y 3.37). A continuación se presenta las dos forma de calcular la velocidad del centro de masa de la solución numérica:

- **a)** La primer forma de calcular la velocidad del centro de masa $\hat{\mathbf{u}}_c$ es mediante la integración de la ecuación de movimiento (Pudasaini and Hutter, 2007).

$$\frac{d\hat{\mathbf{X}}_c}{dt} = \hat{\mathbf{u}}_c \quad (4.41)$$

donde $\hat{\mathbf{X}}_c = (\hat{x}_c, \hat{y}_c)$ es la posición del centro de masa dado por

$$\hat{\mathbf{X}}_c = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{x} dV \quad (4.42)$$

V es el volumen total de la masa en movimiento y $\mathbf{x} = (x, y)$. Solo para un componente de la velocidad del centro de masa se describe como

$$\frac{d\hat{x}_c}{dt} = \hat{u}_c \quad (4.43)$$

- **b)** La segunda forma de encontrar la velocidad del centro de masa, con el fin de simplificar la ecuación que describe el movimiento del centro de masa del flujo, se define como el centro del campo de velocidades promedio (Pudasaini and Hutter, 2007).

$$\hat{\mathbf{u}}_c = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{u} dV \quad (4.44)$$

donde $\hat{\mathbf{u}}_c = (\hat{u}_c, \hat{v}_c)$ es la velocidad promedio del centro de masa (Pudasaini and Hutter, 2007). Solo para un componente de la velocidad del centro de masa se da como

$$\hat{u}_c = \frac{1}{V} \int_V u dV \quad (4.45)$$

Las Ecuaciones 4.43 y 4.45 son las dos formas de calcular la velocidad del centro de masa de un flujo de material desagregado que se implementaron en este trabajo para ser comparadas con la solución analítica. La comparación entre la solución numérica y analítica se presenta en la Sección 6.2.

4.10. Esquema general del código computacional

Para desarrollar el programa que soluciona las ecuaciones de flujos de material desagregado se utilizó un código que soluciona las ecuaciones de aguas someras escrito por Escobar-Vargas (2012) en el lenguaje de programación FORTRAN 90. La estructura del programa que soluciona las ecuaciones de flujos de material desagregado se encuentra condensado en la Figura 4.8. Adicional al código existente, se introdujo los parámetros físicos y geométricos del modelo matemático de las ecuaciones de flujos de material desagregado con los términos fuente para poder solucionar los casos de prueba estudiados en este trabajo (para más detalles de los parámetros físicos y geométricos ver Capítulo 2). Los parámetros de entrada del método numérico son los siguiente: N es el grado del polinomio, Sub_x es el número de subdominios en la dirección x , Sub_y es el número de subdominios en la dirección y , P_{modos} es el número de modos a conservar intactos, CFL_0 es la condición de Courant inicial y U_{max} es una velocidad máxima inicial que permiten calcular el δt , y t_f es el tiempo final de la solución (Figura 4.8).

A continuación se presenta el diagrama de flujo del programa que solución las ecuaciones de flujo de material desagregado.

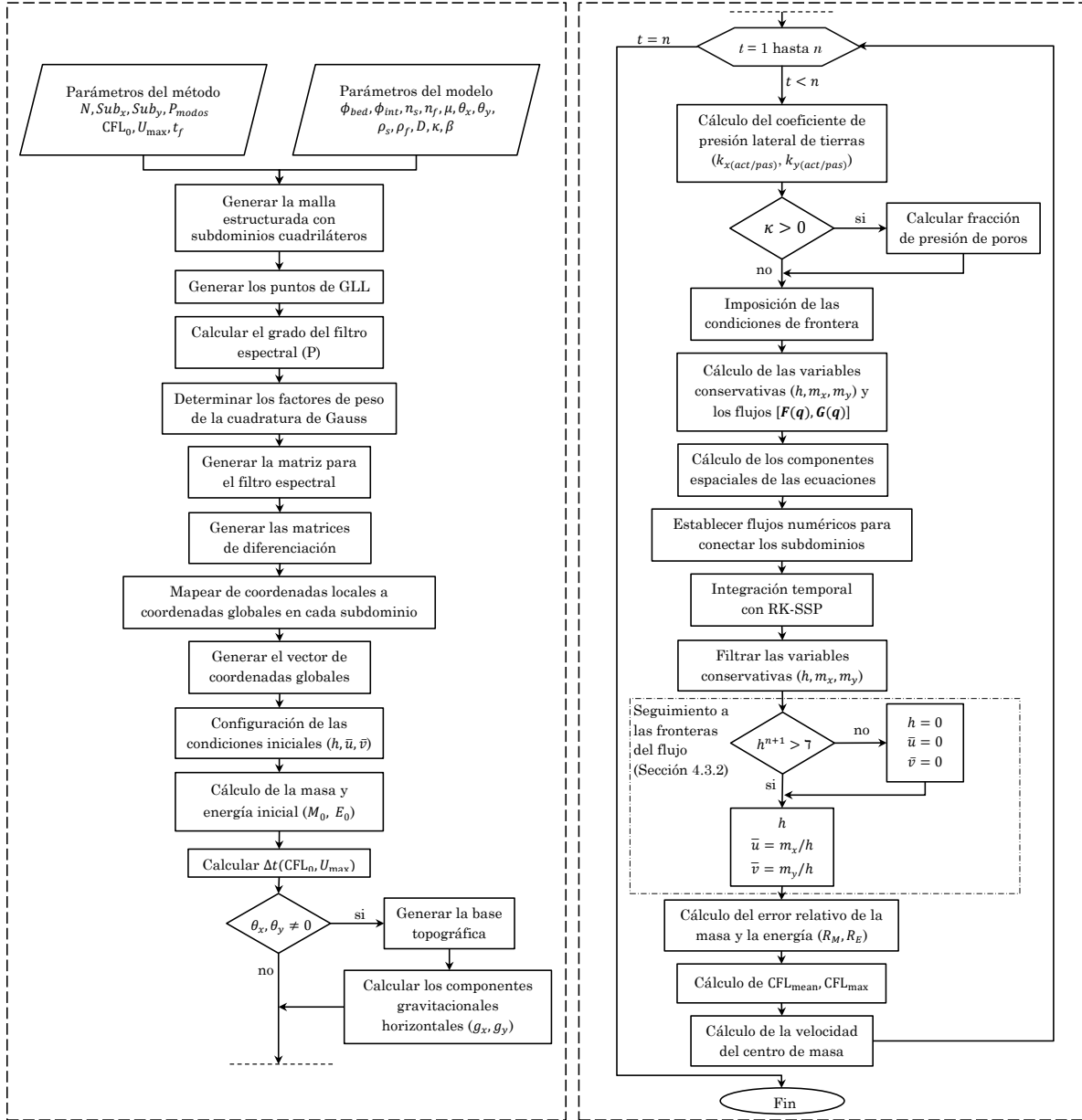


Figura 4.8: Diagrama de flujo del programa computacional.

También se introdujo una subrutina que calcula el grado del filtro a partir del parámetro de entrada P_{modos} , que indica cuantos modos se quieren conservar intactos, los demás serán filtrados como se indica en la Sección 4.6. Otras subrutinas introducidas adicionalmente permiten generar la base topográfica para el caso del flujo granular, el cálculo de los componentes horizontales de la gravedad de acuerdo con la base topográfica, la condición inicial establecida para el flujo granular. Una vez se ingresa al bucle temporal fue necesario

subrutinas para calcular en cada instante de tiempo del coeficiente de presión lateral de tierras constante y regularizado, y el cálculo de la fracción de presión de poros. Además, la imposición de las condiciones de frontera, la imposición de un factor de tolerancia que permite calcular las velocidades primitivas $\bar{u} = m_x/h$ y $\bar{v} = m_y/h$, permiten solucionar de forma adecuada el caso de flujo granular que se presenta en la Sección 5.1.1. Finalmente se introdujo una subrutina que permite calcular la posición y velocidad del centro de la masa de la solución numérica en cada instante de tiempo.

Casos de prueba

5.1. Configuración física

En este capítulo se presentan los datos de un experimento denominado flujo granular de aquí en adelante. Este experimento de laboratorio se llevó a cabo en “Cascade Volcano Observatory of the United States Geological Survey” (USGS) y los datos tomados se presentan en Denlinger and Iverson (2001). La Tabla 5.1 muestra las propiedades de los materiales utilizados en los experimentos y en la simulación numérica y analítica presentadas en este trabajo.

Tabla 5.1: Propiedades de los materiales del experimento utilizados para la simulación numérica y analítica.

Propiedades o parámetros	Unidades	Flujo granular experimento
Ángulo de fricción basal	$\phi_{bed}(\text{gra})$	29 ± 1.4
Ángulo de fricción interna	$\phi_{int}(\text{gra})$	40 ± 1.0
Fracción de volumen de sólidos	n_s	0.6
Fracción de volumen de fluido	n_f	0.4
Viscosidad del fluido	$\mu(\text{Pa}\cdot\text{s})$	2×10^{-5}
Densidad de los sólidos	$\rho_s(\text{kg}/\text{m}^3)$	2650 (cuarzo)
Densidad del fluido	$\rho_f(\text{kg}/\text{m}^3)$	1 (aire)
Densidad de la mezcla	$\rho(\text{kg}/\text{m}^3)$	1600
Difusividad hidráulica	$D(\text{m}^2/\text{s})$	0.05
Presión de poros inicial	κ	0.0

Tomado de Denlinger and Iverson (2001).

5.1.1. Experimento de flujo granular

Denlinger and Iverson (2001) presenta el experimento de pequeña escala de la avalancha granular seca. Se empleó un canal rectangular con una inclinación lecho de $31,4^\circ$, unido a través de una sección curvada con un radio de curvatura de 10 cm a una superficie horizontal. En cada experimento se utilizó arena de cuarzo seca con diámetros de grano de 0.5 mm. La disposición de la arena inicialmente es detrás de una compuerta vertical ubicada a 62.5 cm pendiente abajo (Figura 5.1). La disposición de la arena tiene forma de cono triangular (i.e, en forma de cuña) con una superficie horizontal y después se descarga de repente por la apertura de una compuerta con resorte. La compuerta tiene el ancho total del canal de 20 cm de ancho (Figura 5.1).

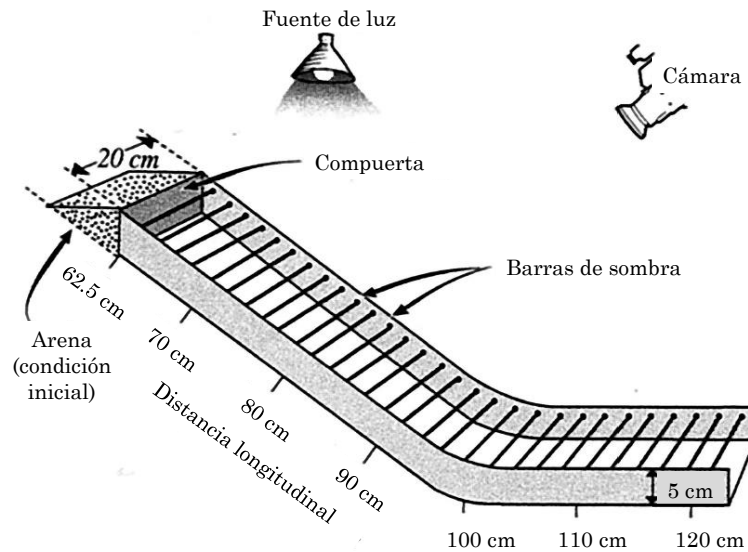


Figura 5.1: Esquema del canal artificial de pequeña escala utilizado para ejecutar experimentos de flujos de arena seca. La distancia entre la fuente de luz, cámara, y el canal artificial es de ~ 2 m, y no se muestran a escala Denlinger and Iverson (2001).

La Figura 5.2 presenta las isopacas del espesor de la arena normal al lecho para 5 instantes de tiempo medidos en el experimento mostrado en la Figura 5.1.

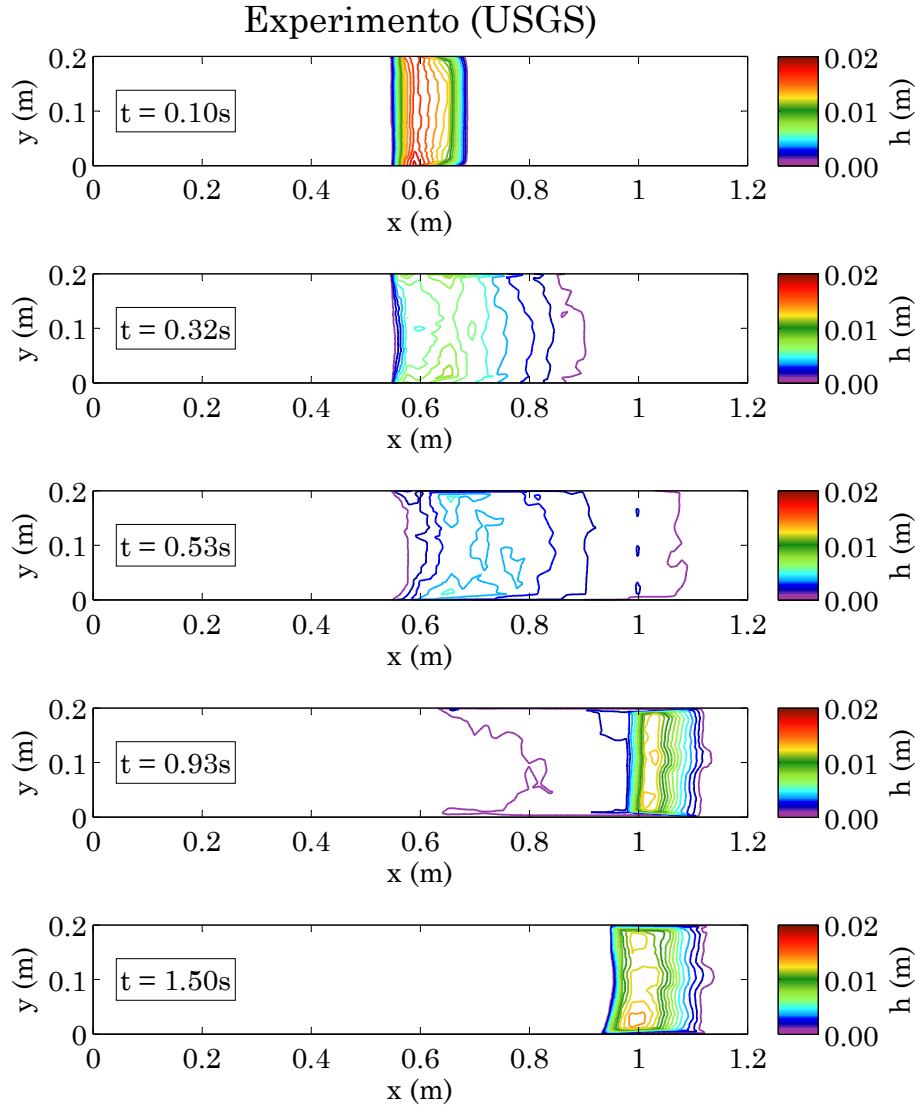


Figura 5.2: Flujo granular experimental con el ancho de la compuerta del canal artificial (i.e., 20 cm). La compuerta se abre en un tiempo igual a cero. Los contornos representan 1 mm isopacas de profundidad de arena normales al lecho (Denlinger and Iverson, 2001).

5.2. Configuración numérica

5.2.1. Configuración numérica del flujo granular

Topografía. Para esta simulación numérica se consideró una topografía basal curva solo en la dirección x . La Figura 5.3 muestra la topografía basal y se puede ver la distribución de la discretización espacial dada por los puntos de Gauss-Lobatto-Legendre.

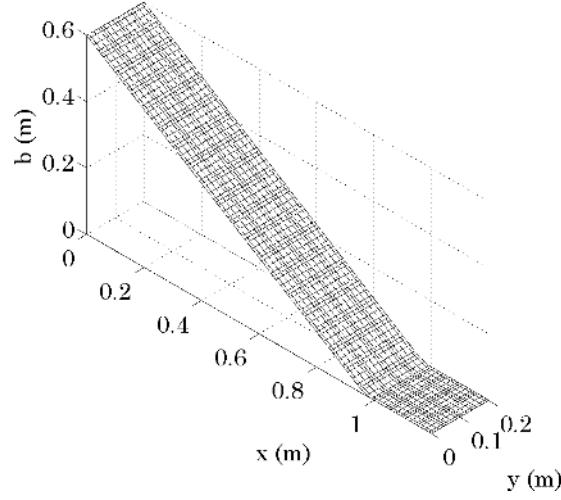


Figura 5.3: Vista bidimensional de la base topográfica de un plano y talud curvilíneo especificado por el radio de curvatura r_x en la dirección x , con 24 y 4 subdominos en la dirección x y y , respectivamente, y el polinomio de grado 5.

La topografía se puede describir con la siguiente representación matemática.

$$b(x) = \begin{cases} m(x - x_l) + b_{x_l}, & 0 \leq x \leq x_l \\ -\sqrt{r_x^2 - (x - x_r)^2} + r_x, & x_l \leq x \leq x_r \\ 0, & x \geq x_r \end{cases} \quad (5.1)$$

donde $b(x)$ es la altura de la base topográfica, b_{x_l} es la altura de la zona mas baja de la base topográfica, x_l es cualquier punto de x al lado izquierdo del radio de curvatura r_x , x_r es cualquier punto de x al lado derecho del radio de curvatura r_x , m es la pendiente de la zona inclinada. El ángulo de inclinación que aparece en la ecuación discretizada se describe como $\theta_x = \tan^{-1}(db/dx)$ y la curvatura se da como $\partial\theta_x/dx$.

Condiciones iniciales. Se considera un experimento de flujo granular seco a pequeña escala llevado a cabo por Denlinger and Iverson (2001) sobre un canal artificial rectangular de 20 cm de ancho, 5 cm de alto y 120 cm de longitud, con un ángulo de inclinación de $31,4^\circ$ descrito en la Sección 5.1.1 (Figura 5.4). Un volumen de 290 cm^3 de arena de cuarzo seco se utilizó en el experimento con ángulos de fricción interna y del lecho de 40° y 29° , respectivamente. Para tener un mejor punto de vista de las condiciones iniciales, la Figura 5.5 muestra la superficie libre ($\eta = b + h$).

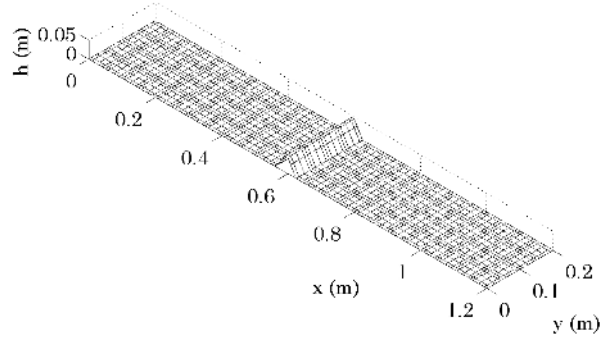


Figura 5.4: Vista bidimensional del espesor inicial del flujo (h), con 24 y 4 subdominios en la dirección x y y , respectivamente, y el grado del polinomio es igual a 5.

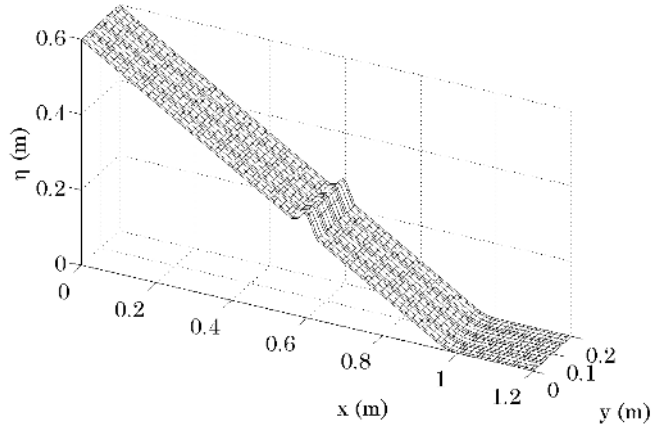


Figura 5.5: Vista bidimensional de las condiciones iniciales del flujo ($\eta = b + h$), con 24 y 4 subdominios en la dirección x y y , respectivamente, y el grado del polinomio es igual a 5.

