



***MODELACIÓN MATEMÁTICA PARA
FLUJOS DE MATERIAL DESAGREGADO***



MARIO GERMÁN TRUJILLO VELA



**UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA
FACULTAD DE INGENIERÍA-PROGRAMA DE INGENIERÍA AGRÍCOLA**

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA
FACULTAD DE INGENIERÍA-INSTITUTO GEOFÍSICO**

NEIVA, 2012

MODELACIÓN MATEMÁTICA PARA FLUJOS DE MATERIAL DESAGREGADO

MARIO GERMÁN TRUJILLO VELA

***Proyecto de Grado presentado como
requisito parcial para optar al título
de Ingeniero Agrícola.***

Directores:

***Dr. Ing. ALFONSO MARIANO RAMOS CAÑÓN
Profesor asociado - Pontificia Universidad Javeriana***

***M. Sc. JAIME IZQUIERDO BAUTISTA
Profesor asociado - Universidad Surcolombiana***

***UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA
FACULTAD DE INGENIERÍA-PROGRAMA DE INGENIERÍA AGRÍCOLA***

***PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA
FACULTAD DE INGENIERÍA-INSTITUTO GEOFÍSICO***

NEIVA, 2012

La memoria titulada “**Modelación Matemática para Flujos de Material Desagregado**” presentado por el estudiante **Mario Germán Trujillo Vela** para optar al título de Ingeniero Agrícola por la Universidad Surcolombiana, ha sido realizada bajo nuestra dirección en el marco de convenio general de cooperación académica entre la Pontificia Universidad Javeriana y la Universidad Surcolombiana y reúne las condiciones adecuadas para construir su trabajo de grado, por lo que autorizamos al interesado para su disertación.

Neiva, 22 de Mayo de 2012

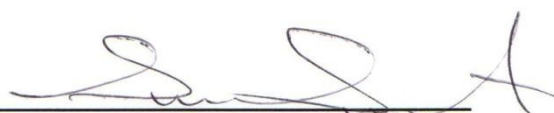


Dr. Ing. **ALFONSO MARIANO RAMOS CAÑÓN**
Profesor asociado-Pontificia Universidad Javeriana
Director Externo

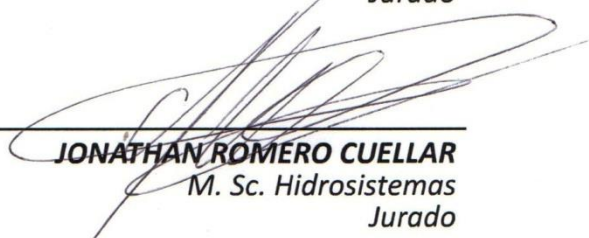


M. Sc. **JAIME IZQUIERDO BAUTISTA**
Profesor Asociado-Universidad Surcolombiana
Director Interno

Nota de aceptación



MAURICIO DUARTE TORO
M. Sc. Ingeniería Civil
Jurado



JONATHAN ROMERO CUELLAR
M. Sc. Hidrosistemas
Jurado

Neiva, 22 de Mayo de 2012

INEVITABLE

*Como inevitable es escribir estas frases que he hallado y difícil es saber con cual iniciar, no estaría mal hacerlo con aquella frase que dijo el físico y matemático **Blaise Pascal** “lo ultimo que uno sabe, es por donde empezar”, seguida por aquella frase de un gran filósofo que dice, “sólo es útil el conocimiento que nos hace mejores” (**Sócrates**), sin dejar de lado una que al aplicarla arreglaría muchas cosas de nuestra sociedad, “si se educan a los niños, no será necesario castigar a los hombres” (**Pitágoras**).*

*En el caminar por el sendero de la academia, “investigar es ver lo que todo el mundo ha visto, y pensar lo que nadie más ha pensado” (**Albert Szent-Györgi**), pero “piensa como piensan los sabios, mas habla como habla la gente sencilla” (**Aristóteles**). “La inteligencia consiste no sólo en el conocimiento, sino también en la destreza de aplicar los conocimientos en la práctica” (**Aristóteles**), pero ten cuidado, porque “los que se enamoran de la práctica sin la teoría son como los pilotos sin timón ni brújula, que nunca podrán saber a donde van” (**Leonardo Da Vinci**).*

*Para la comprensión de nuestro espacio “debemos admitir con humildad que, mientras el número es puramente un producto de nuestra mente, el espacio tiene una realidad fuera de nuestra mente, de modo que no podemos prescribir completamente sus propiedades a priori” (**Carl Friedrich Gauss**), y en el intento de su comprensión “la dignidad de la ciencia misma parece exigir que todos los medios sean exploradas para que la solución de un problema se de en forma elegante y célebre” (**Carl Friedrich Gauss**). Por todas las cosas que podemos percibir de este sorprendente universo “cuando un hombre deja de maravillarse, de preguntar y de jugar, esta acabado” (**E. Kasner y J. R. Newman**).*

*Porque me parece una herramienta interesante, quiero creer que “la matemática es la muleta de la filosofía y medicina del alma” (**Platón**), que “las matemáticas son una gimnasia del espíritu y una preparación para la filosofía” (**Isócrates**), y también que “se es muy joven para entender las matemáticas, apenas se consigue utilizarlas” (**John Von Neumann**), jespere hacerlo pronto!*

*¡Ahhhhh! y no quiero dejar pasar algo que considero importante, “si es posible, se debe hacer reír hasta a los muertos” (**Leonardo Da Vinci**), y como al parecer muchas de las cosas que percibimos tienen un final “así como una jornada bien empleada produce dulce sueño, así una vida bien usada causa dulce muerte” (**Leonardo Da Vinci**).*

Mario G.

*Dedicado a mis padres José Ricaurte Trujillo y Pastora Vela
por su incondicional apoyo y amor, a mis hermanas Ileana y Daniela;
familiares y amigos.*

AGRADECIMIENTOS

Agradezco al Instituto Geofísico, especialmente al Dr. Alfonso Ramos por haberme dado la oportunidad de desarrollar este trabajo, a Francisco Guerrero y a todos los del Geo por su valiosa ayuda, agradezco también a la USCO y a todos mis profesores, especialmente al profesor Rodrigo Pachón por ser un buen maestro, amigo y haberme impulsado a realizar este trabajo, también quiero agradecer a mis compañeros y amigos de carrera Paola, Ana María, Carlos C., Mauricio P., Diana M., Shirley, Diana P., Wilson, A. Capera y Jonathan R. por aquellos momentos de estudio y charla.

Siendo personas de una cercanía especial, agradezco a Silvia, Don Luis y Lucho por ser otra familia que tengo; y no quedándose atrás, agradezco a Rosita, Julio, Adriana, Diego, Mariana, los Pablos y Sofía por haberme permitido ser parte de su familia y soportarme durante tanto tiempo.

TABLA DE CONTENIDO

ÍNDICE DE FIGURAS.....	III
ÍNDICE DE TABLAS.....	VI
RESUMEN.....	VII
ABSTRACT.....	VIII
1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. Definición.....	1
1.2. Planteamiento del problema.....	3
1.3. Objetivo general.....	4
1.3.1. Objetivos específicos	4
1.4. Esquema del documento.....	5
2. MECÁNICA DEL MEDIO CONTINUO	6
2.1. Teoría del medio continuo	6
2.2. Ecuación de continuidad-Conservación de masa	6
2.2.1. Volumen de control infinitesimal	6
2.3. Ecuación de continuidad-Conservación de momentum lineal	11
2.3.1. Tensor de esfuerzos.....	12
3. MECÁNICA DE MATERIAL DESAGREGADO.....	16
3.1. Definición.....	16
3.2. Dinámica macroscópica	16
3.2.1. Leyes de conservación en un medio continuo	17
3.2.2. Integración en la profundidad y efectos de cambio de masa	18
3.2.3. Análisis de escala y flujo superficial con esfuerzos no hidrostáticos.....	24
3.3. Evaluación de esfuerzos.....	27
3.3.1. Partición de esfuerzos	29
3.3.2. Interacción sólido-fluido.....	30
3.3.3. Esfuerzos debido a la interacción entre granos sólidos.....	31
3.3.4. Esfuerzos cortantes del fluido.....	33
4. FLUJO DE MASAS GRANULARES FLUIDIZADAS A TRAVÉS DE TERRENOS TRIDIMENSIONALES	35
4.1. Transferencia de esfuerzos.....	38
4.1.1. Comportamiento friccional de una mezcla (Coulomb).....	39
4.2. Teoría de mezcla.....	39

4.3. Teoría de la profundidad promedio	42
4.3.1. Evaluación de esfuerzos entre sólidos	43
4.3.2. Evaluación de los esfuerzos del fluido	46
4.3.3. Ecuaciones de gobierno	47
4.4. Soluciones analíticas.....	48
4.4.1. Movimiento traslacional	48
4.4.2. Desplazamiento del flujo	51
4.4.3. Equilibrio estático de áreas fuente y depósitos	52
4.4.4. Perfiles de depósitos no lineales.....	54
 5. DISCUSIÓN	 56
5.1. Análisis de sensibilidad	57
5.1.1. Condiciones iniciales y de frontera	57
5.1.2. Movimiento traslacional	57
5.1.3. Desplazamiento del flujo	65
5.1.4. Equilibrio estático	66
5.1.5. Perfiles no lineales de depósitos.....	66
 6. APLICACIÓN Y COMPARACIÓN DEL MODELO	 68
 7. CONCLUSIONES.....	 74
 APÉNDICE A: ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DE TALUDES	
MÉTODO DE TALUD INFINITO-SIN INFILTRACIÓN	75
 APÉNDICE B: ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DE TALUDES	
MÉTODO DE TALUD INFINITO-CON INFILTRACIÓN.....	79
 BIBLIOGRAFÍA	 82

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Clasificación de movimientos en masa en función de la fracción de sólidos (→), el contenido de agua (←), la disgregación del material (♦) y la velocidad del movimiento (↑).	1
Figura 2. Movimientos en masa observadas en campo y clasificación en función de la fracción de sólidos (→), el contenido de agua (←), la disgregación del material (♦) y la velocidad del movimiento (↑).	2
Figura 3. Distribución de los movimientos de ladera en la cuenca vertiente al Embalse de Rules, Granada, España (Perálvarez, et al., 2008).	3
Figura 4. Porcentaje aproximado de desastres ocurridos en Japón entre 1982 y 2007, causados por flujo de detritos, deslizamientos y falla de laderas (Shrestha, et al., 2008).	3
Figura 5. Puntos del eje x en los cuales se desea conocer los valores definidos de las propiedades del sistema, en el volumen de control.	7
Figura 6. Volumen de control infinitesimal fijo que muestra las entradas y salidas de masa en las tres direcciones.	8
Figura 7. Distribución de esfuerzos en un volumen de control infinitesimal fijo.	14
Figura 8. Definición de volumen elemental representativo (VER) fijo. Fuente: (Iverson, 2005).	16
Figura 9. Definición del sistema de coordenadas cartesianas, la elevación variable del lecho b , el espesor de material desagregado variable $h = \eta - b$, y los componentes cartesianos de la velocidad (v_x, v_y, v_z). Fuente: (Iverson, 2005).	19
Figura 10. Relación de velocidades vertical y horizontal con la pendiente de la trayectoria del flujo.	20
Figura 11. Esquema típico de la geometría de un flujo de material desagregado. Fuente: (Iverson, 2005).	25
Figura 12. Geometría utilizada para el cálculo del esfuerzo normal basal, debido al peso aparente de una columna vertical de material desagregado con una altura media $h = (h_1 + h_2 + h_3 + h_4)/4$. Fuente: (Iverson, 2005).	33
Figura 13. Comportamiento de fluidos Newtonianos y plástico ideal (Bingham). Fuente: (Oertel, 2001).	34
Figura 14. Clasificación de movimientos en masa en función de la fracción de sólidos (→), el contenido de agua (←), la disgregación del material (♦) y la velocidad del movimiento (↑).	36
Figura 15. Secciones longitudinales de flujos constantes y uniformes de mezclas sólidos-fluido impulsados por gravedad hacia abajo por planos inclinados. (a) altamente concentrado, flujo dominado por el régimen fricción. (b) altamente diluido, flujo dominado por el régimen colisión. Fuente: (Iverson & Denlinger, 2001).	39
Figura 16. Definición del sistema de coordenadas locales y las convenciones utilizadas para el cálculo de esfuerzos y velocidades. Los componentes normales de esfuerzo (indicado por las flechas punteadas) son positivos a compresión, y los esfuerzos cortantes son positivos cuando están orientados como se muestra. Fuente: (Iverson & Denlinger, 2001a).	41