5.2.2. Otras condiciones iniciales sin gradiente topográfico

Dos casos de prueba son comúnmente utilizados para determinar las bondades de los métodos numéricos empleados en soluciones de las ecuaciones de aguas someras, como es el colapso de una cilindro vertical y una Gaussiana de agua. Además de la prueba con el canal rectangular, este trabajo presenta un experimento similar con un cilindro vertical y una Gaussiana de arena seca. Estos dos casos se ejecutan sobre una profundidad promedio de arena ($H_o = 1$ m) sobre la cual está el cilindro y la Gaussiana como se hace comúnmente al solucionar las ecuaciones de aguas someras (Secciones 6.1.2.2 y 6.1.3.2). Estos dos casos se ejecutan con el fin de verificar la conservación de masa del método numérico, ya que para el caso del flujo granular que desciende por un canal rectangular se presenta un error

relativo de la masa alto (Sección 6.1.2.1), comparado con las bondades presentadas en Escobar-Vargas et al. (2012).

La Figura 5.6 muestra la condición inicial suave, una Gaussiana de arena con una altura máxima de 0.2 m. La condición inicial se puede describir con la siguiente función matemática.

$$h = A \exp \left[-\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2\sigma^2} \right] + 1 \quad (5.2)$$

donde $A = 0.2$ m es la amplitud de la Gaussiana, $\sigma = 0.1$ m es la desviación estándar, $x_0 = 0.5$ m y $y_0 = 0.5$ m son la posición del centro de la Gaussiana en las direcciones x y y , respectivamente.

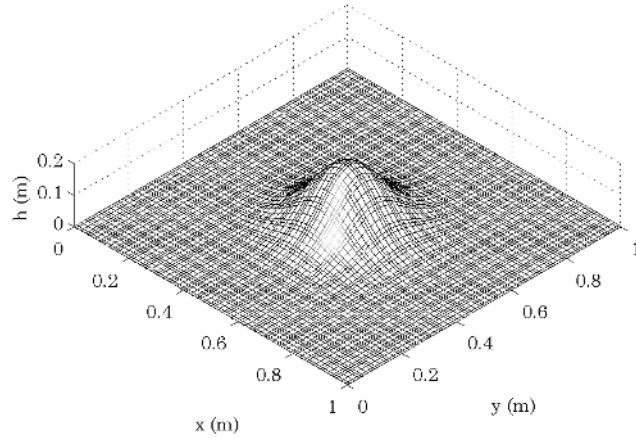


Figura 5.6: Vista bidimensional de la condición inicial de una Gaussiana de arena seca, con 20 subdominios en cada lado y el grado del polinomio es igual a 5.

La Figura 5.7 muestra la condición inicial discontinua, un cilindro de arena con una altura máxima de 0.2 m. La condición inicial del cilindro se puede escribir con la siguiente representación matemática.

$$h = \begin{cases} 0.2, & r \leq 0.1 \text{ m} \\ 0, & r > 0.1 \text{ m} \end{cases} \quad (5.3)$$

donde $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ representa el radio del cilindro. $x_0 = 0.5$ m y $y_0 = 0.5$ m son la posición del centro del cilindro en las direcciones x y y , respectivamente.

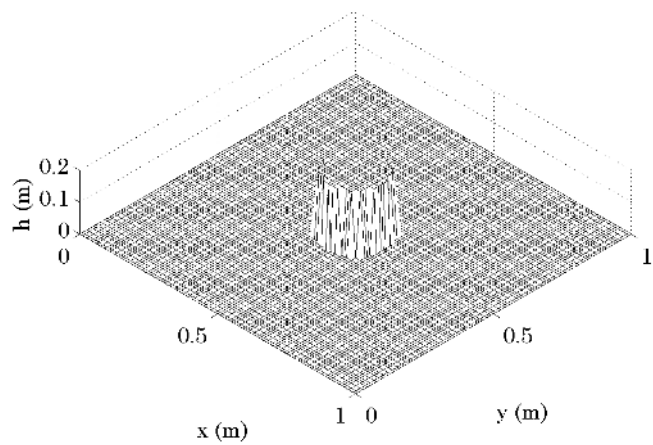


Figura 5.7: Vista bidimensional de la condición inicial de cilindro de arena seca, con 20 subdominios en cada lado y el grado del polinomio es igual a 5.

Análisis de resultados

En este capítulo se presentan los resultados de la simulación numérica y analítica de un flujo granular que desciende por un canal rectangular inclinado hasta llegar a una zona horizontal. Estas dos zonas son conectadas mediante una transición curvada (Sección 5.2.1). En la Sección 6.1 se presenta principalmente la predicción numérica del flujo granular además de un test de independencia de malla para el flujo granular y para el colapso de una Gaussiana de arena sin gradiente topográfico. En la Sección 6.2 se presenta la comparación de los resultados numéricos y analíticos. Finalmente, se presenta una discusión sobre los resultados e implementaciones de este trabajo (Sección 6.3).

Para referirse al refinamiento espacial, en este trabajo se hablará de dos estrategias diferentes. La primera es subdividir el dominio en múltiples dominios, esto por lo general se llama “ h -refinamiento” porque h es el símbolo común para el tamaño o el tamaño promedio de un subdominio. La segunda estrategia es mantener los subdominios fijos, mientras se aumenta el grado del polinomio en cada subdominio, esto se conoce como “ p -refinamiento” que es precisamente la empleada por métodos espectrales (Boyd, 2001).

6.1. Predicción numérica del flujo granular

En esta sección se presenta la predicción numérica generada por el método espectral empleado en este trabajo y se compara con un experimento elaborado por el USGS mostrado en Denlinger and Iverson (2001) (Sección 6.1.1). Se presentan dos tests de independencia de malla, el primero para el flujo granular que desciende por un plano inclinado (Sección 6.1.2.1) y el segundo para el colapso de una Gaussiana de arena (Sección 6.1.2.2). También se realiza un análisis del error en función del tiempo para el flujo granular (Sección 6.1.3.1), la Gaussiana y el cilindro de arena. Finalmente se realiza el análisis de tres factores que influyen de forma considerable en la solución numérica, que son: las condiciones de frontera deslizantes y antideslizantes (Sección 6.1.4), el factor de corrección de momentum que se

genera debido a la integración de la ecuación de momentum (Sección 6.1.5) y el coeficiente lateral de tierras constante y regularizado (Sección 6.1.6).

6.1.1. Predicción numérica del flujo granular

Las Figuras 6.1, 6.2 y 6.3 presentan la predicción numérica con el método penalizado de multidominios espectrales (SMPM) para el flujo granular con tres configuraciones de refinamiento espacial cuyas elecciones se sustentan en la Sección 6.1.2.1. La Figura 6.1 presenta la comparación de los datos experimentales generados por el USGS y la predicción numérica generada por el SMPM con un refinamiento espacial que presenta menor error por conservación de masa ($N = 8$, $Sub_x = 108$ y $Sub_y = 18$), como se puede ver en la Figura 6.4.

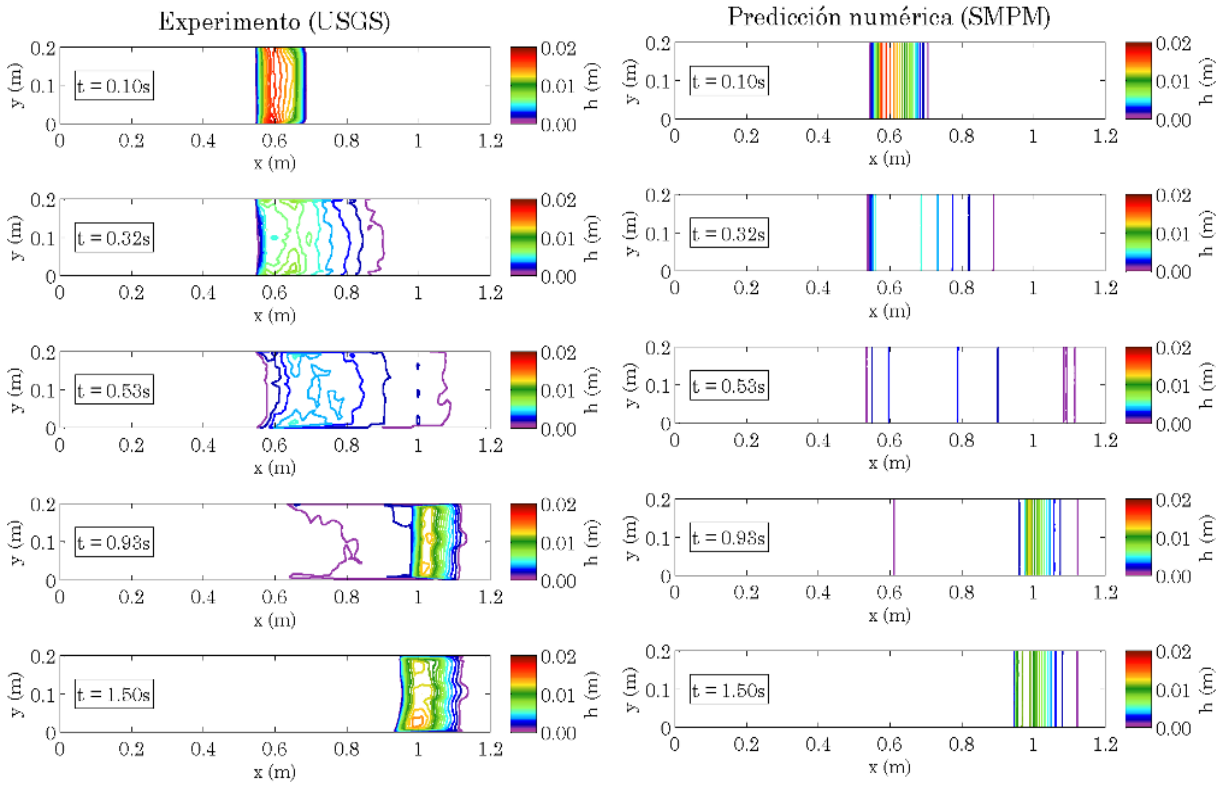


Figura 6.1: Comparación del experimento del flujo granular (a), con la predicción numérica generada con el SMPM cuando el refinamiento espacial presenta menor error por conservación de masa, $N = 8$, $Sub_x = 108$ y $Sub_y = 18$ (b).

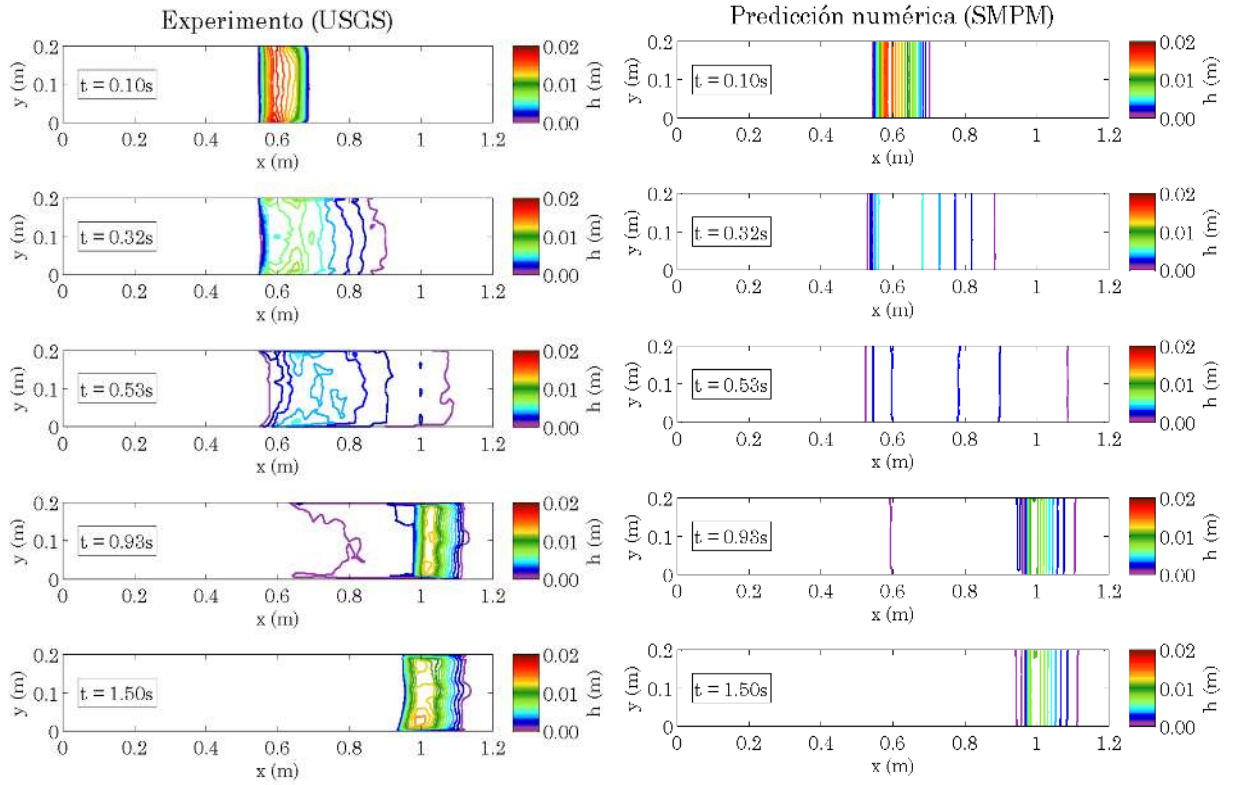


Figura 6.2: Comparación del experimento del flujo granular (a), con la predicción numérica generada con el SMPM cuando el refinamiento espacial presenta mayor error por conservación de masa, $N = 6$, $Sub_x = 60$ y $Sub_y = 10$ (b).

Contrario al ejercicio anterior, la Figura 6.2 presenta la comparación de los datos experimentales generados por el USGS, y la predicción numérica generada por el SMPM con un refinamiento espacial que presenta mayor error por conservación de masa ($N = 6$, $Sub_x = 60$ y $Sub_y = 10$), como se muestra en la Figura 6.4.

La Figura 6.3 presenta la comparación de los datos experimentales generados por el USGS y la predicción numérica generada por el SMPM. Esta predicción se hizo con un refinamiento espacial con el cual se presenta independencia de malla para el error por conservación de masa ($N = 17$, $Sub_x = 36$ y $Sub_y = 6$), como se aprecia en la Figura 6.4.

La predicción numérica dada por los tres refinamientos espaciales elegidos presentan resultados semejantes principalmente en el depósito de material granular. Las alturas máximas del depósito dadas por la predicción numérica se acercan a las alturas máximas del experimento con una diferencia aproximadas a los 2 mm. Las soluciones son simétricas, aunque en el caso en que se pierde la mayor cantidad de masa ($N = 6$, $Sub_x = 60$ y $Sub_y = 10$) aparecen pequeños indicios de asimetría pero no son muy relevantes como para

desechar la predicción brindada por este refinamiento.

Aunque el depósito es predicho de una manera muy acertada en comparación con el experimento, en la dinámica del flujo no se puede capturar especialmente el comportamiento de la cola del flujo, ya que en el experimento se presenta una especie de “adhesión” de material en las paredes del canal rectangular. El refinamiento que mejor predice el depósito es ($N = 8$, $Sub_x = 108$ y $Sub_y = 18$) en comparación con las otras dos configuraciones de la malla, por esta razón los análisis que se presentan más adelante se realizaron con este refinamiento espacial.

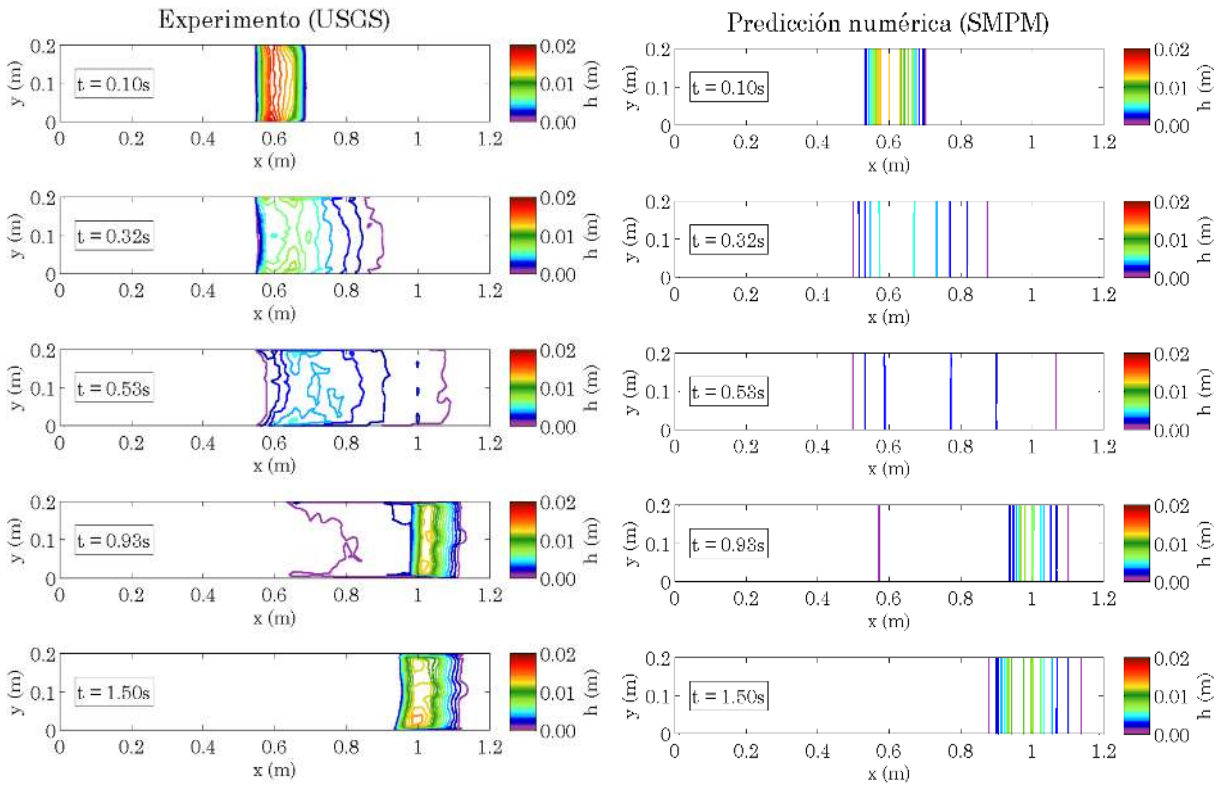


Figura 6.3: Comparación del experimento del flujo granular (a), con la predicción numérica generada con el SMPM cuando el refinamiento espacial presenta independencia en el error por conservación de masa, $N = 17$, $Sub_x = 36$ y $Sub_y = 6$ (b).

6.1.2. Test de independencia de malla

El test de independencia de malla permite determinar las mejoras producidas en el error para la conservación de masa conforme se refina espacialmente el dominio computacional (i.e., las celdas de la malla se hacen más pequeñas y el número de celdas se incrementa) (Slater, 2008). Con esto se puede determinar a partir de que refinamiento se produce el mis-

mo error numérico aunque a la discretización espacial se le siga aumentando el refinamiento espacial.

6.1.2.1. Test de independencia para el flujo granular

En esta sección se presentan las propiedades de conservación de masa y energía del método penalizado de multidominios espectrales al solucionar el flujo granular que descende por un canal rectangular, además se presenta las condiciones de estabilidad de la solución y el tiempo computacional.

La Figura 6.4 muestra los resultados del error por conservación de masa para el flujo granular cuando se tienen condiciones de frontera deslizantes. La simulación se da para 9 “ h -refinamientos” cuadrados y para 19 “ p -refinamientos”. En la Figura 6.4 se puede apreciar como la conservación de la masa no mejora conforme se aumenta el número de grados de libertad, dados tanto por el “ h -refinamiento” como por el “ p -refinamiento”. Además se puede ver como la conservación de la masa en función de los refinamientos presenta un comportamiento no monotónico si $N < 17$, mientras que para $N \geq 17$ la conservación de la masa varía de forma monotónica, independientemente de la cantidad de subdominios en consideración. Este comportamiento del test de independencia de malla dificulta la elección de una buena discretización espacial para la predicción del flujo granular.