Figura 17. Fracción de presión de poros.....	44
Figura 18. Corte longitudinal de un flujo inestable que desciende por una pendiente curvilínea, que ilustra el sistema de coordenadas locales y variables dependientes $h_x, y, t, v_{xx}, y, t, v_y(x, y, t)$. La componente de curvatura en x se especifica por el radio local de curvatura r_x . Fuente: (Iverson & Denlinger, 2001b).	45
Figura 19. Gráfica de v_x para diferentes valores de velocidades iniciales v_0 cuando $t \rightarrow \infty$. Con valores de constantes $\rho = 2000\text{kg/m}^3$, $g_z = 9,81\text{m/s}^2$, $H = 1\text{m}$, $nf = 0,4$, $\mu = 0,1\text{Pa.s}$, $\Theta = 0,06$	58
Figura 20. Gráfica de la EVIF (ecuación 4.66) para los valores típicos del parámetro $\Theta = \tan\theta - 1 - \lambda \tan\phi_{bed}$. El estado constante de velocidades se acerca sólo después de tiempos muy largos, indicado por tiempos normalizados mayores que 1.	58
Figura 21. Comportamiento de la EVIF para diferentes valores de profundidad de flujo (H), para valores de parámetros: $\rho = 2000\text{kg/m}^3$, $g_z = 9,81\text{m/s}^2$, $nf = 0,4$, $\mu = 0,1\text{Pa.s}$, $\Theta = 0,4$	59
Figura 22. Comportamiento de la EVIF para diferentes valores de viscosidad (μ), para valores de parámetros: $\rho = 2000\text{kg/m}^3$, $g_z = 9,81\text{m/s}^2$, $H = 1\text{m}$, $nf = 0,4$, $\Theta = 0,4$	60
Figura 23. Comportamiento de la EVIF. (a) Para diferentes valores de densidad de mezcla (ρ), y (b) Para diferentes valores de fracción de volumen de fluido (nf). Con valores de parámetros: $g_z = 9,81\text{m/s}^2$, $H = 1\text{m}$, $\mu = 0,1\text{Pa.s}$, $\Theta = 0,4$	61
Figura 24. Relación entre la densidad de la mezcla (que está en función de la densidad del fluido, la densidad de los sólidos y la fracción volumétrica de los mismos) y la fracción de volumen de fluido.....	61
Figura 25. Comportamiento de la EVIF para diferentes valores de ángulo de talud (θ). Para valores de parámetros: $\rho = 2000\text{kg/m}^3$, $g_z = 9,81\text{m/s}^2$, $H = 1\text{m}$, $\mu = 40$, $nf = 0,4$, Pa.s , $\phi_{bed} = 30^\circ$, $\lambda = 0,5$	62
Figura 26. Comportamiento de la EVIF para diferentes valores de ángulo de fricción del lecho (ϕ). Para valores de parámetros: $\rho = 2000\text{kg/m}^3$, $g_z = 9,81\text{m/s}^2$, $H = 1\text{m}$, $\mu = 50\text{Pa.s}$, $nf = 0,4$, $\theta = 25^\circ$, $\lambda = 0,5$	62
Figura 27. Comportamiento de la EVIF para diferentes valores de fracción de presión de poros (λ). Para valores de parámetros: $\rho = 2000\text{kg/m}^3$, $g_z = 9,81\text{m/s}^2$, $H = 1\text{m}$, $\mu = 40\text{Pa.s}$, $nf = 0,4$, $\theta = 25^\circ$, $\phi_{bed} = 30^\circ$	63
Figura 28. Influencia del ángulo de talud límite, ángulo de fricción del lecho y fracción de presión de poros.....	64
Figura 29. Gráfica de desplazamiento (x) con respecto al tiempo cuando $t \rightarrow \infty$. Con valores de constantes $x_0 = 0$, $v_0 = 0$, $\rho = 2000\text{kg/m}^3$, $g_z = 9,81\text{m/s}^2$, $H = 1\text{m}$, $nf = 0,4$, $\mu = 0,1\text{Pa.s}$, $\Theta = 0,06$	65
Figura 30. Equilibrio límite de perfiles longitudinales en laderas estáticas para espesores predichos por la ecuación 4.91 con valores típicos de Θ	66
Figura 31. Equilibrio límite longitudinal de perfiles de depósitos estáticos predichos por la EPDNL (4.111)	66
Figura 32. Equilibrio límite longitudinal de perfiles de depósitos estáticos predichos por la EPDNL (4.111)	67

<i>Figura 33. Gradiente topográfico en la dirección del flujo para el caso de aplicación al talud. .</i>	<i>68</i>
<i>Figura 34. Equilibrio límite del perfil longitudinal del talud estático para espesores predichos por la ecuación 4.91 con un valor de $\Theta = 0,142$.</i>	<i>69</i>
<i>Figura 35. Velocidad del flujo de material desagregado en función del tiempo.</i>	<i>71</i>
<i>Figura 36. Desplazamiento del flujo de material desagregado en función del tiempo.</i>	<i>71</i>
<i>Figura 37. Método de talud infinito con infiltración, en términos de fracción de presión de poros.</i>	<i>72</i>
 <i>Figura A1. Análisis de un talud infinito sin infiltración.....</i>	 <i>76</i>
 <i>Figura B1. Análisis de talud infinito con infiltración.....</i>	 <i>79</i>

ÍNDICE DE TABLAS

<i>Tabla 1. Revisión bibliográfica de procedimientos para la modelación de flujos de material desagregado que se basan en la física mecánica.</i>	<i>37</i>
<i>Tabla 2. Valores típicos de las propiedades físicas de un flujo de detritos, tanto a nivel experimental como real.</i>	<i>56</i>
<i>Tabla 3. Valores de velocidad y espesor de algunos eventos naturales de flujos de material desagregado.</i>	<i>56</i>
<i>Tabla 4. Resultados de ensayos de penetración estándar STP.....</i>	<i>68</i>
<i>Tabla 5. Valores de las propiedades físicas del flujo de material desagregado.....</i>	<i>70</i>

RESUMEN

Como una forma alternativa a los métodos convencionales para realizar análisis de estabilidad de taludes, este trabajo presenta una revisión bibliográfica de algunos procedimientos para modelar los flujos de material desagregado que parten desde la mecánica de medios continuos (perspectiva Euleriana), conservación de masa y momentum, de las que se selecciona la metodología propuesta por Iverson & Denlinger en el 2001. Esta metodología supone el comportamiento de una mezcla de fluido Newtoniano y sólido cuya interacción friccional es representada por la ley de resistencia de Coulomb. La ecuación de momentum es simplificada de tal forma que permiten generar una solución analítica, a la cual se le realizó un análisis de sensibilidad de acuerdo a cada uno de los parámetros de entrada.

Los resultados del análisis de sensibilidad muestran un comportamiento general del modelo que tiende a una velocidad constante después de tiempos muy prolongados, y que nunca se detiene como consecuencia de suponer un ángulo de la trayectoria del flujo y otros parámetros sean constantes. El modelo simplificado se puede utilizar para el cálculo por etapas de la velocidad y el desplazamiento del centro de masa. Además, este método simplificado se puede utilizar como insumo para evaluar el riesgo por flujos de material desagregado. Los parámetros que más influyen en el modelo son el ángulo de talud, el ángulo de fricción del lecho y la fracción de presión de poros, ya que determinan la estabilidad del talud. En caso de que el talud se desplace las variables que más influyen son la viscosidad dinámica y el espesor de flujo, ya que hacen que el flujo tenga un cambio en la aceleración desde el inicio.

Palabras clave: *Flujos de material desagregado, Modelación, Solución analítica, Análisis de sensibilidad.*

ABSTRACT

As an alternative to conventional methods for slope stability analysis, this paper presents a literature review of procedures to model the disrupted material flows that start from the continuum mechanics (Eulerian approach), conservation of mass and momentum, from which select the methodology proposed by Iverson & Denlinger in 2001. This methodology assumes the mixing behavior of a Newtonian fluid and solid whose frictional interaction is represented by Coulomb's law strength. The momentum equation is simplified in such a way that can generate an analytical solution to which was performed a sensitivity analysis according to each of the input parameters.

The results of the sensitivity analysis shows a general behavior of the model which tends to a constant speed after very long time and never stops as an effect of assuming an angle of the flow path and other parameters are constant. The simplified model can be used for the stepwise calculation of the speed and the displacement of the center of mass. Also, this simplified method can be used as input for risk assessment by disrupted material flows. The most important parameters in the model are the slope angle, bed friction angle and the fraction of pore pressure, as they determine the slope stability. In case the slope is moved most influencing variable is the dynamic viscosity and the thickness of flow, as they cause which the flow has a change in the acceleration from the beginning.

Keywords: *Disrupted material flows, Modelation, Analytical solution, sensibility analysis.*

1. INTRODUCCIÓN

Procesos como los movimientos en masa de laderas han ocasionado muchos desastres en todo el mundo (González, 2003). Las zonas montañosas tropicales son muy susceptibles a sufrir este tipo de problemas, debido a que generalmente se reúnen cuatro de los elementos más importantes para su generación: gradiente topográfico, sismicidad, meteorización y lluvias intensas (Suarez, 1998).

Dentro de la clasificación de los movimientos en masa se encuentran los flujos, los cuales pueden ser lentos o rápidos dependiendo del contenido de humedad, de los tipos de material transportados y la pendiente de la trayectoria del flujo. De igual forma dependiendo del tamaño del material transportado durante el flujo, se puede clasificar en flujos de roca, flujos de detritos, flujos de suelos y flujos de lodos (Suarez, 1998). De una manera general se denominarán diferentes procesos como **flujos de material desagregado**, debido a que el modelo analítico seleccionado (capítulo 4) está en capacidad de modelar flujo de lodos, flujos de detritos, flujos de suelos (Figura 1), por las razones que se expondrán en el capítulo 4.

1.1. Definición

Los flujos de detritos deben ser vistos como procesos intermedios entre los flujos hiperconcentrados y deslizamientos de tierra, separados por transiciones características tales como: velocidad, fracción de sólidos y el tipo de material. Por ejemplo los flujos de detritos tienen velocidades del orden de 0,5 a 10 m/s y presenta una deformación completa desde el inicio hasta la deposición, mientras que los deslizamientos de tierra son menores a cm/día presentando deformaciones muy pequeñas en el transcurso del movimiento (Coussot & Meunier, 1996).

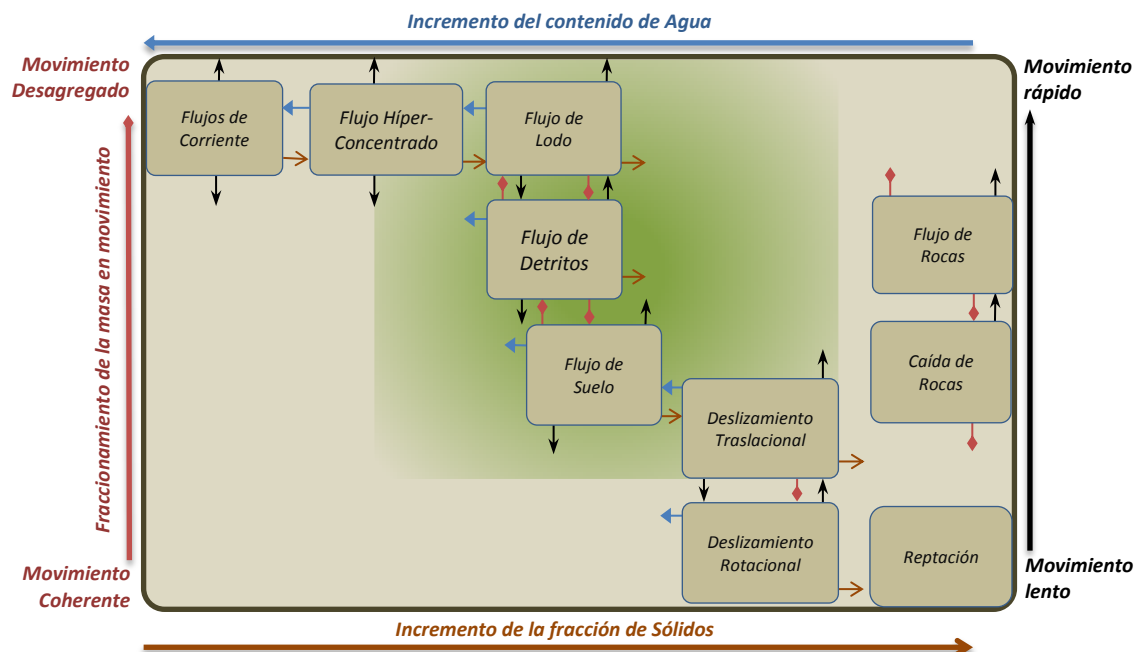


Figura 1. Clasificación de movimientos en masa en función de la fracción de sólidos (→), el contenido de agua (←), la desagregación del material (↕) y la velocidad del movimiento (↕).