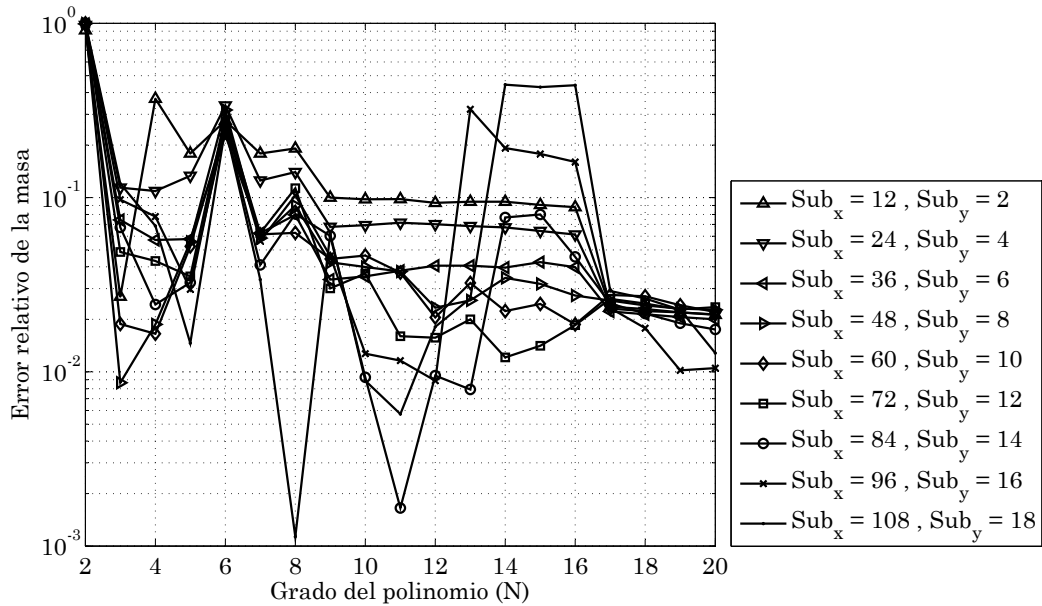


Figura 6.4: Conservación de la masa para el flujo granular en m^3 con diferentes “ h ” y “ p -refinamientos” del dominio espacial cuando se tiene condiciones de frontera *deslizantes*.

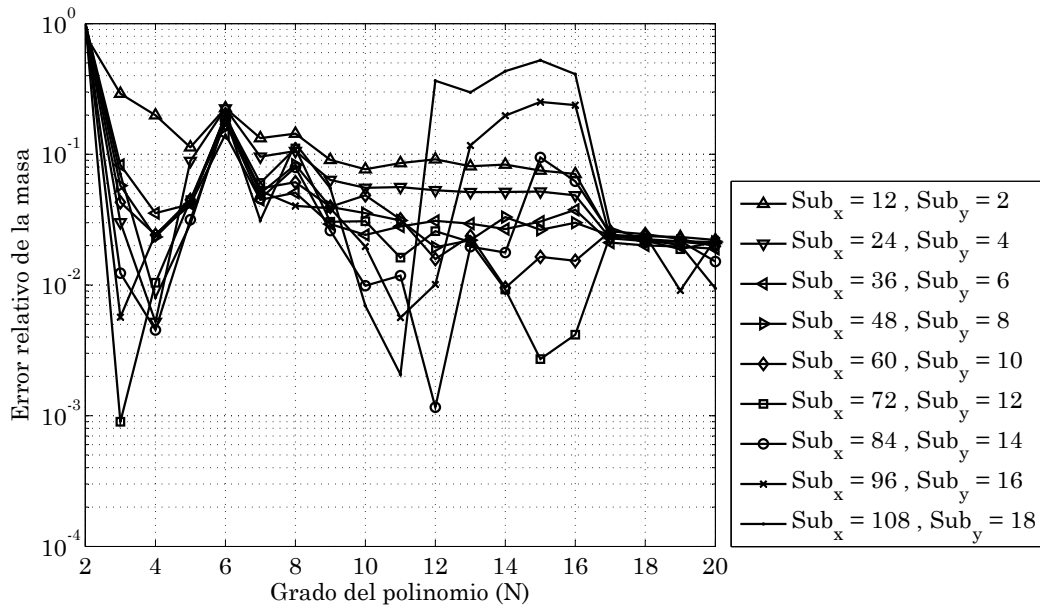


Figura 6.5: Conservación de la masa para el flujo granular en m^3 con diferentes “ h ” y “ p -refinamientos” del dominio espacial cuando se tiene condiciones de frontera *antideslizantes*.

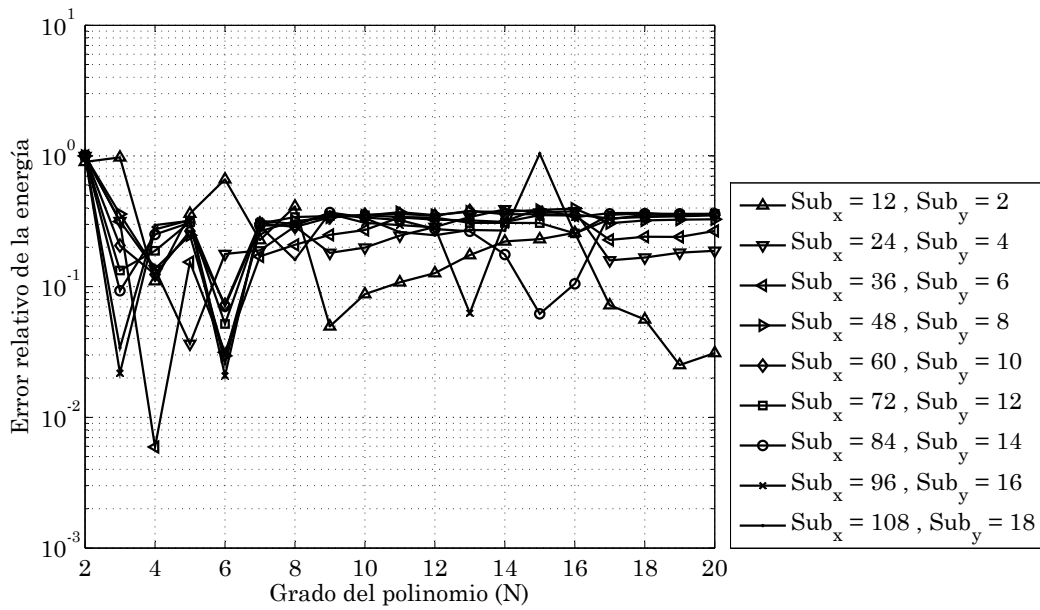


Figura 6.6: Conservación de la energía para el flujo granular en m^4/s^4 con diferentes “ h ” y “ p -refinamientos” del dominio espacial cuando se tiene condiciones de frontera *deslizantes*.

La Figura 6.5 muestra los resultados del error por conservación de masa para el flujo granular cuando se imponen condiciones de frontera antideslizantes (para mas detalles ver la Sección 4.4.1.2). La simulación se da para 9 “ h -refinamientos” cuadrados y para 19 “ p -refinamientos”. En la Figura 6.5 se puede ver que la imposición de las condiciones de fronteras antideslizantes presenta un comportamiento muy semejante en cuanto al error por conservación de masa si se tiene condiciones de frontera deslizantes. La conservación de la masa en función de los refinamientos presenta un comportamiento no monótono si $N < 17$, mientras que para $N \geq 17$ la conservación presenta un comportamiento monótonico y convergente con los “ h -refinamientos” y “ p -refinamientos”. También se puede ver como el polinomio de grado 6 es uno de los que presenta mayor error relativo en la conservación de la masa. Debido al alto error numérico presentado en las Figuras 6.4 y 6.5, en la Sección 6.1.2.2 se ejecuta otro caso de prueba con el fin de verificar las propiedades de conservación de masa del método numérico.

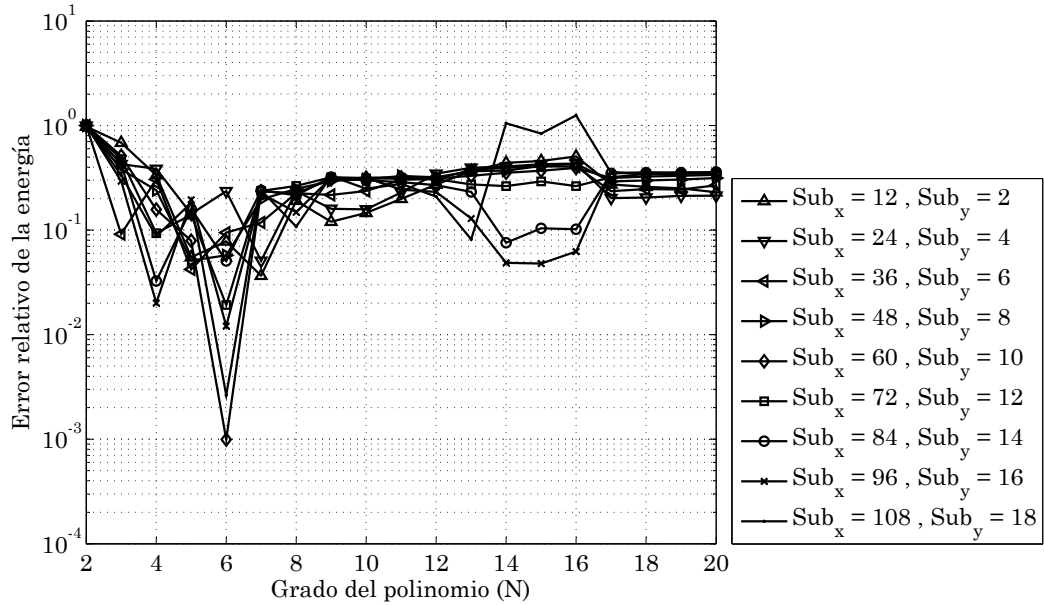


Figura 6.7: Conservación de la energía para el flujo granular en m^4/s^4 con diferentes “ h ” y “ p -refinamientos” del dominio espacial cuando se tiene condiciones de frontera *antideslizantes*.

Los tres refinamientos utilizados para presentar la predicción numérica del flujo granular en la sección anterior fueron elegidos por las siguientes razones. El primer refinamiento ($N = 8$, $Sub_x = 108$ y $Sub_y = 18$) produce el menor error por conservación de masa como se puede apreciar en la Figura 6.4. El segundo refinamiento ($N = 6$, $Sub_x = 60$ y $Sub_y = 10$) produce uno de los mayores errores por conservación de masa como se puede apreciar en

la Figura 6.4. Especialmente el polinomio de grado 6 produce el mismo orden de error por conservación de masa para todos los “ h -refinamientos” implementados en este trabajo. Finalmente, el tercer refinamiento ($N = 17$, $Sub_x = 36$ y $Sub_y = 6$) es un refinamiento en donde el error en la solución presenta una independencia de la malla (Figuras 6.4 y 6.5). Los análisis de error en el tiempo del flujo granular y a los parámetros en los que se muestra especial atención en este trabajo son implementados con estos refinamientos.

Medir la conservación de la energía es importante cuando se trata de la solución de la ecuaciones de aguas someras invicidas, de modo que la pérdida de energía debe ser tan bajo como la precisión del método numérico lo permita, que en el caso de los método espectrales podría llegar a ser del orden de aproximación del computador. Sin embargo, en este trabajo también se muestra la energía final del sistema, con el objeto de mirar que tanto varía la energía utilizando diferentes refinamientos.

La Figura 6.6 muestra la variación total de energía para el flujo granular cuando se tiene condiciones de frontera deslizantes, donde se puede ver que para $N \geq 7$ la variación de la energía final en función de los refinamientos no varía en ordenes de magnitud excepto para algunos casos. Estas pocas variaciones son reducidas aun más cuando se imponen condiciones de frontera antideslizantes (Figura 6.7). Si se tienen condiciones de frontera antideslizantes la convergencia del error para la energía es mucho más clara cuando $N \geq 7$ para los refinamientos implementados en este trabajo, exceptuando 9 casos específicos en donde la conservación de masa cambia en 1 orden de magnitud respecto a la tendencia presentada en la Figura 6.7.

La condición de estabilidad de Courant promedio (CFL_{mean}) en todo el dominio computacional se mantuvo por debajo de 0.5 (Figura 6.8), pero esta no es la única forma de ver el comportamiento de la condición de estabilidad. La solución de todo el dominio está regida por el seguimiento de la frontera del flujo tal como se presentó en la Sección 4.4.2, en donde el esquema conservativo sufre una solución trivial (i.e., $0 = 0$, cuando $h = 0$), haciendo que el CFL_{mean} disminuya notablemente. Para verificar los alcances de la condición de estabilidad del método espectral es importante conocer la máxima condición de Courant (CFL_{max}) en cada paso de tiempo y en general de toda la solución tal como lo muestra la Figura 6.9. Es importante aclarar que el CFL_{max} presentado aquí se da solamente en un punto de todo el dominio computacional y en un solo paso de tiempo de toda la solución.

En la Figura 6.9 se puede ver que el CFL_{max} para la mayoría de los casos estuvo entre 0.5 y 0.8. Aunque para 8 casos especiales se obtuvo la solución del sistema de ecuaciones en condiciones estables cuando $CFL > 1$. Por otro lado, cuando el grado del polinomio $N \geq 17$, fue necesario considerar valores de CFL iniciales inferiores a 0.5 para mantener la estabilidad de la solución debido a las oscilaciones que se presentan cuando el polinomio es de un grado tan alto, mientras que para el resto de los casos el CFL inicial fue de 0.8.

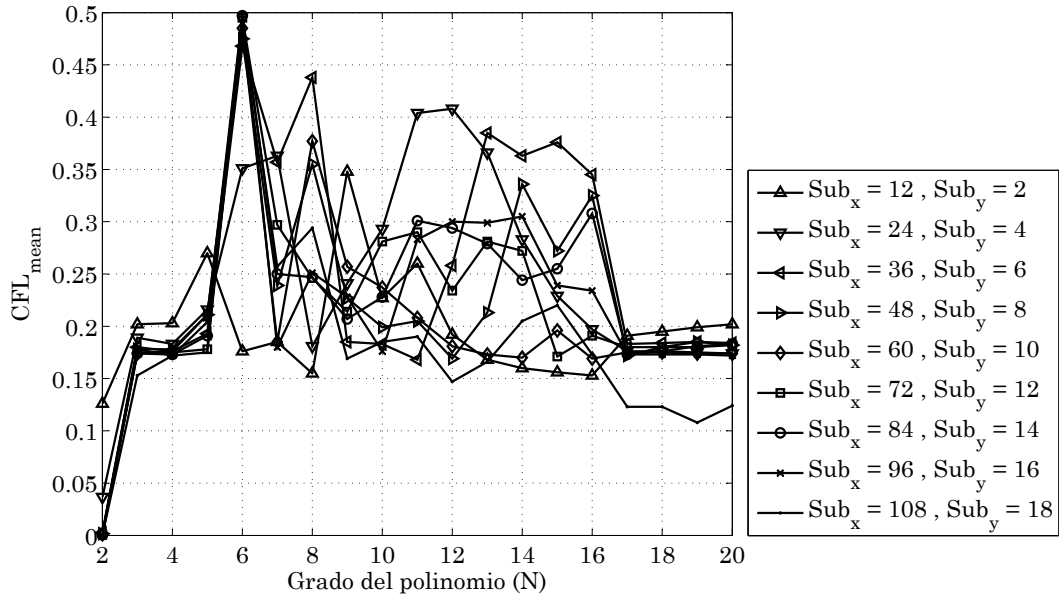


Figura 6.8: Condición de estabilidad Courant promedio (CFL_{mean}).

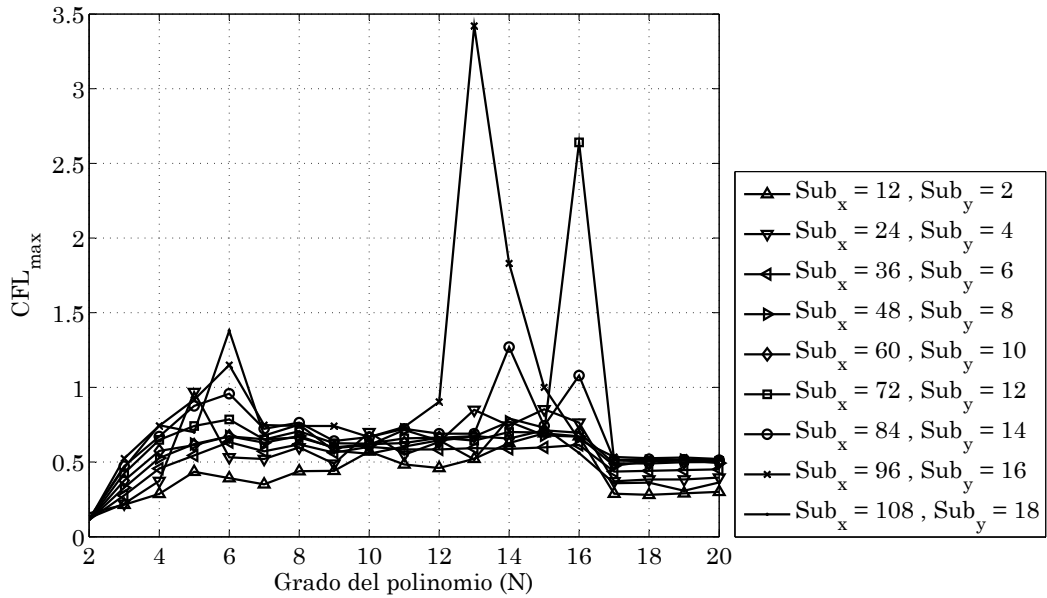


Figura 6.9: Condición de estabilidad de Courant máxima (CFL_{max}).

La Figura 6.10 muestra el tiempo computacional requerido para cada uno de los refinamientos implementados en este trabajo. La mayor cantidad de grados de libertad im-

plementados en este trabajo ($N = 20$, $Sub_x = 108$ y $Sub_y = 18$) para el flujo granular requiere solamente unas 78 horas de cómputo. Sin embargo, es importante presentar estos resultados con el objeto de implementaciones futuras de casos reales, en donde la condición inicial tenga un área muy pequeña respecto a toda el área de estudio. Esto requeriría una discretización espacial muy exigente con el fin de capturar el movimiento de la masa lo más detallado posible.

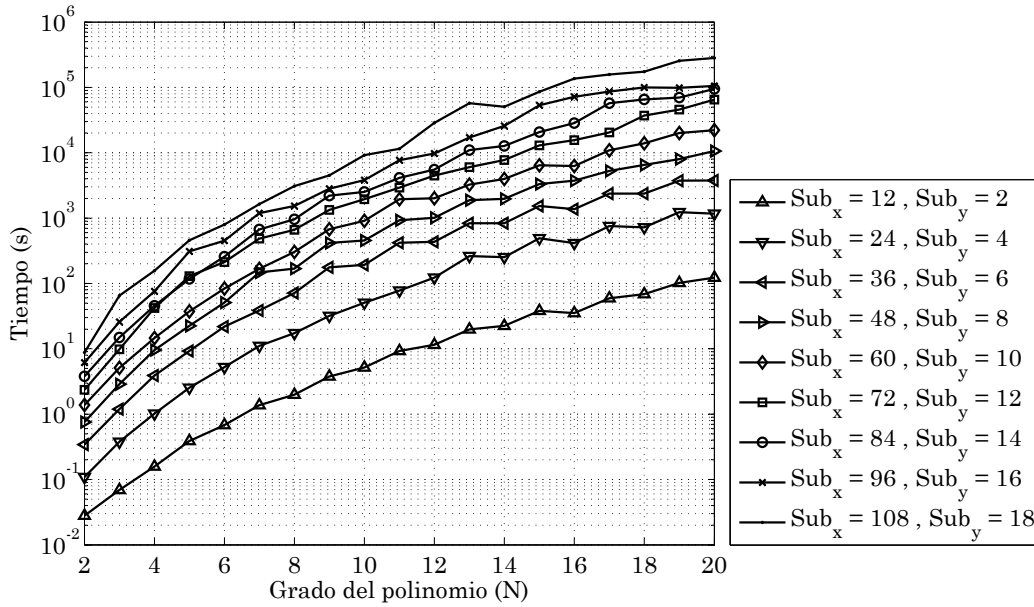


Figura 6.10: Tiempo computacional requerido para cada “ h ” y “ p -refinamientos”.

6.1.2.2. Test de independencia para la Gaussiana

En esta sección se presenta el test de independencia de malla para una Gaussiana de arena, el cual se realiza con el fin de verificar las propiedades de conservación del método penalizado de multidominios espectrales al solucionar el conjunto de ecuaciones de flujo de material desagregado. Buscando así la respuesta al por qué se presentan errores tan altos al solucionar el caso del flujo granular como se puede apreciar en la sección anterior (Figuras 6.4 y 6.5).

La Gaussiana está sobre una base o profundidad promedio H_o del mismo material de 1 m de profundidad. Esta es la forma convencional como se soluciona las ecuaciones de aguas someras, sin necesidad de imponer un seguimiento a las fronteras del flujo cuando se tiene zonas sin material como se presenta en la Sección 4.4.2 para solucionar las ecuaciones de flujos de material desagregado en este trabajo. Adicionalmente la base sobre la cual está todo el material no tiene gradiente topográfico.