Con base en la descripción de los movimientos en masa que realiza Coussot & Meunier (1996); Suarez (1998); Iverson (2005), se elaboró la Figura 1 donde se clasifican cualitativamente los diferentes movimientos en masa en función de la fracción de sólidos, contenido de agua, la disgregación que sufre el material al desplazarse desde el inicio del movimiento hasta la deposición, y la velocidad de la masa.

La Figura 1 muestra como diferentes movimientos en masa pueden desplazarse dentro del cuadro (indicado por las flechas). Este desplazamiento principalmente le da tolerancia a las cualidades con que han sido clasificados los tipos de movimientos, que al desplazarse lo suficiente puede terminar convirtiéndose en el tipo de movimiento que se encuentra enseguida. De esta manera en el eje vertical, las flechas rojas (↕) indican que el tipo de movimiento puede ser más o menos fragmentado, las flechas negras (↑) indican que el movimiento puede ser más o menos rápido si señalan hacia arriba o hacia abajo respectivamente.

En el eje horizontal, las flechas azules (←) señalan siempre a la izquierda, indicando que el tipo de movimiento puede tener un mayor contenido de agua y de forma inversa, las flechas de color café siempre apuntan a la derecha (→) indicando que la fracción de sólidos puede ser mayor, haciendo que el contenido de agua disminuya. Por ejemplo el flujo de detritos puede tener sólidos de mayor o menor tamaño, puede desplazarse muy rápido o más lento, y la fracción de sólidos también puede variar de forma inversa al contenido de agua. La Figura 2 análoga a la Figura 1, muestra ejemplos de los diferentes movimientos en masa.



Figura 2. Movimientos en masa observadas en campo y clasificación en función de la fracción de sólidos (→), el contenido de agua (←), la disgregación del material (↕) y la velocidad del movimiento (↑).

Figura 2a: Río Magdalena sobre el Municipio de Hobo, (Huila-Colombia) (Pedraza, 2012).
 Figura 2b: Flujo hiper-concentrado a causa de un aumento del caudal del rio Suaza en el departamento del Huila (Colombia), ocurrido el 14 de Julio de 2009 (Rodríguez, 2009).
 Figura 2c: Flujo de lodos en el Monte Pinatubo, ubicado en el suroeste de la isla de Luzón (Filipinas), provocado por la erupción del volcán el 15 de Junio de 1991 (Casadevall, 1991).
 Figura 2d: Flujo de detritos que cubre autopista Trans-Canadá a consecuencia de intensas lluvias en Agosto de

1999 (Natural Resources Canada, 2007). Figura 2e: Flujo de suelos en Sichuan (China), ocurrido en Julio de 2005 (Petley, 2009). Figura 2f: Deslizamiento traslacional que sepulta 300 m de un tramo de la Segunda Autopista de Taiwán, ocurrido el 27 de Abril de 2010 (Guillermo, 2020). Figura 2g: Deslizamiento rotacional en una vía secundaria de Medellín (Colombia) (Duque, 2009). Figura 2h: Reptación en una ladera del Municipio de Suesca (Cundinamarca-Colombia) (Vargas, 2009). Figura 2i: Caída de rocas en la vía Sky Highway cerca a Porteau Cove (Canadá), ocurrido el 30 de Julio de 2008 (Hayward, 2008). Figura 2j: Flujo de rocas en las montañas de Ilgatchuz en la región occidental de Chilcotin en Columbia Británica (Harris, 2008).

1.2. Planteamiento del problema

Aproximadamente el 42% (Figura 3) de desastres causados por movimientos en masa en Japón entre los años 1989 y 2007, son atribuidos a los flujos de detritos (Shrestha, et al., 2008); de igual forma los flujos de detritos representan el 32% (Figura 4) de 252 casos de movimientos en masa de la cuenca vertiente al embalse de Rules (Granada-España) (Perálvarez, et al., 2008). Aunque con menores porcentajes pero aun importantes un 14% de los casos de remoción en masa de embalses, tomando como reseña a 353 casos históricos en todo el mundo corresponde a flujos de detritos (Ermini & Casagli, 2003), y un 20% corresponden a flujos en general de 91 registros de movimientos en masa de la cuenca del río Llaminchán (Cajamarca-Perú) (Villacorta, et al., 2007).

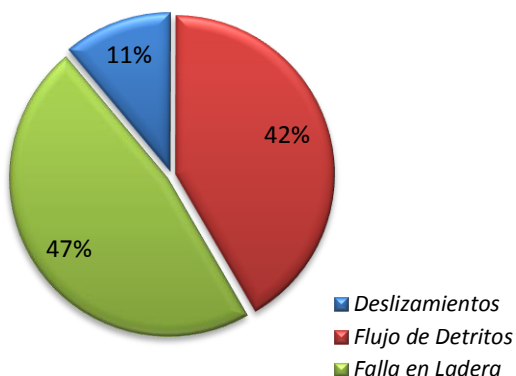


Figura 4. Porcentaje aproximado de desastres ocurridos en Japón entre 1982 y 2007, causados por flujo de detritos, deslizamientos y falla de laderas (Shrestha, et al., 2008).

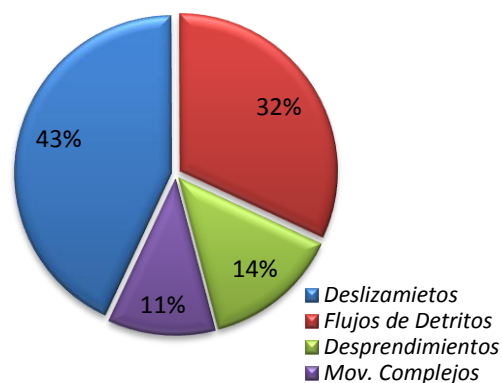


Figura 3. Distribución de los movimientos de ladera en la cuenca vertiente al Embalse de Rules, Granada, España (Perálvarez, et al., 2008).

En Colombia están registrados de forma generalizada todos los acontecimientos que comprende el concepto de movimientos en masa. Entre enero de 2011 y enero de 2012 se reportaron en total 1.463 eventos de movimientos en masa en todo el país, que dejaron 266 muertos, 200 heridos, 251 desaparecidos y 85.260 viviendas destruidas. El departamento que más reportó movimientos en masa en este periodo fue el Huila con 208 eventos (IDEAM, 2012).

Para la elaboración del mapa de amenaza por fenómenos de remoción en masa de Bogotá D.C. elaborado en 1999, se utilizaron dos técnicas de evaluación: una heurística llamada Sistema de Evaluación Semicuantitativo (SES) que evalúa ocho parámetros cualitativos, siendo fijado un intervalo de variabilidad de acuerdo con la influencia de cada uno; y otro geomorfológico llamado Metodología de Taludes Naturales (MTN) desarrollada por Tomas Shuk en 1997 que

consiste en mediciones en el terreno de altura y longitud en segmentos de ladera, variables que están ligadas a una relación funcional básica (Vargas, 2000).

Estos métodos y otro más convencionales como el método talud infinito y el método dovelas realizan muchas suposiciones, como que el material es rígido, isotrópico, homogéneo, los efectos de borde son despreciables y el modo de falla es rotacional en la mayoría de los casos (Suarez, 1998). Estas suposiciones están establecidas para los deslizamientos, que son movimientos cuyo modo de deformación no es desagregada, sino que se produce al ceder una o varias superficies de rotura bien definidas, desplazándose la masa en conjunto, sin entremezclarse los materiales (Perálvarez, et al., 2008; Suarez, 1998).

*Este modo de falla no ocurre siempre, ya que un gran porcentaje de movimientos en masa lo hace de forma desagregada (flujos) como se señaló anteriormente. Además estos métodos solamente establecen que tan estable es el talud, y en caso de que exista inestabilidad no se puede conocer otras variables de interés como: **¿a que velocidad se desplaza el flujo? o ¿cual será la distancia que recorrerá desde el inicio de flujo hasta la deposición?***

Debido a lo anterior, se crea la necesidad de abordar el problema de flujos de material desagregado desde una perspectiva alternativa (mecánica de medios continuos) a las convencionalmente adoptadas. Para ello, antes de centrar la atención en la física del problema, se realiza una revisión bibliográfica tal como se muestra en la Tabla 1 (Capítulo 4), de metodologías basadas en la física mecánica y reglas matemáticas, de las cuales se seleccionó la propuesta de Iverson (2005), que se desarrolla en el capítulo 3 (Mecánica de flujo de material desagregado), y también se tomó el procedimiento de Iverson & Denlinger (2001) donde se desarrollan y solucionan las ecuaciones de forma analítica (capítulo 4).

1.3. Objetivo general

Evaluar el comportamiento de un modelo que describa los flujos de material desagregado, basado en leyes físicas.

1.3.1. Objetivos específicos

- *Clasificar diferentes aproximaciones de modelación de flujo de material desagregado en función de principios básicos de la física mecánica.*
- *Seleccionar una aproximación de modelación de flujo en material desagregado que tenga en cuenta el modo de deformación que se observa en campo y que se base en las leyes de la física mecánica.*
- *Analizar la sensibilidad del modelo seleccionado al cambio de los parámetros de entrada.*
- *Comparar el modelo seleccionado con un método clásico de estabilidad de taludes a un caso real de flujos de material desagregado.*

1.4. Esquema del documento

Este trabajo se organiza de la siguiente manera: en los capítulos 2, 3 y 4 se presenta el marco teórico.

En el Capítulo 2 se desarrolla la mecánica del medio continuo aplicada a los fluidos, que es la perspectiva con la cual se abarca los flujos de material desagregado. Se presentan conceptos como: Conservación de masa, conservación de momentum y tensor de esfuerzos.

En el Capítulo 3 se presenta la mecánica de flujo de material desagregado de una forma general, tomado de Iverson (2005), que proporciona una base fundamental para modelar su comportamiento.

En el capítulo 4 se presenta la metodología que fue seleccionada para realizar el análisis de sensibilidad, y los motivos de dicha selección. Además se desarrolla de la misma manera que en el capítulo 3 la mecánica de flujo de material desagregado evaluando las fuerzas que actúan en el flujo [tomado de Iverson & Denglinger (2001)]. Con esta metodología se llega a una serie de ecuaciones de gobierno, que se solucionan de forma analítica después de ser simplificadas al realizar una serie de suposiciones.

En el capítulo 5 se realiza la discusión del análisis de sensibilidad de los parámetros del modelo, que sirven para contextualizar en el comportamiento de flujos de material desagregado.

En el capítulo 6 se aplican de las ecuaciones solucionadas en la sección 4.4, a un talud que presenta flujos de material desagregado, ubicado en la avenida circunvalar con calle 42 en la ciudad de Bogotá, y son comparadas con el método tradicional de talud infinito desarrollado en los apéndices A y B.

Y por ultimo el Capítulo 7 presenta las conclusiones y recomendaciones de este trabajo.

2. MECÁNICA DEL MEDIO CONTINUO

En este capítulo se mostrará de un modo general el desarrollo de algunos modelos matemáticos de la mecánica de medios continuos (enfoque Euleriano) aplicados a los fluidos tales como la conservación de masa (sección 2.2), conservación de momentum (sección 2.3) y el tensor de esfuerzos que hace parte de la sumatoria de fuerzas en la conservación de momentum (sección 2.3.1). Estos componentes hacen parte de la perspectiva con la que se pretende entender el comportamiento de los flujos de material desagregado, Además servirán como base para el desarrollo de la teoría de aguas superficiales aplicadas a una mezcla de material sólido y fluido intersticial que es la composición principal de un flujo de material desagregado (capítulos 3 y 4).

2.1. Teoría del medio continuo

En el tratamiento de los fluidos como un medio continuo, no es de interés hacer observaciones a nivel molecular, ya que en las aplicaciones de ingeniería lo que es de interés son los efectos promedios o macroscópicos. De esta manera será tratado el fluido como una sustancia infinitamente divisible (Fox & McDonald, 1995).

La idealización del **medio continuo** permite tratar las propiedades como funciones de punto (que tiene un valor definido en cada punto en el espacio) y suponer que las propiedades de los fluidos como densidad, temperatura, velocidad, varían de forma continua en el espacio sin discontinuidades (Cengel & Cimbala, 2006; Hauke, 2008; Fox & McDonald, 1995). Lo que significa que la variación de las propiedades es tan suave que se puede utilizar el cálculo diferencial para analizarlo (White, 2004).

El supuesto del continuo, requiere el manejo de dos conceptos: a) **Sistema**: Cantidad de materia fija que está rodeado por unas fronteras que pueden variar su tamaño y forma con el tiempo, pero que a través de tales fronteras no debe haber transferencia de materia, de tal manera que contenga la misma masa durante sus cambios (Hansen, 1971; Streeter, et al., 2000). b) **Propiedades intensivas**: Son aquellas que no dependen de la cantidad de sustancia o del tamaño de un sistema, por lo que el valor permanece inalterable al subdividir el sistema inicial en varios subsistemas, por este motivo no son propiedades aditivas (Zemansky & Dittmann, 1986). Claros ejemplos del uso de las propiedades intensivas son: velocidad, densidad, viscosidad, que son empleadas en los capítulos 2, 3 y 4.