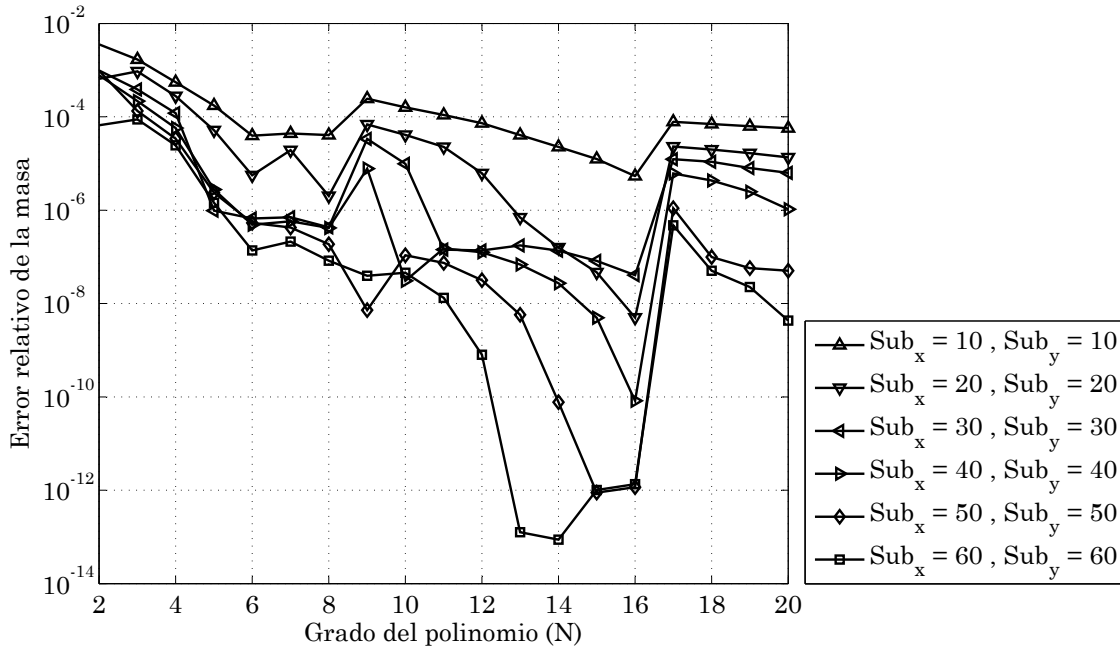


Figura 6.11: Conservación de la masa para el colapso de una Gaussiana en m^3 para diferentes discretizaciones del dominio espacial cuando se tiene una profundidad promedio $H_o = 1$.

La Figura 6.11 muestra los resultados del error por conservación de masa, para el colapso de una Gaussiana de arena. La simulación se da para 6 “ h -refinamientos” cuadrados y para 19 “ p -refinamientos”. La solución de la Gaussiana presenta errores muy bajos en la conservación de masa con altos “ h -refinamientos” (i.e., $Sub_x = 50 - 60$ y $Sub_y = 50 - 60$) y con algunos “ p -refinamientos” altos (i.e., $N = 13 - 16$). La conservación de la masa para la Gaussiana es considerablemente mejor respecto al caso flujo granular que desciende por un canal rectangular. Aun con este caso tan suave la conservación de la masa varía de forma no monótona cuando $N < 17$ para los diferentes “ h -refinamientos” ejecutados y al igual que en el canal rectangular la conservación de la masa varía monótonicamente cuando $N \geq 17$ independientemente del “ h -refinamiento”.

La Figura 6.12 muestra la variación total de energía para el colapso de una Gaussiana de arena. En la Figura 6.12 se puede ver que para $N \geq 5$ la variación de la energía final no varía en ordenes de magnitud excepto para un solo caso específico, por lo que para la mayoría de los refinamientos se tiene casi la misma energía cuando se forma el depósito de arena a partir del colapso de la Gaussian.

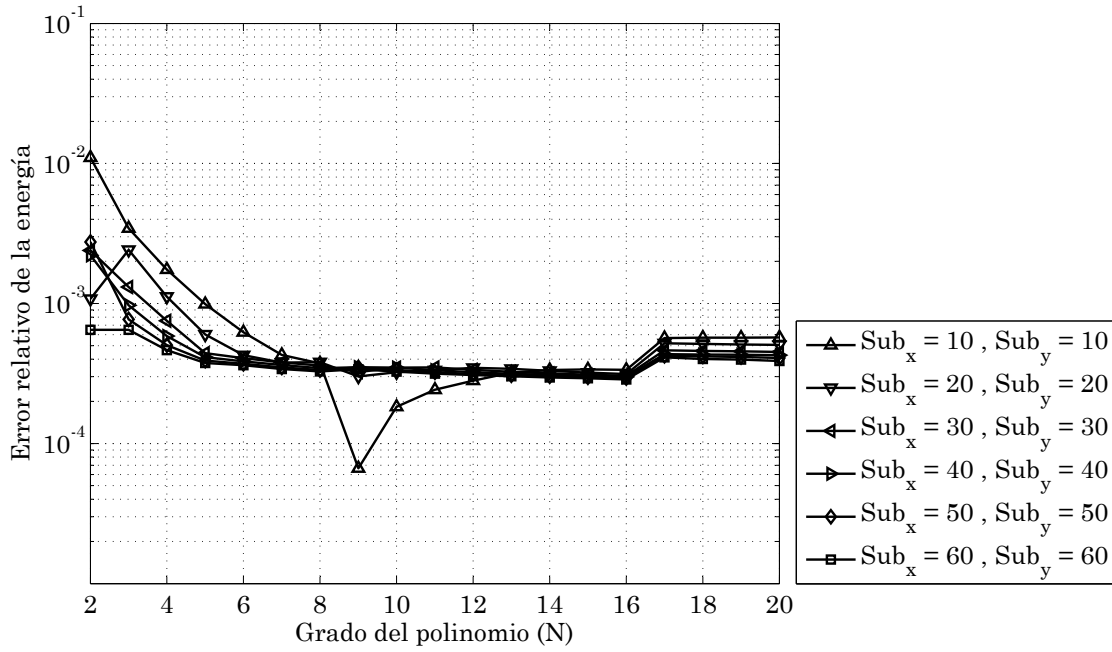


Figura 6.12: Conservación de la energía para el colapso de una Gaussiana para diferentes discretizaciones del dominio espacial cuando se tiene una profundidad promedio $H_o = 1$.

6.1.3. Propiedades de conservación en el tiempo

6.1.3.1. Conservación de masa en el tiempo para el flujo granular

En esta sección se presentan la pérdida de masa en función del tiempo para tres configuraciones de refinamiento espacial. El primer refinamiento genera la menor pérdida de masa (Figura 6.1), el segundo presenta la mayor pérdida de masa (Figura 6.2) y el tercer refinamiento es generado para cuando se aprecia una independencia de malla (Figura 6.3). La predicción numérica presentadas en las Figuras 6.1, 6.2 y 6.3, tienen condiciones de frontera deslizantes, un coeficiente lateral de tierras constante y un factor de corrección de momentum $\beta = 1.15$. Además se impone un filtro fuerte, para conservar intactos los dos primeros modos, el resto de modos del polinomio de Legendre serán filtrados como se indicó en la Sección 4.6.

En la Figura 6.13 muestra como la pérdida de masa del método penalizado de multidominios espectrales converge rápidamente en función del tiempo. Claramente se puede apreciar que el uso de un polinomio de alto grado converge con una pérdida de masa menor que las otras dos configuraciones espaciales. También se puede ver que para el polinomio de grado 8 el error en la conservación de la masa presenta un orden de magnitud de diferencia, frente a $N = 17$, aun cuando “ h -refinamiento” es alto.

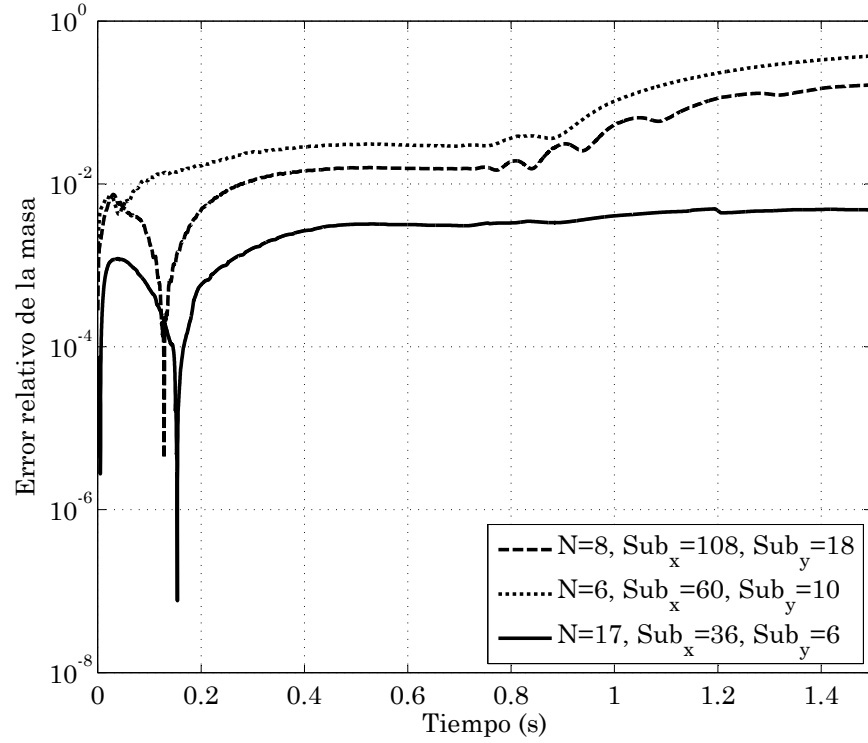


Figura 6.13: Conservación de la masa en m^3 en función del tiempo para el flujo granular con 3 diferentes refinamientos de la malla.

6.1.3.2. Conservación de masa en el tiempo para la Gaussiana y el cilindro

La Figura 6.14 muestra la convergencia del error por conservación de masa para el colapso de la Gaussiana con un alto refinamiento espacial ($N = 8$, $Sub_x = 90$ y $Sub_y = 90$). Esto se hace para dos opciones en cuanto a la profundidad promedio H_o . La primera cuando se tiene una profundidad promedio de arena $H_o = 1$ bajo la Gaussiana y la segunda cuando no se tiene una profundidad promedio ($H_o = 0$). En la Figura 6.14 se puede apreciar que no hay diferencia en la conservación de la masa entre la solución mediante el uso de la profundidad promedio ($H_o = 1$) y el uso del seguimiento de las fronteras del flujo, es decir, sin profundidad promedio de arena ($H_o = 0$). En ambos casos se logran errores relativos del orden de $O(10^{-9})$ cuando se trata del colapso de una función tan suave como es la Gaussiana de arena.

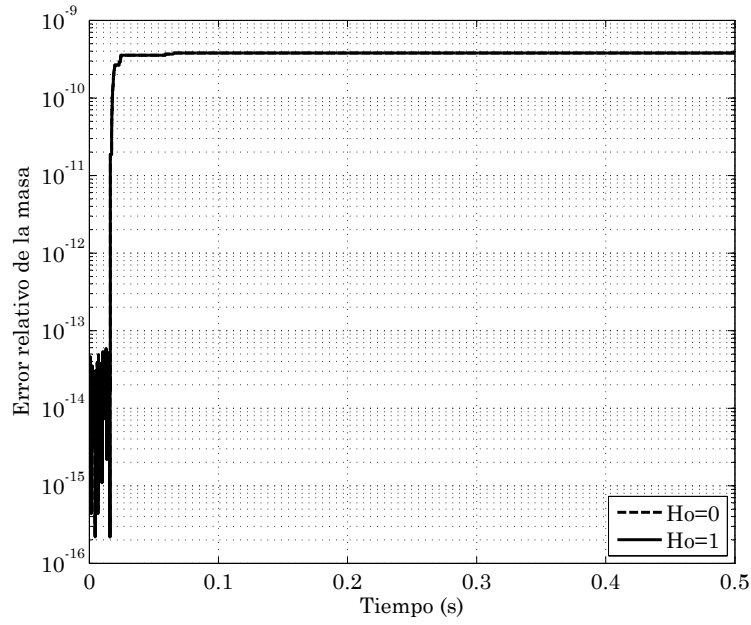


Figura 6.14: Conservación de masa en m^3 en función del tiempo para la Gaussiana.

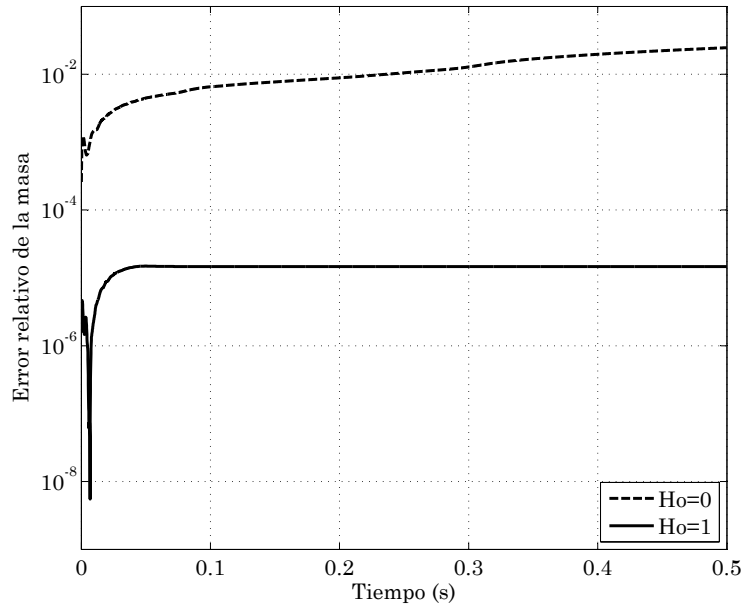


Figura 6.15: Conservación de masa en m^3 en función del tiempo para el cilindro vertical.

La Figura 6.15 muestra la convergencia de la conservación de la masa para el colapso del cilindro de arena cuando se tiene una profundidad promedio de arena (i.e., $H_o = 1$) y

cuando no se tiene una profundidad promedio (i.e., $H_o = 0$). En la Figura 6.15 se puede ver como para este caso, donde se presentan discontinuidades en las paredes del cilindro la conservación de la masa si muestra grandes diferencias entre estas dos condiciones en la profundidad promedio. Cuando se tiene $H_o = 0$, el error de convergencia de la solución del colapso del cilindro presenta errores alrededor de $O(10^{-2})$, mientras que, si se tiene una profundidad promedio ($H_o = 1$) se puede conseguir errores aproximados a $O(10^{-5})$. La diferencia en el error por conservación de masa entre estas dos opciones para la profundidad promedio cuando se tienen discontinuidades como sucede con el cilindro de arena puede llegar a ser del orden de $O(10^{-3})$.

A partir de los resultados presentados en las Figuras 6.14 y 6.15 se puede apreciar que para la solución de las ecuaciones de flujos de material desagregado en condiciones suaves el error por conservación de la masa es tan bajo como se reporta en Escobar-Vargas et al. (2012); Hesthaven (2000) y Kopriva (1998), donde puede llegar a ser del orden de $O(10^{-12})$ para el método penalizado de multidominios espectrales. Si se trata de condiciones en donde la condición inicial o la solución desarrolla discontinuidades, el error por conservación puede aumentar de 5 a 8 ordenes de magnitud [i.e., $O(10^{-4})$ - $O(10^{-1})$]. Para los casos que presentan discontinuidades la imposición de una solución trivial cuando no se tiene una profundidad promedio ($H_o = 0$) puede aumentar aproximadamente en 4 ordenes de magnitud el error en la conservación de masa [i.e., $O(10^{-1})$].

6.1.4. Análisis de condiciones de frontera

Es importante realizar una debida implementación de las condiciones de frontera, ya que tanto de estas como de la condición inicial depende que se tenga una buena aproximación de solución de ecuaciones diferenciales parciales. La predicción de la dinámica del flujo granular tanto en la cola como en el frente carece de una buena aproximación como se puede apreciar en la Sección 6.1.1. En este trabajo se explora la imposición de unas condiciones de frontera antideslizantes (presentadas en la Sección 4.4.2) con el fin de encontrar una mejor predicción en la dinámica del flujo, buscando así la “adhesión” de material a las paredes del canal.

Las Figuras 6.16a y 6.16b presentan los datos experimentales desarrollado por el USGS. La Figura 6.16c muestra la predicción numérica dada por el SMPM con las condiciones de frontera deslizante, en donde la velocidad en la dirección paralela al flujo en las paredes laterales es obtenido de la solución numérica del conjunto de ecuaciones. Se puede ver que con estas condiciones la cola del flujo no es predicha de la forma mas adecuada, ya que no se presenta la “adhesión” de material a las paredes como sucede en el experimento, sin embargo, el depósito de material en la zona horizontal del canal rectangular presenta una predicción muy satisfactoria comparada con el experimento.

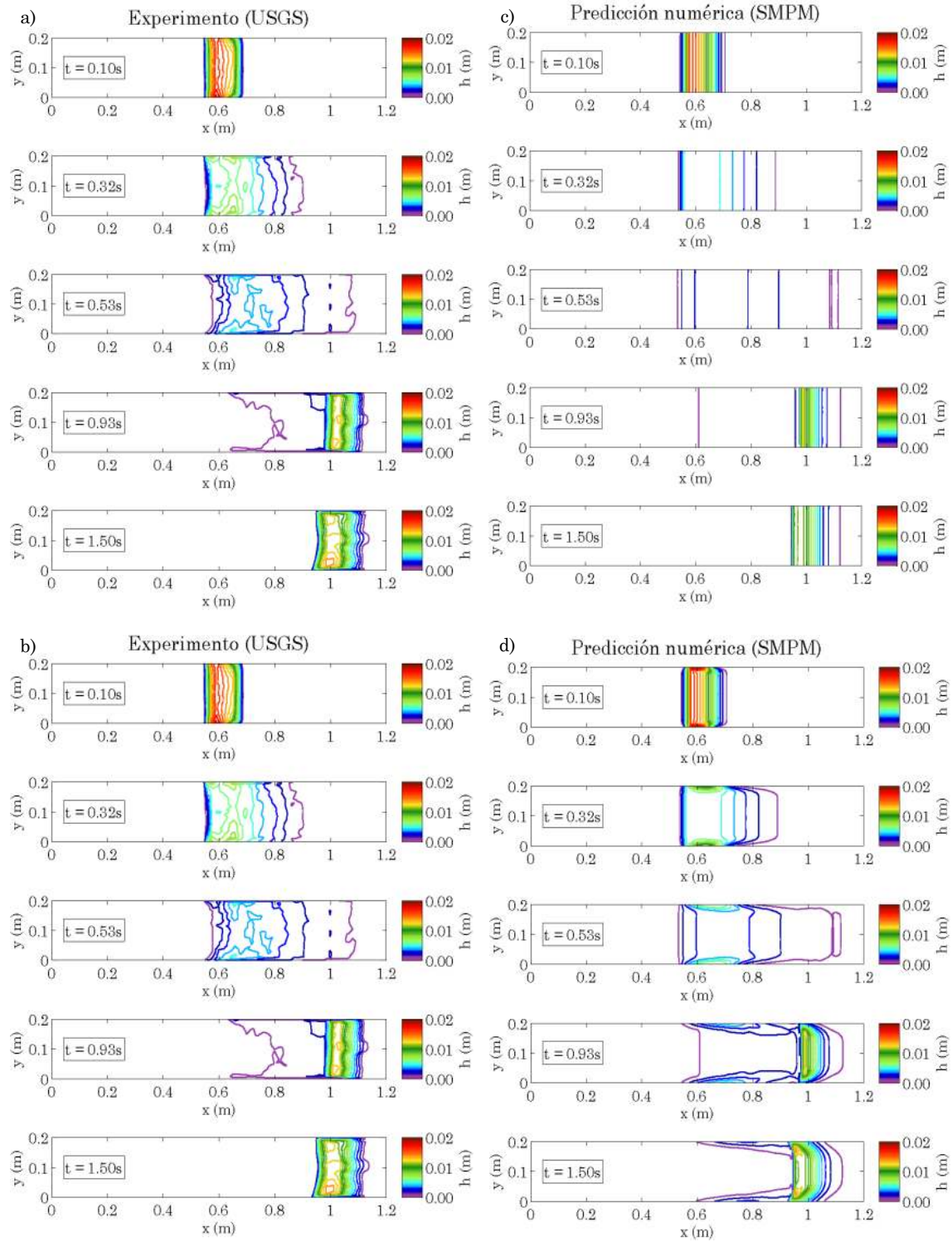


Figura 6.16: Comparación del experimento generado por el USGS (a y b), y dos tipos de condiciones de frontera, deslizantes (c) y antideslizantes (d).

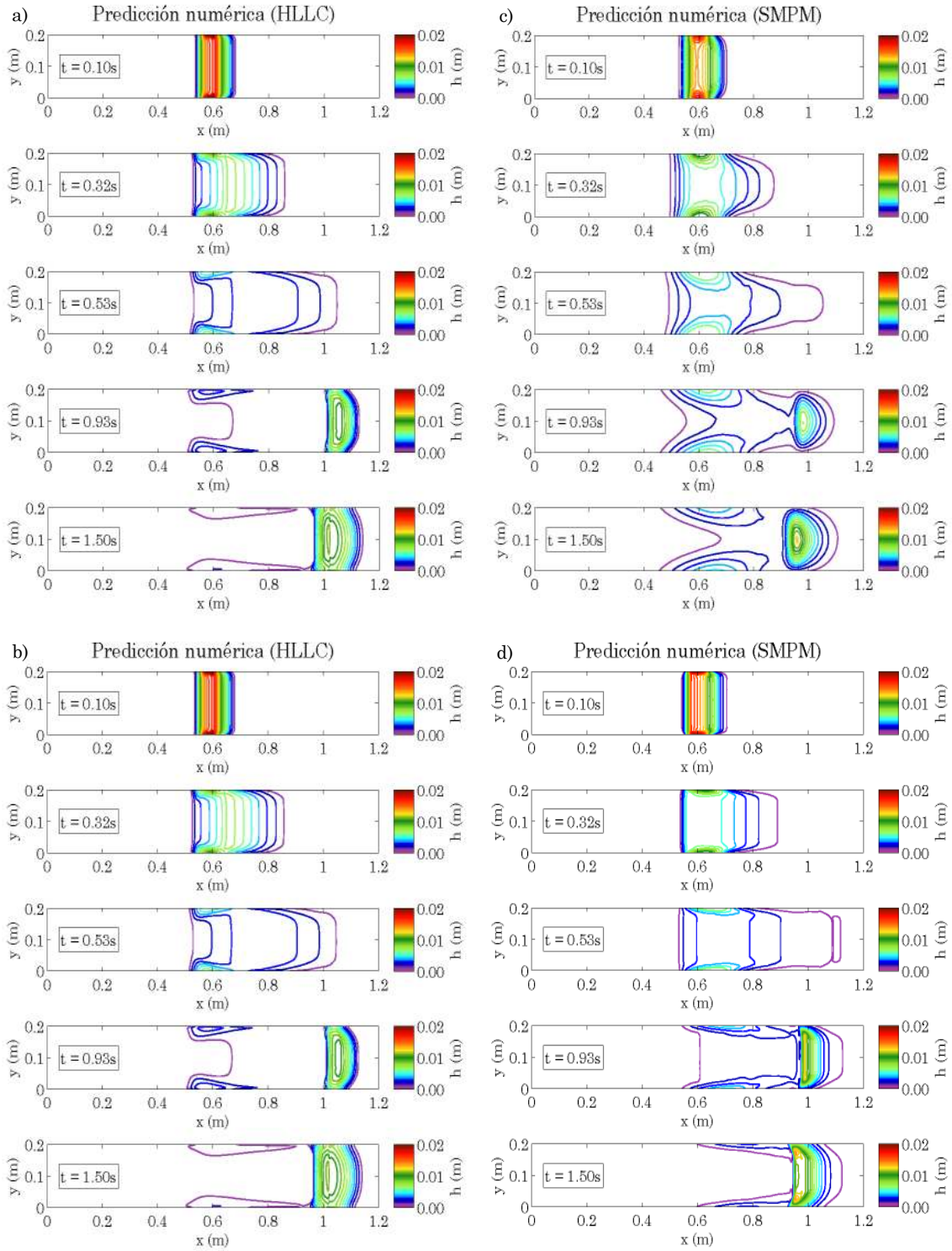


Figura 6.17: Comparación de dos soluciones numéricas. (a y b) método Harten-Lax-vanLeer-Contact (HLLC) presentada por Denlinger and Iverson (2001) con refinamiento del $O(16^3)$, (c) SMPM con refinamiento del $O(16^3)$ y (d) SMPM con refinamiento del $O(12^4)$.

La Figura 6.16d presenta la predicción numérica del flujo granular con la imposición de las fronteras antideslizantes, es decir que la velocidad en la dirección paralela al flujo en las paredes laterales se imponen como cero ($\bar{u}_{\parallel} = 0$). En la Figura 6.16d se puede ver como las condiciones de frontera antideslizantes permiten una representación de una forma apropiada la cola del flujo mientras el material desciende pendiente abajo. La “adhesión” de material a las paredes en la predicción numérica es semejante al lo capturado por el experimento. Sin embargo, el depósito no presenta la mejor predicción, ya que la simulación genera una zona de depósito de material cercano a las paredes laterales que no se presenta en el experimento.

En las Figuras 6.17a y c se muestra la predicción numérica dada por el método HLLC presentada en Denlinger and Iverson (2001) con un refinamiento del orden de $O(16^3)$. Las Figuras 6.17c y d muestran la predicción numérica dada por el SMPM con las condiciones de frontera antideslizante y dos refinamientos diferentes del orden de $O(16^3)$ y $O(12^4)$, respectivamente. De las Figuras 6.17a y b se podría inferir que las condiciones de fronteras impuestas en la solución dada por Denlinger and Iverson (2001) son antideslizantes, debido a que la predicción numérica dada tanto por el método HLLC como SMPM presentan una distribución de material semejante mientras desciende por la pendiente. Esta conjetura pretende aclarar algunos comportamientos presentados por la predicción numérica dada por el método HLLC, ya que las condiciones de frontera tanto para el dominio computacional (Sección 4.4.1) como para el seguimiento del límite del flujo (Sección 4.4.2) no son explícitamente establecidas en (Denlinger and Iverson, 2001).

Entre las Figuras 6.17c y d se presenta una clara diferencia en la predicción de la distribución del material granular, que es causada por el uso de dos diferentes ordenes de refinamiento para el SMPM. Con esto se puede ver que para el método espectral es necesario emplear un mayor refinamiento espacial con el fin de conseguir una predicción más acertada frente al experimento si se utilizan condiciones de frontera antideslizantes (Figuras 6.16b y d).

Ninguna de las dos condiciones de frontera tratadas en este trabajo presentan una predicción que satisfaga la distribución del material tanto en la dinámica del flujo como en el depósito. Esto podría suceder por dos razones: La primera es que las condiciones de frontera implementadas en este trabajo no están brindando la información apropiada para producir un pronóstico más acertados frente a los datos experimentales, por lo que se plantea la posibilidad de explorar otras condiciones de fronteras que permitan una mejor representación del experimento. La segunda es que el esfuerzo cortante transversal no esta siendo representado de forma adecuada, de manera que el modelo no tiene suficiencia para capturar detalles del comportamiento del material en la proximidad a las paredes laterales del canal. Posiblemente la implementación de otros modelos constitutivos diferentes a Mohr-Coulomb (plasticidad perfecta) como los elasto-plásticos permitan representar mejor los esfuerzos cortantes entre los sólidos de un flujo de material desagregado y, por consiguiente,

la distribución del material tanto en la dinámica como en el depósito.

6.1.5. Análisis del factor de corrección de momentum (β)

Comúnmente el factor de corrección de momentum generado por la integración en la profundidad de las ecuaciones de momentum para flujos de material desagregado (Sección 2.2.2) se impone como la unidad, indicando que el perfil de velocidades en la profundidad del flujo es constante. Esta suposición puede no ser la más adecuada justo después de la liberación, en la proximidad a obstáculos y cerca del depósito, ya que tanto la altura como el componente vertical del campo de velocidades puede cambiar considerablemente y en algunos casos de forma abrupta (Pudasaini and Hutter, 2007).

Pudasaini and Hutter (2007) analiza unas imágenes capturadas tanto en el fondo como en la superficie libre del flujo granular, obteniendo como resultado una diferencia de la velocidad promedio entre el fondo y la superficie libre de aproximadamente el 5%. Con base en esto Hutter et al. (2005) soluciona el modelo Savage-Hutter para un flujo granular utilizando diferentes valores para el factor de corrección de momentum $\beta \in [1.0, 1.2]$, con lo cual sustenta que la modelación no presenta cambios significativos en la distribución de la masa granular en el plano. Sin embargo, a diferencia de los resultados de Hutter et al. (2005), para el modelo desarrollado por Iverson and Denlinger (2001) si presenta cambios importantes en la predicción de la distribución de la masa granular en el plano como se puede apreciar en las Figuras 6.18 - 6.20.

Las Figuras 6.18a y c muestran el perfil del flujo en el centro del canal capturados en el experimento del USGS para $t = 0.10$ s y $t = 0.32$ s, respectivamente. Las Figuras 6.18b y d presentan las predicciones numéricas del perfil del flujo en el centro del canal en $t = 0.10$ s y $t = 0.32$ s, respectivamente, dadas por el SMPM. Las predicciones numéricas del perfil del flujo en el centro del canal dadas por el SMPM se muestra con 5 valores diferentes del factor de corrección de momentum para cada instante de tiempo.

La mejor predicción del frente de flujo para $t = 0.10$ s se da cuando $\beta = 1.0$, ya que se presenta altas pendientes en el frente de flujo tal como en el experimento. Mientras que $\beta \neq 1.0$ se tienen frentes de flujo cóncavos (Figura 6.18b). En la Figura 6.18d se puede ver como es conveniente un $\beta = 1.05$ ya que esto minimiza la pendiente del frente del flujo que se puede generar en la predicción numérica y que no sucede en el experimento cuando $t = 0.32$ s. Si $\beta > 1.05$ también se presenta un frente de flujo muy suave, pero conforme se incrementa el valor de β el frente de flujo es excesivamente suave y acelera la llegada de material a la zona de depósito, propiedad no conveniente para presentar un buen pronóstico respecto a la dinámica del experimento.

Las Figuras 6.19a y c muestran el perfil del flujo en el centro del canal capturados en el experimento del USGS para $t = 0.53$ s y $t = 0.93$ s, respectivamente. Las Figuras 6.19b y d presentan las predicciones numéricas del perfil del flujo en el centro del canal en $t =$

0.53 s y $t = 0.93$ s, respectivamente, dadas por el SMPM. La mejor predicción del SMPM para el frente de flujo en $t = 0.53$ s se da cuando $\beta = 1.15$ (Figura 6.19b), ya que con este factor de corrección de momentum se presenta una distribución de material granular semejante al experimento (Figura 6.19a). Si $\beta = 1.0$, gran parte del material ha descendido por la pendiente dando inicio a la generación del depósito demasiado pronto respecto al experimento.

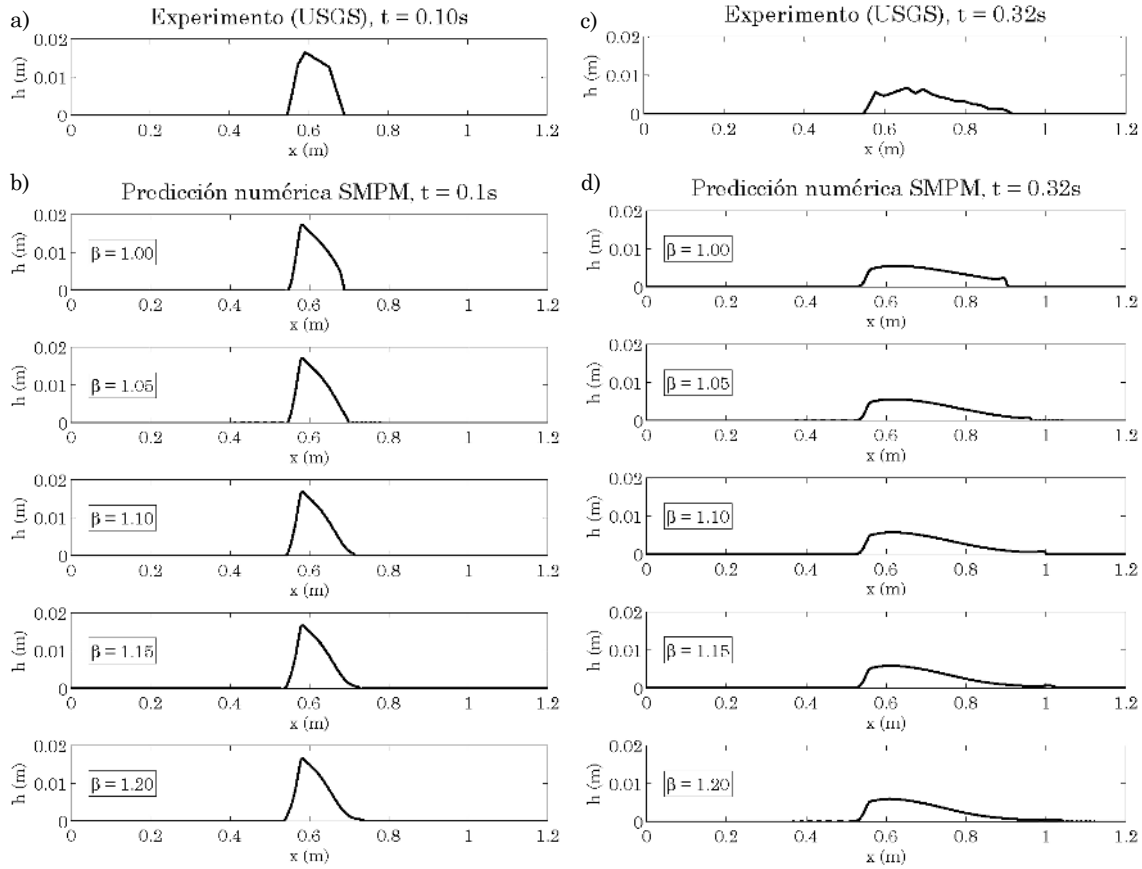


Figura 6.18: Comparación de los diferentes factores de corrección de momentum con el experimento para $t=0.10$ s y $t=0.32$ s.

En la Figura 6.19c cuando $t = 0.93$ s se puede ver que gran parte del depósito de material granular ya se ha formado. En la Figura 6.19d se puede ver que si $\beta = 1.0 - 1.15$ se genera una buena predicción del depósito y de la cola, aunque en todos los resultados numéricos la cola del flujo es más prolongada que en el experimento y aún más si $\beta = 1.2$. Este comportamiento en donde se prolonga la cola del flujo granular también se aprecia en los resultados presentados en Hutter et al. (2005). Por otra parte, en la zona de llegada del material de la cola al depósito se puede presentar una oscilación cuando $\beta = 1.0 -$

1.10, debida al método numérico implementado en este trabajo siendo un precursor la alta pendiente de esta zona.

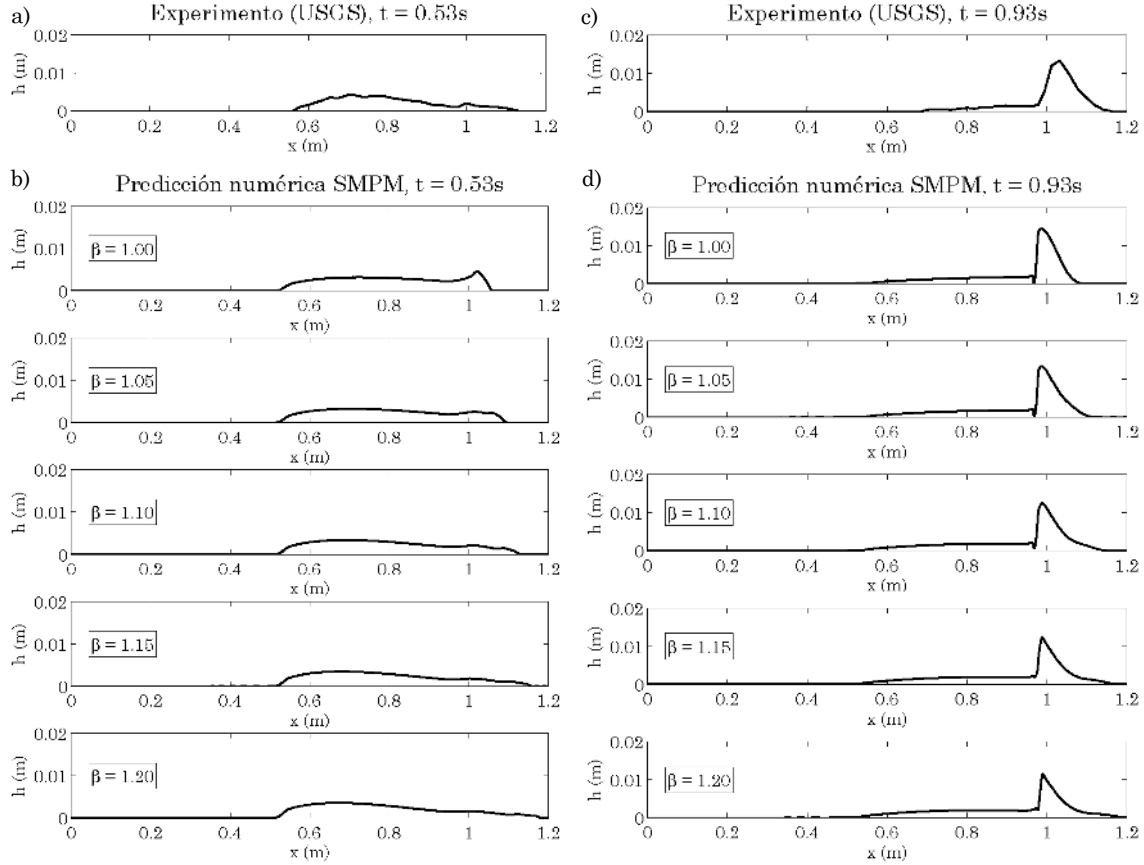


Figura 6.19: Comparación de los diferentes factores de corrección de momentum con el experimento para $t = 0.53$ s y $t = 0.93$ s.

La Figura 6.20a muestra el perfil del depósito en el centro del canal capturados en el experimento del USGS para $t = 1.50$ s. La Figura 6.20b presentan las predicciones numéricas del perfil del depósito en el centro del canal en $t = 1.50$ s con diferentes factores de corrección de momentum. La mejor predicción del depósito se tiene cuando $\beta = 1.0$ ya que se presenta la cola más pequeña en el depósito respecto al uso de los otros factores de corrección, mientras que el depósito no tiene dicha cola en el depósito. Además, las máximas alturas del depósito tienen mayor proximidad al experimento cuando $\beta = 1.0$.

Con esta prueba para el factor de corrección de momentum se puede concluir que tanto para instantes de tiempo muy cercanos a la liberación del material granular como para el depósito, la mejor opción para representar estos momentos del flujo es un $\beta = 1.0$. Esto evita la formación de un frente de flujo cóncavo tan pronto se libera el material y la elongación

de la cola en el depósito, resultados que contradirían la afirmación presentada al inicio de esta sección, planteada por (Pudasaini and Hutter, 2007). Sin embargo, se deja abierta la posibilidad de realizar muchas más pruebas, incluyendo la implementación de otros modelos con el fin de observar cambios en la predicción del flujo en función del factor de corrección de momentum. Si se trata de representar de una mejor manera la distribución de material durante el flujo, el uso de $\beta > 1.0$ brinda una mejor predicción especialmente de la forma del frente de flujo, tornándolo más suave como sucede en el experimento.

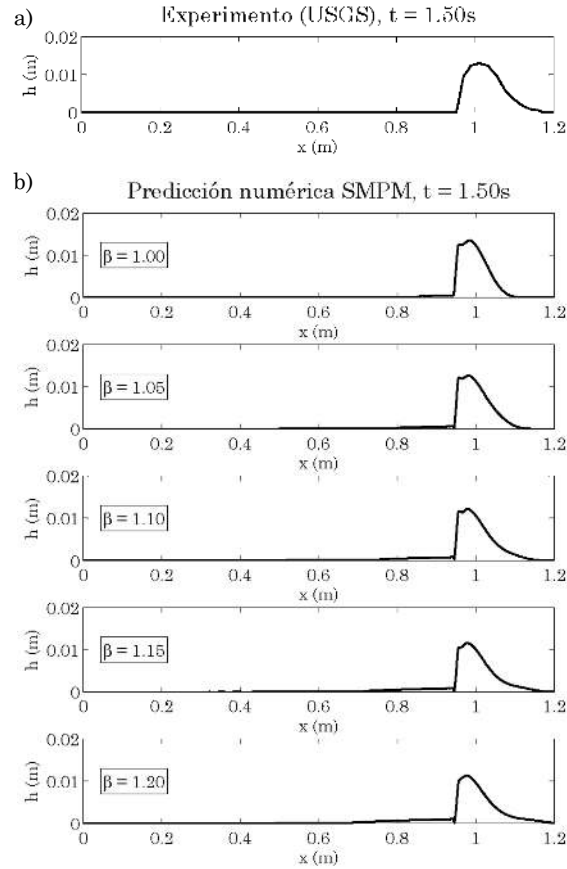


Figura 6.20: Comparación de los diferentes factores de corrección de momentum con el experimento para $t = 1.50$ s.