2.2. Ecuación de continuidad-Conservación de masa

2.2.1. Volumen de control infinitesimal

Tomando el concepto de **partícula fluida**, se considera como materia elemental aquella que ha de ser lo suficientemente grande como para contener un gran número de moléculas, y lo suficientemente pequeña como para poder considerar que en su interior no hay variaciones de las propiedades macroscópicas del fluido (ej. densidad), de tal modo que a cada partícula fluida se pueda asignar un valor a sus propiedades (Mott, 1996a). Así, la masa se supone que es una

distribución continua a través del material que se describe en términos de una propiedad escalar macroscópica llamada densidad, siendo utilizada como una función puntual y las propiedades del fluido pueden considerarse como variables continuas en el espacio (White, 2004; Mironer, 1979).

Para la deducción de la ecuación de continuidad desde el **enfoque Euleriano** se considera un cubo infinitesimal de dimensiones $dx dy dz$ llamado **volumen de control** (Figura 6), que está fijo en el espacio con respecto a las coordenadas del sistema. El volumen de control está conformado por una superficie de control, y a través de ella fluye una propiedad cualquiera (Liggett, 1994).

La partícula fluida tiene un valor definido de sus propiedades en el centro del volumen de control que para el caso de la densidad es ρ . Por medio de la hipótesis del medio continuo y **la expansión en series de Taylor** (Ecuación 2.1) se puede conocer los valores definidos tanto en la entrada como en la salida del volumen de control (Figura 5). Este teorema permite aproximar una función derivable en el entorno reducido alrededor de un punto, mediante un polinomio cuyos coeficientes dependen de las derivadas de la función en ese punto (Bartle & Sherbert, 1990).

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n \quad (2.1)$$

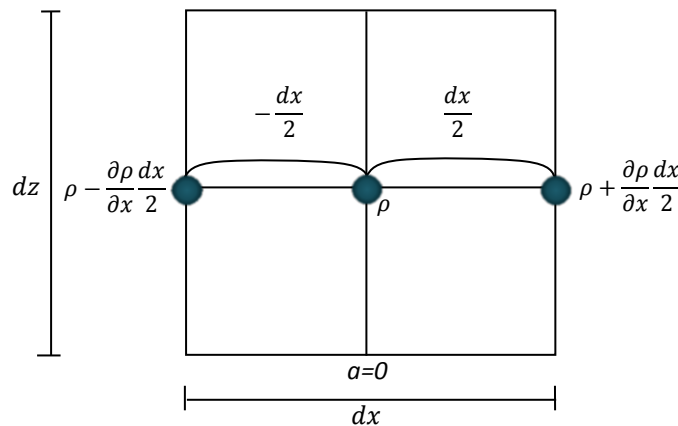


Figura 5. Puntos del eje x en los cuales se desea conocer los valores definidos de las propiedades del sistema, en el volumen de control.

Por ejemplo, para conocer el valor de la densidad en la salida de la dirección x que se encuentra a $dx/2$ del centro del volumen de control (Figura 5), la ecuación 2.1 se puede expandir de la siguiente manera:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x - a)^1 + \frac{f''(a)}{2!} (x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

La expansión de la serie de Taylor se puede trunca en la primera potencia, ya que los términos de segundo orden y orden superior se pueden despreciar. Ejemplo, si se supone un valor $dx/l = 10^{-3}$ donde l es una longitud característica del dominio del flujo, entonces

$(dx/l)^2 = 10^{-6}$ lo que significa un factor mil veces menor que dx/l (Cengel & Cimbala, 2006). Por lo tanto:

$$\rho(x) = \rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} \left(\frac{dx}{2} \right) = \rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{2}$$

Entonces se tiene el valor de la densidad en la salida del volumen de control:

$$\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{2}$$

De igual manera se puede conocer el valor de cualquier propiedad del sistema tanto en la entrada como en la salida del volumen de control y en cualquiera de las tres direcciones x , y y z .