En las Figuras 6.18 - 6.20 b y d se aprecia que para valores de $\beta = 1.0$ tiende a desarrollarse un frente de flujo más vertical que para $\beta > 1.0$. La explicación para este comportamiento podría ser que la suposición de un perfil de velocidad uniforme está claramente representado por la pendiente del frente de flujo, es decir, si la velocidad es igual en toda la profundidad del flujo podría verse reflejado en la distribución de material en el frente de flujo. De modo que para un perfil de velocidad constante ($\beta = 1.0$), el frente de

flujo tiende a “verticalizarse”, tomando la forma de un bloque que se desliza por el plano inclinado. Esto también se puede ver en los resultados de Hutter et al. (2005) cuando se utiliza un $\beta = 1.0$ mientras se genera el depósito de material granular.

También la afectación del factor de corrección de momentum al frente de flujo se puede ver cuando $\beta > 1.0$. Si $\beta > 1.0$ el frente de flujo se torna más suave. Si se supone que el perfil de velocidad no es constante ($\beta > 1.0$) quiere decir que las zonas con mayor altura viajarían más rápido que el material que se encuentra en la proximidad al lecho. Lo anterior sucedería si se supone que el ángulo de fricción en el lecho y de fricción interna son iguales ($\phi_{bed} = \phi_{int}$). Esto de alguna manera redistribuiría el material en el frente de flujo, tornándolo suave como se ve en las Figuras 6.18 - 6.20 b y d. Si $\phi_{bed} < \phi_{int}$ el material que esté adyacente al lecho podría viajar más rápido debido a que el lecho le ofrece menor resistencia al flujo que el mismo material. Estas hipótesis se pueden verificar o descartar con la medición del perfil de velocidades del flujo granular en donde se tenga ángulos de fricción iguales y diferentes entre el lecho y el material que fluye.

6.1.6. Análisis del coeficiente de presión lateral de tierras ($k_{act/pas}$)

El coeficiente de presión lateral de tierras es muy importante ya que relaciona los esfuerzos verticales con los esfuerzos horizontales del flujo granular. En esta sección se presenta la comparación de la solución numérica dada con la implementación de un coeficiente de presión lateral de tierras constante (Sección 2.3.4 - Ecuación 2.82), como se ha venido desarrollando hasta ahora y la solución dada por la implementación de un coeficiente de presión lateral de tierras regularizado (Sección 2.3.4.1).

Las Figuras 6.21a y b presentan el experimento del flujo granular elaborado por el USGS. Las Figuras 6.21c y d muestran la predicción numérica de flujos granular con la implementación de un coeficiente de presión de tierras constante y regularizado, respectivamente. En la Figura 6.21c se puede ver como la implementación de un coeficiente de presión de tierras constante presenta simetría y una buena aproximación numérica frente al experimento. La Figura 6.21d muestra que la implementación de un coeficiente de presión lateral de tierras regularizado puede generar asimetría en la solución y muchas oscilaciones. Aun cuando se implementa un coeficiente de presión lateral de tierras regularizado en donde se diferencia los dos estados de esfuerzos, dilatación y contracción, para un alto refinamiento espacial ($N = 8$, $Sub_x = 108$ y $Sub_y = 18$), produce oscilaciones que no se presentan en el experimento, además de la asimetría en la solución.

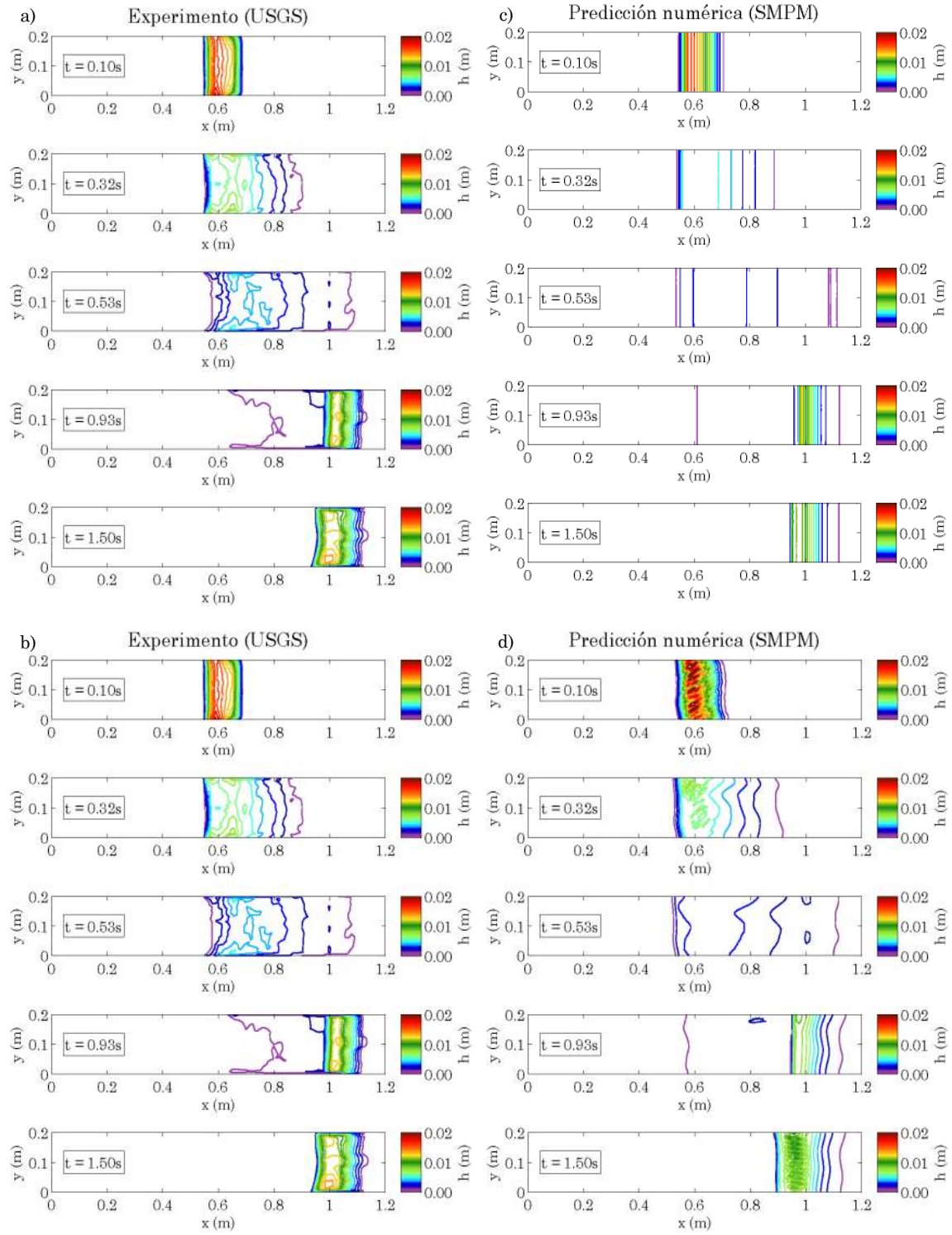


Figura 6.21: Comparación del experimento del flujo granular (a y b), con dos formulaciones para el coeficiente de presión lateral de tierras, constante (c) y regularizado (d), con un alto refinamiento espacial ($N = 8$, $Sub_x = 108$ y $Sub_y = 18$).

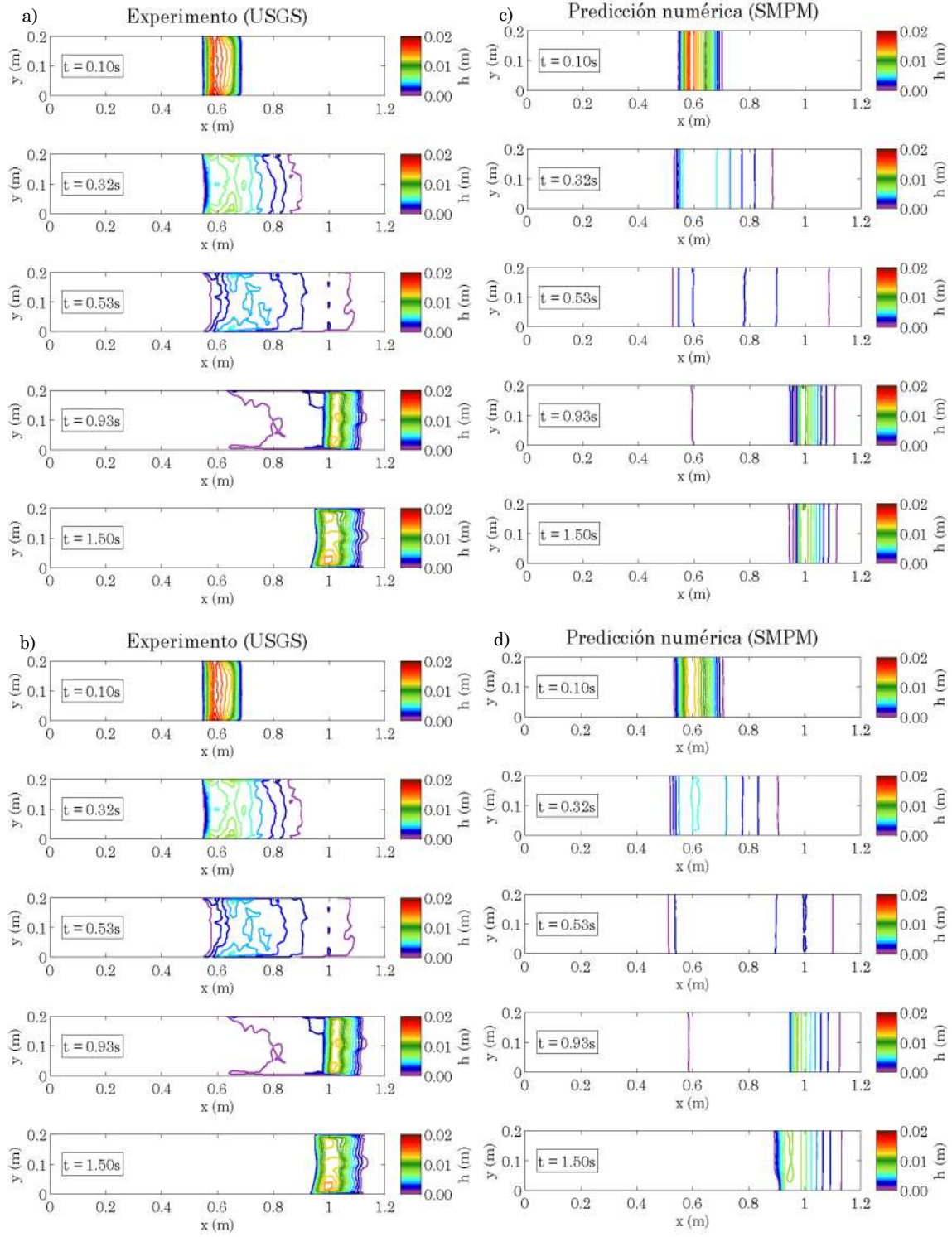


Figura 6.22: Comparación del experimento del flujo granular (a y b), con dos formulaciones para el coeficiente de presión lateral de tierras, constante (c) y regularizado (d), con un bajo refinamiento espacial ($N = 6$, $Sub_x = 60$ y $Sub_y = 10$).

La Figura 6.22a y b presentan el experimento del flujo granular elaborado por el USGS. Las Figuras 6.21c y d muestran la predicción numérica de flujos granular con la implementación de un coeficiente de presión de tierras constante y regularizado, respectivamente, con un refinamiento más bajo ($N = 6$, $Sub_x = 60$ y $Sub_y = 10$) que el presentado en la Figura 6.21 a y b. El uso de este bajo refinamiento espacial reduce por completo las oscilaciones indeseadas que se presentan cuando se tiene un alto refinamiento espacial, tal como se presenta en la Figura 6.21c. Sin embargo, se sigue presentando asimetría en la solución, por lo que se puede deducir que el uso de un coeficiente de presión lateral de tierras regularizado potencializa notablemente la aparición de asimetrías en la solución, posiblemente provenientes de las derivadas de la velocidad.

Pese a los problemas que genera la solución del conjunto de ecuaciones con un coeficiente lateral de tierras regularizado, este permite representar mejor los procesos físicos que suceden en este tipo de flujo, logrando así diferenciar los dos estados de esfuerzos cuando hay dilatación o compresión del material. Mientras que el uso de un coeficiente lateral de tierras constante o único indica que no se presentan zonas de dilatación o contracción en el flujo. Esto no sucede realmente y se puede explicar con los siguientes ejemplos: (a) una vez se abre la compuerta las máximas alturas del material empieza a disminuir (i.e., sufre adelgazamiento) iniciando así el flujo. (b) cuando se inicia la formación del depósito, el material que está en el frente del flujo empieza a retener el material que viene de la cola ejerciendo compresión sobre este de modo que en el depósito se empieza a acumular material (i.e., sufre engrosamiento). Estas dos explicaciones evidencian que la elección de un coeficiente de presión lateral de tierras constante no representa de forma adecuada el flujo desde el punto de vista físico.

Otra forma de observar que la elección de un coeficiente de presión lateral de tierras constante no es la mejor desde el punto de vista físico es con el experimento presentado en Pudasaini and Hutter (2007), donde se puede apreciar que las velocidades pueden variar notablemente de un punto a otro.

6.2. Predicción analítica

En esta sección se presenta la predicción analítica para el flujo granular que desciende por una pendiente, en donde se obtiene la posición y velocidad (Ecuaciones 3.26 y 3.37) en función del tiempo. Los resultados analíticos se comparan con la posición y velocidad del centro de masa de la solución numérica, calculado mediante dos alternativas como se presenta en la Sección 4.9 (Ecuaciones 4.42 4.43 y 4.45).

La posición inicial del centro de masa para la solución analítica es 0.4 m pendiente arriba de la zona horizontal. La profundidad del flujo es constante en el espacio y tiempo de 0.10 m. Los parámetros de esta predicción se presentan en la Tabla 5.1. Las condiciones

iniciales, velocidad y tiempo son iguales a cero (Ecuación 6.1).

$$\bar{u}(0) = 0 \text{ m/s}, \quad x(0) = 0.6 \text{ m}, \quad t_0 = 0 \text{ s} \quad (6.1)$$

La Figura 6.23 presenta la comparación de la predicción analítica y la predicción numérica generada por el método espectral. En la Figura 6.23a se presenta la base topográfica y la posición final del centro de masa del flujo granular pronosticado por la solución analítica. La Figura 6.23b presenta la predicción analítica y numérica de la posición del centro de masa en función del tiempo. La Figura 6.23c compara la predicción analítica de la velocidad en función de tiempo, con la velocidad del centro de masa generado por la solución numérica (Sección 4.9 - Ecuación 4.42), y el centro de velocidades del flujo granular (Sección 4.9 - Ecuación 4.45).

En la Figura 6.23b se puede ver que la solución analítica predice de una forma muy aproximada la posición final del depósito del flujo granular, en comparación con la posición del centro de masa del depósito de la solución numérica. Sin embargo, la curva de la solución analítica no sigue de manera rigurosa la curva de la solución numérica para determinar la posición del centro de masa en función del tiempo.

En la Figura 6.23c se puede ver que la predicción analítica de la velocidad en función de tiempo es sobreestimada respecto a la predicción numérica de la velocidad del centro de masa y del centro de velocidad en la dirección x . Según la predicción analítica el flujo granular se frena por completo en un tiempo mucho menor al obtenido por la predicción numérica. Los dos métodos empleados para determinar la velocidad del centro de masa presentan un comportamiento semejante, aunque el cálculo de la velocidad mediante la diferenciación de la posición del centro de masa presenta algunas oscilaciones (línea discontinua).

Comúnmente se comparan las predicciones generadas por la solución de un conjunto de ecuaciones mediante el uso de un método numérico con soluciones analíticas con el fin de determinar el grado de precisión del método numérico. Este objetivo no se puede satisfacer mediante esta comparación, debido a las diferencias entre la formulación analítica y la solución numérica dada para el conjunto de ecuaciones. La solución analítica es presentada para un caso específico en una sola dimensión, sin divergencia de velocidad en el espacio, con un espesor constante en el tiempo y el espacio, y presión de poros constante. Estos supuestos reducen el conjunto de ecuaciones para el flujo de material desagregado a una sola ecuación, que además reduce la mayoría de los términos fuente encargados de la disipación de la energía. Sin embargo, esta comparación permite determinar que la predicción que brinda la solución analítica está en el mismo orden de magnitud frente a la solución numérica, a pesar que la solución analítica es notablemente reducida.

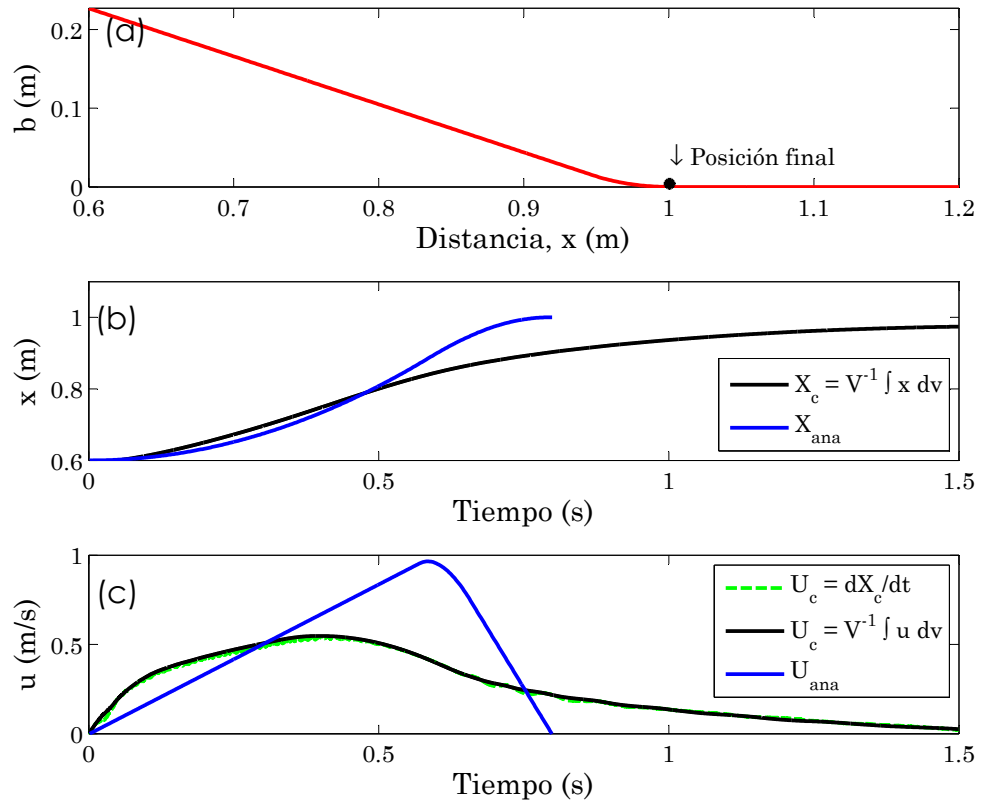


Figura 6.23: (a) base topográfica y posición final del flujo granular representado con un asterisco. (b) predicción analítica y numérica de la posición en cada instante de tiempo, y (c) predicción analítica y numérica de la velocidad del centro de masa del flujo granular.

6.3. Discusión

6.3.1. Error del método numérico

Para el caso del flujo granular que desciende por un canal rectangular, el error por conservación de masa no mejora conforme se aumenta el “ h -refinamiento” o el “ p -refinamiento”, presentando un comportamiento no monotónico si “ p -refinamiento” es $N < 17$, mientras que para $N \geq 17$ la conservación de la masa varía de forma monotónica. El orden del error por conservación de masa para este caso es del orden de $O(10^0)$ - $O(10^{-3})$, un error muy alto en comparación con los ordenes de magnitud presentados en Escobar-Vargas et al. (2012). Esto ocurre si se implementan tanto las condiciones de frontera deslizantes (i.e., la velocidad en la dirección paralela al flujo en las paredes del canal es dado por la solución numérica) como las antideslizantes (i.e., la velocidad en la dirección paralela al flujo en las paredes del canal se impone como cero). El alto error relativo por conservación de masa presentado por las soluciones y el comportamiento no monotónico de este dificulta la elección de un refinamiento adecuado que permita aprovechar las bondades de alta precisión de los métodos espectrales.

Es importante calcular la conservación de la energía cuando se trata de la solución de las ecuaciones de aguas someras invisidas, de modo que la pérdida de energía deba ser tan baja como lo permita la precisión del computador si se utilizan métodos espectrales. Las ecuaciones de flujos de material desagregado incluyen términos fuente encargados de disipar la energía del sistema, por lo que se presenta gran diferencia entre la energía inicial y final. Sin embargo, el presentar la pérdida de energía permite ver la diferencia de la solución para diferentes refinamientos espaciales. La energía final para diferentes “ h -refinamiento”, no varía en ordenes de magnitud cuando $N \geq 8$, excepto algunos casos. Esto indica que el uso de altos polinomios de Legendre permiten encontrar soluciones semejantes en cuanto a la conservación de la energía. Esto ocurre si se implementan las condiciones de frontera deslizantes y antideslizantes.

Para mantener la condición de estabilidad del método, se requiere un CFL promedio < 0.5 en todo el dominio. Aunque también es importante tener control sobre el CFL máximo de la solución. La imposición del seguimiento de la frontera del flujo (Sección 4.4.2) reduce notablemente el CFL promedio, ya que en gran parte del dominio el sistema de ecuaciones sufre una solución trivial (i.e., $0 = 0$, cuando $h = 0$). El observar el CFL máximo permite ver los alcances de estabilidad del método espectral utilizado en este trabajo, aun cuando este valor se da solamente en un punto del dominio espacial y en un solo instante de tiempo.

El alto error numérico presentado en la solución del flujo granular que desciende por una pendiente puede ser justificado debido a la pendiente y las discontinuidades impuestas en la condición inicial o desarrolladas por la solución. Lo anterior se argumenta debido a que si la solución de las ecuaciones de flujos de material desagregado se realiza sin gradiente

topográfico y para el colapso de una Gaussiana de arena se puede conseguir errores relativos en la conservación de la masa hasta del orden de $O(10^{-12})$. Esto se puede corroborar con la solución del colapso de un cilindro vertical de arena, sin gradiente topográfico, consiguiendo así errores aproximados a $O(10^{-5})$.

El uso de una solución trivial, $0 = 0$, cuando $h = 0$ para la ecuación de conservación de momentum, incrementa el error por conservación de masa. Esto se debe a la necesidad de mantener una solución estable mediante la definición de una tolerancia $\epsilon = 10^{-4}$, en donde las nuevas velocidades son calculadas en puntos que tienen material solo si $h^{n+1} > \epsilon$. Esta aproximación hace que se pierda masa en algunas zonas en cada instante de tiempo, incrementando así el error numérico. Esto se puede ver al solucionar el sistema de ecuaciones sin gradiente topográfico y condiciones iniciales que presentan o desarrollan discontinuidades (e.g., cilindro) mediante el uso de dos opciones para la profundidad promedio. Primero, se soluciona el sistema de ecuaciones utilizando una profundidad promedio de material granular bajo el cilindro de arena (e.g., $H_o = 1$ m), evitando así utilizar la solución trivial y la tolerancia definida $\epsilon = 10^{-4}$, con lo cual se consigue un error en la conservación de la masa del orden de $O(10^{-5})$. Segundo, se soluciona el sistema de ecuaciones sin una profundidad promedio para el mismo cilindro de arena (i.e., $H_o = 0$ m), con lo cual se consigue un error en la conservación de la masa del orden de $O(10^{-2})$. De este modo se puede ver que la diferencia entre utilizar o no una profundidad promedio es de 3 ordenes de magnitud. Con esto se puede concluir que para el colapso del cilindro sobre una base horizontal (i.e., sin gradiente topográfico), utilizar la profundidad promedio proporciona una solución con menos error numérico.

Sin embargo, el uso de una profundidad promedio conlleva a otro problema si se tiene gradiente topográfico. Cuando se tiene gradiente topográfico el componente gravitacional horizontal es diferente de cero. Bajo estas condiciones y al utilizar aunque sea una muy pequeña capa de material en todo el dominio computacional (i.e., $H_o \geq 10^{-3}$ m), la solución del sistema de ecuaciones presenta hundimientos y levantamientos en las fronteras del dominio computacional. Estos levantamientos y hundimientos son causados específicamente por el componente horizontal de la gravedad. Además, la opción de una capa delgada de material en todo el dominio hace que físicamente la simulación no sea correspondiente al experimento del flujo granular. De esta manera es descartada la opción de usar una pequeña capa de material en todo el dominio para solucionar el problema del flujo granular que desciende por un canal rectangular.

6.3.2. Fronteras y parámetros

El uso de las condiciones de frontera deslizante no predice de forma adecuada la cola del flujo granular, ya que no se presenta “adhesión” de material a las paredes laterales del canal como sucede en el experimento, sin embargo, el depósito de material en la zona

horizontal del canal rectangular presenta una predicción muy satisfactoria, en comparación con el experimento. Las condiciones de frontera antideslizantes permiten predecir de una forma apropiada para la cola del flujo mientras el material desciende pendiente abajo. La “adhesión” de material a las paredes en la predicción numérica es semejante a lo capturado por el experimento. Pero, el depósito no presenta la mejor predicción, ya que esta imposición genera una zona de depósito de material cercano a las paredes laterales que no se presenta en el experimento.

Ninguna de las dos condiciones de frontera tratadas en este trabajo presentan una predicción completamente satisfactoria en cuanto a la predicción de la distribución de material cercano a las paredes laterales, tanto en el depósito como en el transcurso del movimiento de la masa. Esto realza la importancia de explorar ya sea la implementación de otros modelos constitutivos para el cálculo de los esfuerzos debidos a los sólidos y/o la imposición de otras condiciones de frontera que describan de una manera adecuada la distribución de material cercano a las fronteras durante el movimiento y el depósito.

Las pruebas realizadas al cambio del perfil de la distribución de la masa granular mediante la imposición de 5 valores diferentes para el factor de corrección de momentum permite concluir que tanto para instantes de tiempo inmediatamente posteriores a la liberación del flujo de material granular como para el depósito, el valor del factor de corrección de momentum más adecuado es $\beta = 1.0$. Pero el uso de un factor de corrección de momentum unitario apresura la llegada de material a la zona del depósito y la generación del mismo, además de la formación de un frente de flujo muy vertical en comparación con el experimento mientras este desciende por la pendiente. Si se trata de representar de una mejor manera la distribución de material durante el flujo y mitigar la generación prematura del depósito, el uso de $\beta > 1.0$ brinda una mejor predicción especialmente la forma del perfil del frente de flujo, tornándolo más suave como sucede en el experimento.

La teoría de Savage and Hutter (1989) para avalanchas granulares supone que el material granular está en cualquiera de los dos estados de esfuerzos límites, dependiendo de si la masa se dilata o contrae en dirección paralela a la base del flujo. Esta transición genera discontinuidades en esfuerzos entre regiones que se dilatan o contraen (Sección 2.3.4). Estas discontinuidades introducidas sobre todo en la velocidad inestabilizan por completo la solución numérica dada por el método penalizado de multidominios espectrales. Este problema hace necesario el uso de un esquema de regularización para el coeficiente de presión lateral de tierra. Sin embargo, el coeficiente de presión lateral de tierras regularizado potencializa la aparición de una solución numérica asimétrica.

La implementación de un coeficiente de presión lateral de tierras constante, en donde se supone una máxima rugosidad en el lecho (donde se puede asumir que $\phi_{bed} = \phi_{int}$), indicando que un bloque de material de Coulomb se mueve pendiente abajo sin la presencia de adelgazamientos o engrosamientos en el espesor del flujo, brinda una solución estable,

sin oscilaciones indeseadas y sin asimetría en la solución, como puede suceder con el uso de un coeficiente de presión lateral de tierras regularizado. Pero el uso de un coeficiente lateral de tierras constante no es la mejor elección desde el punto de vista físico para representar el estado de esfuerzos del material. Ya que el material si sufre adelgazamientos y engrosamientos en el espesor del flujo en todos los momentos, principalmente al inicio en la liberación y en la formación del depósito.

Casi todos los modelos publicados de deslizamiento y flujos de detritos simulan el comienzo de la dinámica de avalanchas mediante el uso de condiciones iniciales de rotura de una presa, es decir, los modelos especifican un gran desequilibrio fuerzas inicial, pero artificialmente retienen el movimiento hasta que el modelador emite un comando (Iverson and George, 2010). En casos extremos, los modelos utilizan ángulos de fricción basal $<10^\circ$ para simular el movimiento, mientras que los valores $>30^\circ$ puede ser necesarios para equilibrar las fuerzas en fuertes pendientes en sitios de iniciación (Iverson and George, 2010). A pesar de la falta de justificación física de este desajuste, las publicaciones comúnmente ignoran su significado y en su lugar miden la capacidad predictiva de un modelo por el hecho de su salida en las distribuciones del depósito (Iverson and George, 2010). Es de resaltar que en este trabajo no fue necesario recurrir a estos artificios, ya que el modelo permite realizar un estado de equilibrio de fuerzas en función de parámetros como el ángulo de fricción del lecho e interno del material granular y la pendiente. Estos parámetros hacen que naturalmente la condición inicial sea inestable, permitiendo así que el material fluya pendiente abajo hasta generar el depósito en la zona horizontal.

También se hizo un análisis de la influencia de cada uno de los parámetros utilizados para modelar los flujo de material desagregado en contraste con las ecuaciones de aguas someras invicidas. Con esto se encontró que el coeficiente de presión lateral de tierras ($k_{x(act/pas)}$ y $k_{y(act/pas)}$) que se encuentra en la parte advectiva de las ecuaciones (Ecuaciones 4.5 y 4.6) no tiene una influencia importante en la solución de las ecuaciones, aclarando que para el flujo granular la fracción de presión de poros es cero ($\lambda = 0$). El componente gravitacional en la dirección z (g_z) sobre la parte advectiva de las ecuaciones hace que la condición inicial pueda caer, de modo que el material puede sufrir una redistribución sobre el dominio computacional.

Para los términos fuente de las ecuaciones de flujos de material desagregado (Ecuaciones 4.8 y 4.9), los componentes gravitacionales horizontales ($g_x h$ y $g_y h$) son muy importantes ya que impulsan el material de modo que este pueda desplazarse predominantemente en cualquier dirección (x y y). Contrario a los componentes horizontales de la gravedad, los términos más importantes de esfuerzos encargados de la disipación de la energía son los esfuerzos debidos a los sólidos, que ofrecen una clara resistencia al flujo. Entre los esfuerzos cortantes transversales ($-sgn(\partial \bar{u}/\partial y) h k_{x_{act/pas}} (\partial/\partial y) [g_z h (1 - \lambda)] \sin \phi_{int}$ y $-sgn(\partial \bar{v}/\partial x) h k_{y_{act/pas}} (\partial/\partial x) [g_z h (1 - \lambda)] \sin \phi_{int}$) y los esfuerzos cortantes en el lecho

$(-sgn(\bar{u})(1 - \lambda)[g_z + \bar{u}^2(\partial\theta_x/\partial x)]h \tan \phi_{bed}$ y $-sgn(\bar{v})(1 - \lambda)[g_z + \bar{v}^2(\partial\theta_y/\partial y)]h \tan \phi_{bed}$) se presenta un aporte mayor en los esfuerzos cortantes del lecho. Este es el encargado de detener por completo la dinámica del flujo haciendo que el material entre en reposo en cuanto las condiciones lo permitan (e.g., topografía y ángulos de fricción). Los esfuerzos cortantes transversales aunque también son importantes, estos pueden permitir que la onda siga desplazándose por mucho más tiempo. Esto refuerza las hipótesis planteadas en este capítulo frente a las condiciones de frontera. La carencia de una buena predicción de la distribución del material adyacente a las paredes laterales del flujo indica que los esfuerzos transversales no se está modelando de forma adecuada, y es cuando se realza la importancia de explorar otros modelos constitutivos para modelar los esfuerzos debidos a los sólidos.

Los términos debido a los esfuerzos del fluido ofrecen una resistencia muy baja en comparación con la resistencia que ofrecen los términos de esfuerzos de los sólidos. Aun cuando se tenga una viscosidad muy alta (e.g, 10 Pa-s) y todos los términos debido al esfuerzos de los fluidos $[-(3n_f\mu/\rho)(\bar{u}/h) + (n_f\mu h/\rho)(\partial^2\bar{u}/\partial x^2) + (n_f\mu h/\rho)(\partial^2\bar{u}/\partial y^2)$ y $-(3n_f\mu/\rho)(\bar{v}/h) + (n_f\mu h/\rho)(\partial^2\bar{v}/\partial y^2) + (n_f\mu h/\rho)(\partial^2\bar{v}/\partial x^2)]$ actuando sobre la solución de las ecuaciones de flujos de material desagregado a la vez que se excluyen los esfuerzos por los sólidos, la propagación de la onda se desplaza igual de rápido y con el mismo comportamiento que si se solucionan las ecuaciones de aguas someras invicidas. Estas observaciones podría dar pie a la eliminación de estos términos que en realidad no ofrecen resistencia al movimiento del fluido. Sin embargo, es importante realizar más análisis para conocer con precisión el aporte de cada uno de los términos de esfuerzos tanto de los sólidos como del fluido, con lo cual se puede sustentar ajustes dirigidos a mejorar el modelo.

6.3.3. Solución analítica

La reducción del conjunto de ecuaciones bidimensionales para flujos de material desagregado a una sola ecuación unidimensional sin muchos de los términos fuente considerados en la formulación bidimensional para generar la solución analítica, no permiten juzgar rigurosamente la precisión del método numérico empleado en este trabajo para solucionar el conjunto de ecuaciones diferenciales parciales. Esta comparación permite determinar que tan bondadosa es la solución analítica a la numérica pese al gran número de supuestos adicionales propuestos para llegar a dicha solución. De manera que para el experimento de pequeña escala en el canal rectangular, la solución analítica por lo menos se encuentra en el mismo orden de magnitud que la solución dada por el conjunto de ecuaciones bidimensionales, solucionadas numéricamente.

Conclusiones

La solución de ecuaciones de flujos de material desagregado con métodos espectrales hasta ahora no ha sido reportada. Este trabajo permite identificar bondades y falencias de un método espectral (método penalizado de multidominios espectrales) al solucionar este conjunto de ecuaciones hiperbólicas con términos fuente (ecuaciones de flujo de material desagregado), movimiento predominante en una dirección y condiciones iniciales discontinuas o que desarrollan discontinuidad.

El método penalizado de multidominios espectrales soluciona de forma adecuada el conjunto de ecuaciones de flujos de material desagregado desarrolladas por Iverson and Denlinger (2001), generando así predicciones comparables con los datos experimentales y otras predicciones numéricas. Tanto al inicio del flujo como el depósito son predichas de forma adecuada por el conjunto de ecuaciones solucionadas con el método espectral. Una predicción acertada de la distribución del material se puede lograr mediante el ajuste de tres aspectos importantes que son: las condiciones de frontera, el factor de corrección de momentum y el coeficiente de presión lateral de tierras.

Las oscilaciones indeseadas que se presentar comúnmente en este método espectral pueden ser mitigadas mediante el uso de un filtro espectral como se desarrolló en este trabajo.

La discontinuidades en la condición inicial o desarrolladas durante el flujo y el uso de la tolerancia $\tau = 10^{-4}$ para el seguimiento de las fronteras del flujo cuando se presenta la solución trivial, $0 = 0$, en $h = 0$, debido a la ausencia de una profundidad promedio de material en todo el dominio aumenta el error por conservación de masa notablemente. De modo que la bondad por la cual se recurre a los métodos espectrales queda abandonada.

Si en la solución de las ecuaciones de flujos de material desagregado se utiliza una profundidad promedio, acompañado del gradiente topográfico, en donde se tienen valores diferentes de cero en los componentes horizontales de la gravedad, se presentan hundimientos y levantamientos indeseados en las fronteras del dominio computacional.

Las soluciones analíticas no permiten juzgar rigurosamente la precisión del método pe-

nalizado de multidominios espectrales empleado para solucionar el conjunto de ecuaciones de flujos de material desagregado. Sin embargo, esta comparación se consigue determinar que tan bondadosa es la solución analítica respecto a la numérica pese al gran número de supuestos adicionales propuestos para llegar a dicha solución. Para el experimento de pequeña escala en el canal rectangular, la solución analítica por lo menos se encuentra en el mismo orden de magnitud que la solución dada por el conjunto de ecuaciones bidimensionales solucionadas numéricamente.

La solución numérica generada por el método penalizado de multidominios espectrales (SMPM) predice tanto la dinámica (e.g., frente y cola del flujo) como el depósito de modo semejante a la solución generada por el método Harten-Lax-vanLeer-Contact (HLLC) presentado en Denlinger and Iverson (2001). Esto siempre y cuando se utilicen las condiciones de frontera antideslizantes.

Las condiciones de frontera deslizantes y antideslizantes modifican notablemente la distribución de la masa que fluye a través del canal rectangular. La solución numérica generada para condiciones de frontera deslizantes proporciona una mejor predicción para el depósito que las condiciones de frontera antideslizantes, ya que con esta última condición se generan zonas de depósito que no se presentan en el experimento. La solución numérica con las condiciones antideslizantes genera mejores predicciones para la dinámica del flujo granular, principalmente porque se consigue tener la forma de la cola semejante al experimento.

Para instantes de tiempo inmediatamente posteriores a la liberación del flujo de material granular y para el depósito, el valor del factor de corrección de momentum más adecuado es $\beta = 1.0$, a pesar que el uso de un factor de corrección de momentum unitario apresura la llegada de material a la zona del depósito. Si se trata de representar de una mejor manera la distribución de material durante el flujo y mitigar la generación prematura del depósito, el uso de $\beta > 1.0$ brinda una mejor predicción especialmente la forma del perfil del frente de flujo, tornándolo más suave como sucede en el experimento.

La inestabilidad de la solución del conjunto de ecuaciones para flujos de material desagregado introducida por el coeficiente de presión lateral de tierras discontinuo desarrollado por Savage and Hutter (1989), se puede anular mediante la regularización del coeficiente tal como se muestra en Tai and Gray (1998). La asimetría que se puede presentar en la solución del flujo de material desagregado es debida al coeficiente de presión lateral de tierras regularizado.

El uso de un coeficiente de presión lateral de tierras constante, brinda una solución más estable y simétrica, respecto a la solución brindada por el coeficiente de presión lateral de tierras regularizado, especialmente si se tiene refinamiento espacial muy alto. Sin embargo, un coeficiente de presión lateral de tierras constante no es la mejor opción desde el punto de vista físico, ya que se supone que no hay adelgazamiento y engrosamientos mientras el material fluye.

Trabajo futuro

En este trabajo se hizo énfasis en determinar las bondades y falencias del método penalizado de multidominios espectrales, pero además se utilizó un filtro espectral que no es propiamente un planteamiento del SMPM con el fin de mantener la estabilidad de la solución. Por esto se plantea la necesidad de estudiar la influencia del filtro espectral para casos suaves y discontinuos con el fin de encontrar alguna relación que permita establecer un uso adecuado del filtro en el orden de conseguir menor error por conservación de masa.

Debido a la ausencia de predicciones precisas en la distribución de material adyacente a las paredes laterales es importante explorar otras condiciones de fronteras a las que se trataron en este trabajo y/o la implementación de otros modelos constitutivos como los elasto-plásticos para tratar de capturar mejor la transmisión de esfuerzo de los sólidos.

A partir del análisis que se hizo a cada uno de los términos fuente encargados de la disipación de la energía, es importante realizar más pruebas para poder descartar los términos que realmente no estén aportando información y explorar la introducción de otros que permitan generar predicciones más precisas de los experimentos. Además es importante ejecutar otros casos de prueba de los cuales se tengan datos experimentales que permitan encontrar otros aspectos importantes para trabajar en el mejoramiento del modelo.

Bibliografía

- Blackburn, H. M. and Schmidt, S. (2003). Spectral element filtering techniques for large eddy simulation with dynamic estimation. *Journal of Computational Physics*, 186(2):610–629.
- Boyd, J. P. (2001). *Chebyshev and Fourier spectral methods*. Courier Dover Publications, Mineola, New York, 2nd edition.
- Bradford, S. F. and Sanders, B. F. (2002). Finite-volume model for shallow-water flooding of arbitrary topography. *Journal of Hydraulic Engineering*, 128(3):289–298.
- Cañizo, J. A. (2004). Derivación bajo la integral. A web site. <http://web.mat.bham.ac.uk/j.a.canizo/tex/>.
- Canuto, C. (2006). *Spectral methods fundamentals in single domains*. Scientific computation. Springer-Verlag, Berlin; New York, 2nd edition.
- Carslaw, H. S. and Jaeger, J. C. (1959). *Conduction of Heat in Solids*. Oxford University press, Oxford, 2nd edition.
- Cheng, J. D., Lin, L. L., and Lu, H. S. (2002). Influences of forests on water flows from headwater watersheds in taiwan. *Forest Ecology and Management*, 165(1-3):11–28.
- Costa, B. and Don, W. S. (2000). On the computation of high order pseudospectral derivatives. *Applied Numerical Mathematics*, 33(1):151–159.
- Coussot, P. and Meunier, M. (1996). Recognition, classification and mechanical description of debris flows. *Earth-Science Reviews*, 40(3):209–227.
- Dai, F. and Lee, C. (2001). Frequency–volume relation and prediction of rainfall-induced landslides. *Engineering Geology*, 59(3):209–227.
- D´ambrosio, D., Gregorio, S. D., and Iovine, G. (1999). Simulating debris flows through a hexagonal cellular automata model: Sciddica s 3–hex. *Natural Hazards and Earth System Sciences*, 3(6):545–559.

- De Toni, S. and Scotton, P. (2005). Two-dimensional mathematical and numerical model for the dynamics of granular avalanches. *Cold regions science and technology*, 43(1):36–48.
- Denlinger, R. P. and Iverson, R. M. (2001). Flow of variably fluidized granular masses across three-dimensional terrain: Numerical predictions and experimental tests. *Journal of Geophysical Research*, 106(B1):553–566.
- Denlinger, R. P. and Iverson, R. M. (2004). Granular avalanches across irregular three-dimensional terrain: 1. theory and computation. *Journal of Geophysical Research*, 109(F1).
- Edwards, C. H., Penney, D. E., Palmas Velasco, O. A., and Ibarra Mercado, V. H. (1996). *Calculo Con Geometria Analitica*. Prentice-Hall, México, 4th edition.
- Escobar-Vargas, J., Diamessis, P., and Giraldo, F. (2012). High-order discontinuous element-based schemes for the inviscid shallow water equations: Spectral multidomain penalty and discontinuous galerkin methods. *Applied Mathematics and Computation*, 218(9):4825–4848.
- Escobar-Vargas, J. A. (2012). *A spectral multidomain penalty method solver for enviromental flow processes*. PhD thesis, Cornell University, Ithaca, New York.
- Fletcher, C. (1991). *Computational techniques for fluid dynamics*, volume 1 of *Springer series in computational physics*. Springer-Verlag, Berlin; New York, 2nd edition.
- Funaro, D. (1992). *Polynomial approximation of differential equations*, volume 8. Springer-Verlag: Berlin, Heidelberg, Germany.
- Giraldo, F. and Warburton, T. (2008). A high-order triangular discontinuous galerkin oceanic shallow water model. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 56(7):899–925.
- Glade, T., Crozier, M., and Smith, P. (2000). Applying probability determination to refine landslide-triggering rainfall thresholds using an empirical. antecedent daily rainfall model. *Pure and Applied Geophysics*, 157(6-8):1059–1079.
- Gottlieb, S. (2005). On high order strong stability preserving runge–kutta and multi step time discretizations. *Journal on Scientific Computing*, 25(1):105–128.
- Gray, J., Wieland, M., and Hutter, K. (1999). Gravity-driven free surface flow of granular avalanches over complex basal topography. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 455(1985):93–138.

- Guzzetti, F., Peruccacci, S., Rossi, M., and Stark, C. P. (2008). The rainfall intensity–duration control of shallow landslides and debris flows: an update. *Landslides*, 5(1):3–17.
- Hesthaven, J. S. (2000). Spectral penalty methods. *Applied Numerical Mathematics*, 33(1):23–41.
- Hesthaven, J. S. and Gottlieb, A. D. (1996). A stable penalty method for the compressible navier-stokes equations: I. open boundary conditions. *Journal on Scientific Computing*, 17(3):579–612.
- Hesthaven, J. S. and Kirby, R. (2008). Filtering in legendre spectral methods. *Mathematics of Computation*, 77(263):1425–1452.
- Hungr, O., Evans, S., Bovis, M., and Hutchinson, J. (2001). A review of the classification of landslides of the flow type. *Environmental & Engineering Geoscience*, 7(3):221–238.
- Hutchinson, J. (1968). Mass movement. In *Geomorphology*, pages 688–696. Springer.
- Hutchinson, J. N. (1986). A sliding-consolidation model for flow slides. *Canadian Geotechnical Journal*, 23(2):115–126.
- Hutter, K. and Greve, R. (1993). Two-dimensional similarity solutions for finite-mass granular avalanches with coulomb-and viscous-type frictional resistance. *Journal of Glaciology*, 39(132):357–372.
- Hutter, K. and Koch, T. (1991). Motion of a granular avalanche in an exponentially curved chute: experiments and theoretical predictions. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 334(1633):93–138.
- Hutter, K., Koch, T., Pluüss, C., and Savage, S. (1995). The dynamics of avalanches of granular materials from initiation to runout. part ii. experiments. *Acta Mechanica*, 109(1-4):127–165.
- Hutter, K., Wang, Y., and Pudasaini, S. P. (2005). The savage–hutter avalanche model: how far can it be pushed? *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 363(1832):1507–1528.
- Iovine, G., Di Gregorio, S., Lupiano, V., et al. (2003). Debris-flow susceptibility assessment through cellular automata modeling: an example from 15? 16 december 1999 disaster at cervinara and san martino valle caudina (campania, southern italy). *Natural Hazards and Earth System Sciences*, 3(5):457–468.
- Iverson, R. M. (1997). The physics of debris flows. *Reviews of Geophysics*, 35(3):245–296.

- Iverson, R. M. (2000). Landslide triggering by rain infiltration. *Water resources research*, 36(7):1897–1910.
- Iverson, R. M. (2005). Debris-flow mechanics. In Jakob, M. and Hungr, O., editors, *Debris-flow Hazards and Related Phenomena*, pages 105–134. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.
- Iverson, R. M. (2014). Debris flows: behaviour and hazard assessment. *Geology Today*, 30(1):15–20.
- Iverson, R. M. and Denlinger, R. P. (2001). Flow of variably fluidized granular masses across three-dimensional terrain: 1. coulomb mixture theory. *Journal of Geophysical Research*, 106(B1):537–552.
- Iverson, R. M. and George, D. L. (2010). Modelling landslide and debris-flow motion: Confronting the dirty little secret. In *2010 GSA Denver Annual Meeting*.
- Jakob, M. (2005). A size classification for debris flows. *Engineering Geology*, 79(3):151–161.
- Kopriva, D. A. (1998). A staggered-grid multidomain spectral method for the compressible navier–stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 143(1):125–158.
- Koschdon, K. and Schäfer, M. (2003). A lagrangian-eulerian finite-volume method for simulating free surface flows of granular avalanches. In *Dynamic Response of Granular and Porous Materials under Large and Catastrophic Deformations*, pages 83–108. Springer.
- LeVeque, R. J. (2002). *Finite volume methods for hyperbolic problems*, volume 31. Cambridge university press.
- Li, C., Ma, T., Zhu, X., and Li, W. (2011). The power-law relationship between landslide occurrence and rainfall level. *Geomorphology*, 130(3):221–229.
- Liggett, J. A. (1994). *Fluid mechanics*. McGraw-Hill, Inc., New York.
- Major, J. J. and Iverson, R. M. (1999). Debris-flow deposition: Effects of pore-fluid pressure and friction concentrated at flow margins. *Geological Society of America Bulletin*, 111(10):1424–1434.
- Ouyang, C., He, S., Xu, Q., Luo, Y., and Zhang, W. (2013). A maccormack-tvd finite difference method to simulate the mass flow in mountainous terrain with variable computational domain. *Computers & Geosciences*, 52(0):1–10.
- Pudasaini, S. P. and Hutter, K. (2007). *Avalanche dynamics: dynamics of rapid flows of dense granular avalanches*. Springer, Berlin.

- Pudasaini, S. P., Wang, Y., and Hutter, K. (2005). Modelling debris flows down general channels. *Natural Hazards and Earth System Sciences*, 5(0):799–819.
- Quan Luna, B., Remaître, A., van Asch, T., Malet, J.-P., and van Westen, C. (2012). Analysis of debris flow behavior with a one dimensional run-out model incorporating entrainment. *Engineering Geology*, 128:63–75.
- Rickenmann, D., Laigle, D., McArdell, B. W., and Hübl, J. (2006). Comparison of 2D debris-flow simulation models with field events. *Computational Geosciences*, 10(2):241–264.
- Ruuth, S. (2006). Global optimization of explicit strong-stability-preserving runge-kutta methods. *Mathematics of Computation*, 75(253):183–207.
- Savage, S. B. (1984). The mechanics of rapid granular flows. *Archive of Applied Mechanics*, 24:289–366.
- Savage, S. B. and Hutter, K. (1989). The motion of a finite mass of granular material down a rough incline. *Journal of Fluid Mechanics*, 199:177–215.
- Schneider, H., Höfer, D., Irmeler, R., Daut, G., and Mäusbacher, R. (2010). Correlation between climate, man and debris flow events - a palynological approach. *Geomorphology*, 120(1):48–55.
- Shen, J., Tang, T., and Wang, L.-L. (2011). *Spectral methods: algorithms, analysis and applications*, volume 41. Springer-verlag: Berlin, Heidelberg.
- Slater, J. W. (2008). Examining spatial (grid) convergence.
- Spiegel, M. R. (1963). *Theory and problems of advanced calculus*. Schaum Outline Series, New York.
- Spiteri, R. J. and Ruuth, S. J. (2002). A new class of optimal high-order strongstability-preserving time discretization methods. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 40(0):469–491.
- Spivak, M. (2008). *Calculus*. Publish or Perish, Houston, Tex.
- Suárez, J. (2001). *Deslizamientos y estabilidad de taludes en zonas tropicales*. Universidad Industrial de Santander, Colombia, 2nd edition.
- Suárez, J. (2009). *Deslizamientos. Tomo I: Análisis Geotécnico*. Universidad Industrial de Santander, Colombia.

- Tai, Y. and Gray, J. (1998). Limiting stress states in granular avalanches. *Annals of Glaciology*, 26:272–276.
- Tai, Y.-C., Noelle, S., Gray, J., and Hutter, K. (2002). Shock-capturing and front-tracking methods for granular avalanches. *Journal of Computational Physics*, 175(1):269–301.
- Tan, W. (1992). *Shallow water hydrodynamics: mathematical theory and numerical solution for a two-dimensional system of shallow water equations*. Elsevier Oceanography Series. Water & Power Press ; Elsevier ; Distribution for the U.S.A. and Canada, Elsevier Science Pub. Co, Beijing, China : Amsterdam : New York, NY.
- Terlien, M. T. (1998). The determination of statistical and deterministic hydrological landslide-triggering thresholds. *Environmental geology*, 35(2-3):124–130.
- Teufelsbauer, H., Wang, Y., Chiou, M.-C., and Wu, W. (2009). Flow-obstacle interaction in rapid granular avalanches: Dem simulation and comparison with experiment. *Granular Matter*, 11(4):209–220.
- Trujillo-Vela, M. G. and Ramos, A. M. (2012). Modelo para la simulación de procesos de remoción en masa desagregados. comparación con el método de talud infinito. *Ciencia e Ingeniería Neogranadina*, 22(2):25–37.
- Uoane, T. R. (2011). Lattice boltzmann methods for shallow water ow applications. Master’s thesis, University of the Witwatersrand, Johannesburg, South Africa.
- Varnes, D. J. (1978). Slope movement types and processes. *Transportation Research Board Special Report*, (176):11–33.
- Vollmöller, P. (2004). A shock-capturing wave-propagation method for dry and saturated granular flows. *Journal of Computational Physics*, 199(1):150–174.
- Vreugdenhil, C. B. (1994). *Numerical Methods for Shallow-Water Flow*. Water Science and Technology Library. Springer Netherlands, Dordrecht.
- Wang, C., Li, S., and Esaki, T. (2008). GIS-based two-dimensional numerical simulation of rainfall-induced debris flow. *Natural Hazards and Earth System Sciences*, 8:47–58.
- Wang, Y., Hutter, K., and Pudasaini, S. P. (2004). The savage-hutter theory: A system of partial differential equations for avalanche flows of snow, debris, and mud. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik ZAMM*, 84(8):507–527.
- Weisstein, E. W. (2013). Leibniz integral rule. A web site. <http://mathworld.wolfram.com/LeibnizIntegralRule.html>.

- Wieland, M., Gray, J., and Hutter, K. (1999). Channelized free-surface flow of cohesionless granular avalanches in a chute with shallow lateral curvature. *Journal of Fluid Mechanics*, 392:73–100.

Apéndice A

Polinomios de Legendre y método de colocación

Los polinomios de Legendre son los polinomios ultraesféricos de Jacobi (Funaro, 1992). Esto es una función alternativa de los polinomios de Chebychev para problemas no periódicos (Boyd, 2001). Para definir los polinomios de Legendre de orden N , se pueden expresar mediante el uso de la fórmula de Rodrigues (Shen et al., 2011).

$$P_N(x) = \frac{1}{2^N N!} \frac{d^N}{dx^N} (x^2 - 1)^N \quad (\text{A.1})$$

donde $|x| \leq 1$. La fórmula de recurrencia de tres términos se da por la ecuación A.2 (Funaro, 1992; Shen et al., 2011).

$$P_N(x) = \frac{2N-1}{N} x P_{N-1}(x) - \frac{N-1}{N} P_{N-2}(x) \quad (\text{A.2})$$

La Figura A.1 muestra los polinomios de Legendre desde 0-th hasta 6-th orden, obtenidos con el uso de la fórmula de recurrencia (Ecuación A.2). Los polinomios de Legendre son no uniformes, con baja amplitud sobre la mayor parte del intervalo excepto en las capas límites extremadamente angosta, donde el polinomio se eleva a uno o cae en menos uno (Boyd, 2001). Los polinomios tienen un máximo local, tanto en $x = 1$ como $x = 0$ (Boyd, 2001).

Hay dos razones por las que esta falta de uniformidad y el error más pobre de los polinomios de Legendre no son particularmente molesto para los practicantes de elementos espectrales (Boyd, 2001). En primer lugar, el grado de los polinomios de cada elemento es más bien pequeño, rara vez superior a $N = 8$. En segundo lugar, la Figura A.2 muestra que las capas límite en el que el polinomio de Legendre es grande son muy delgadas. Sin

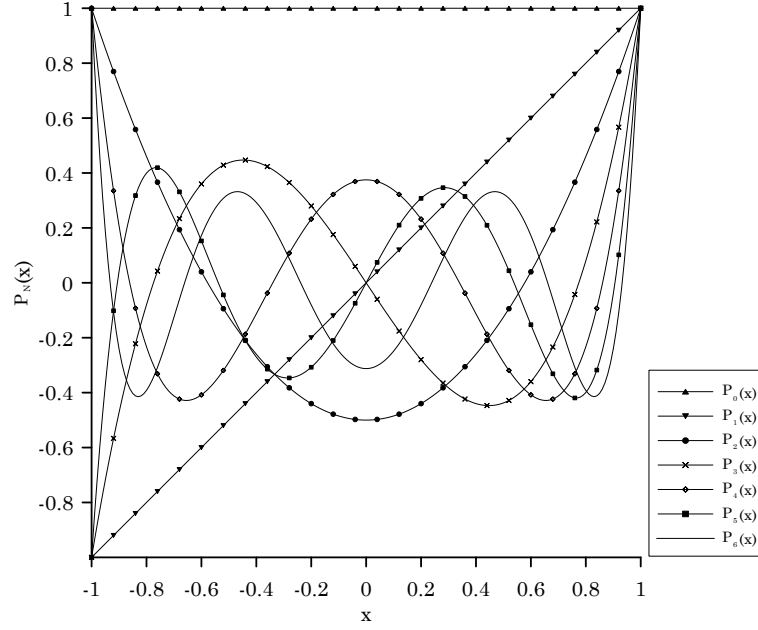


Figura A.1: Polinomios de Legendre para $0 \leq N \leq 6$, estimado con la formula de recurrencia (Ecuación A.2) (Canuto, 2006).

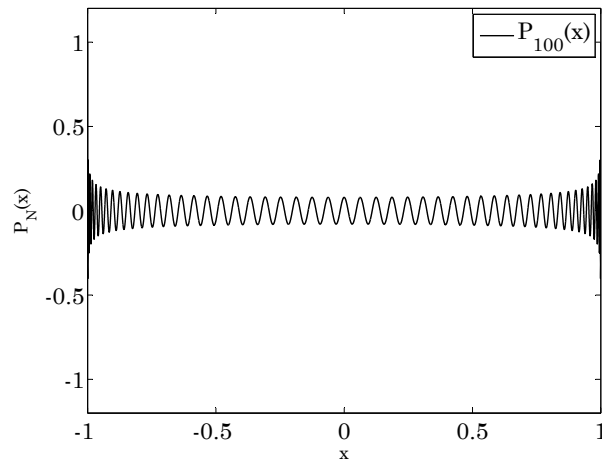


Figura A.2: Polinomios de Legendre para $N = 100$. También es un esquema que ilustra la forma de todos los polinomios de Legendre Boyd (2001)

embargo, las soluciones a los problemas de contorno se ven limitados por las condiciones de contorno (Boyd, 2001). Para los elementos espectrales, existe alguna restricción, incluso en las paredes interiores del subdominio porque las expansiones en cada elemento adyacente deben tener valores comunes en las paredes comunes. Por lo tanto, las expansiones de elementos espectrales en los polinomios de Legendre se ven limitados por las condiciones de frontera para estar cerca de la solución exacta precisamente en aquellas regiones en las que los errores en una serie de Legendre de otro modo son grande (Boyd, 2001).

Los puntos del método de colocación son dados por los puntos de Gauss-Lobatto-Legendre, definidos como las raíces del polinomio $(1 - x^2)P'_N(x)$. No existe una fórmula explícita conocida para estas raíces.

Asociado con los puntos de Gauss-Lobatto es la fórmula de cuadratura, afirmando que si $f(x)$ es un polinomio de grado $2N - 1$, entonces

$$\sum_{k=0}^N f(x_k) \omega_k = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \quad (\text{A.3})$$

donde x_k son los puntos de colocación de Gauss-Lobatto-Legendre (Figura A.3), y los pesos de Gauss-Lobatto, ω_k , son dados como

$$\omega_k = -\frac{2}{N+1} \frac{1}{P_N(x_k)P_{N-1}(x_k)} \quad , \quad 1 \leq k \leq N-1 \quad (\text{A.4})$$

$$\omega_0 = \omega_N = -\frac{2}{N(N+1)}$$

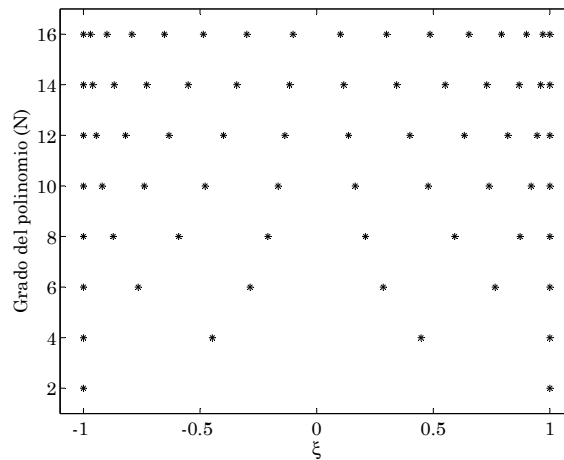


Figura A.3: Distribución de los puntos de Gauss-Lobatto-Legendre en función del grado del polinomio.

En un método de colocación de Legendre, la función, $f(x)$, se aproxima por una función de malla, $f_k = f(x_k)$, donde los puntos de la malla son los puntos de colocación de Gauss-Lobatto (Hesthaven and Gottlieb, 1996). De este modo, se construye un interpolador global de Legendre, I_N , para obtener la función de aproximación,

$$(I_N f)(x) = \sum_{i=0}^N f_k l_k(x)$$

donde los polinomios de interpolación Legendre-Lagrange son dados como

$$l_k(x) = -\frac{(1-x^2)P'_N(x)}{N(N+1)(x-x_k)P_N(x_k)}$$

La construcción

$$(I_N f)(x) = f_k$$

Para buscar ecuación para una solución aproximada, $(I_N f)(x)$, a una ecuación diferencial parcial, se necesita obtener los valores para las derivadas espaciales en los puntos de colocación (Hesthaven and Gottlieb, 1996). Esto se realiza mediante la aproximación de un operador diferencial por un operador de matriz, con las entradas de la matriz dados como

$$D_{kj} = l'_j(x_k)$$