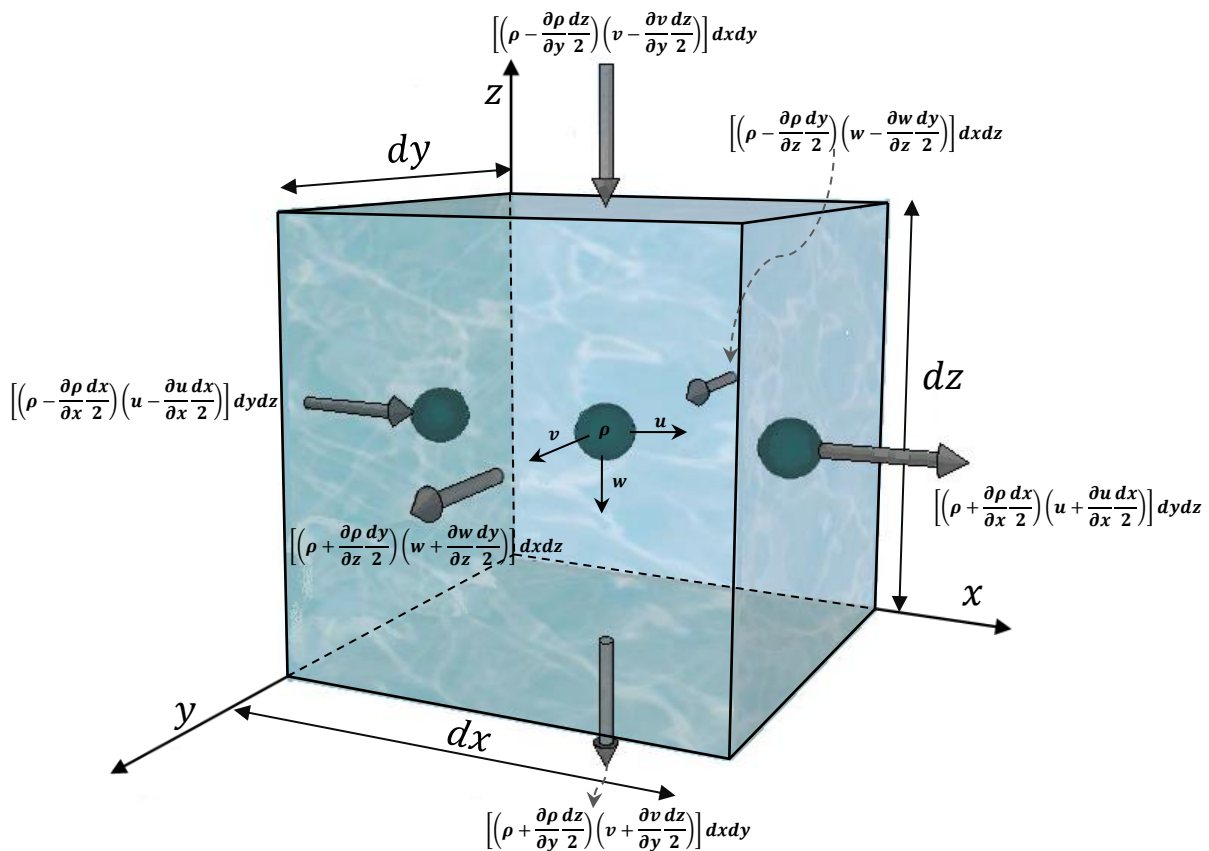


Figura 6. Volumen de control infinitesimal fijo que muestra las entradas y salidas de masa en las tres direcciones.

Por lo tanto haciendo uso de la ecuación 2.1. La razón de flujo de masa hacia dentro o fuera de las caras es igual a la densidad por la componente de velocidad normal en el punto central de la cara, por el área de la superficie de la cara (Cengel & Cimbala, 2006). Debido a que el flujo de entrada y de salida de masa hacia y desde el volumen de control esta en función solo de la velocidad con que pasa la masa a través de la superficie de control (Liggett, 1994). De esta manera:

La razón de flujo de entrada en la dirección x es:

$$\left[\left(\rho - \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) \left(u - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) \right] dydz = - \left[\rho u - \rho \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{2} - u \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{2} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{dx}{2} \right)^2 \right] dydz$$

La razón de flujo de salida en la dirección x es:

$$\left[\left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) \right] dydz = \left[\rho u + \rho \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{2} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{2} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{dx}{2} \right)^2 \right] dydz$$

Y la razón de flujo neto en la dirección x es igual al flujo de salida menos flujo de entrada en x , por lo tanto:

$$\rho u + \rho \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{2} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{2} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{dx}{2} \right)^2 - \rho u + \rho \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{2} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{2} - \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{dx}{2} \right)^2 dydz \quad (2.2)$$

Sumando y restando términos, la ecuación 2.2 es reducida a la expresión del lado izquierdo de la ecuación 2.3, que con algunas operaciones algebraicas se puede llegar a la expresión del lado derecho de la ecuación 2.3.

$$\left[2\rho \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{2} + 2u \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{2} \right] dydz = \left[\rho \frac{\partial u}{\partial x} dx + u \frac{\partial \rho}{\partial x} dx \right] dydz = \left[\rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right] dx dydz \quad (2.3)$$

Debido a la regla de la derivada de un producto, se puede reducir la expresión del lado derecho de la ecuación 2.3:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dydz \quad (2.4)$$

La razón de flujo de entrada en la dirección y es:

$$\left[\left(\rho - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) \left(v - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) \right] dx dz = - \left[\rho v - \rho \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{2} - v \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{dy}{2} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{dy}{2} \right)^2 \right] dx dz$$

La razón de flujo de salida en la dirección y es:

$$\left[\left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) \left(v + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) \right] dx dz = \left[\rho v + \rho \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{2} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{dy}{2} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{dy}{2} \right)^2 \right] dx dz$$

Y la razón de flujo neto en la dirección y es igual al flujo de salida en y menos flujo de entrada en y , por lo tanto:

$$\left[\rho v + \rho \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{2} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{dy}{2} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{dy}{2} \right)^2 - \rho v + \rho \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{2} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{dy}{2} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{dy}{2} \right)^2 \right] dx dz \quad (2.5)$$

Sumando y restando términos, la ecuación 2.5 es reducida a la expresión del lado izquierdo de la ecuación 2.6, que con algunas operaciones algebraicas se puede llegar a la expresión del lado derecho de la ecuación 2.6.

$$\left[2\rho \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{2} + 2v \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{dy}{2} \right] dx dz = \left[\rho \frac{\partial v}{\partial y} dy + v \frac{\partial \rho}{\partial y} dy \right] dx dz = \left[\rho \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} \right] dx dy dz \quad (2.6)$$

Debido a la regla de la derivada de un producto, se puede reducir la expresión del lado derecho de la ecuación 2.6:

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dx dy dz \quad (2.7)$$

La razón de flujo de entrada en la dirección z es:

$$\left[\left(\rho - \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) \left(w - \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) \right] dx dy = - \left[\rho w - \rho \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{2} - w \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{dz}{2} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} \left(\frac{dz}{2} \right)^2 \right] dx dy$$

La razón de flujo de salida en la dirección z es:

$$\left[\left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) \left(w + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) \right] dx dy = \left[\rho w + \rho \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{2} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{dz}{2} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} \left(\frac{dz}{2} \right)^2 \right] dx dy$$

Y la razón de flujo neto en la dirección z es igual al flujo de salida menos flujo de entrada en z, por lo tanto:

$$\left[\rho w + \rho \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{2} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{dz}{2} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} \left(\frac{dz}{2} \right)^2 - \rho w + \rho \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{2} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{dz}{2} - \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} \left(\frac{dz}{2} \right)^2 \right] dx dy \quad (2.8)$$

Sumando y restando términos, la ecuación 2.8 es reducida a la expresión del lado izquierdo de la ecuación 2.9, que con algunas operaciones algebraicas se puede llegar a la expresión del lado derecho de la ecuación 2.9.

$$\left[2\rho \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{2} + 2w \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{dz}{2} \right] dx dy = \left[\rho \frac{\partial w}{\partial z} dz + w \frac{\partial \rho}{\partial z} dz \right] dx dy = \left[\rho \frac{\partial w}{\partial z} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} \right] dx dy dz \quad (2.9)$$

Debido a la regla de la derivada de un producto, se puede reducir la expresión del lado derecho de la ecuación 2.9:

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dx dy dz \quad (2.10)$$

El flujo neto en las tres direcciones del volumen de control infinitesimal es la suma de las ecuaciones 2.4, 2.7 y 2.10:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dx dy dz + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dx dy dz$$

Agrupando términos

$$\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] dx dy dz \quad (2.11)$$

Por otro lado, la tasa de cambio de masa dentro del volumen de control es descrita como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz \quad (2.12)$$

El **teorema de transporte de Reynolds (TTR)** establece que la tasa de cambio de masa total del sistema es igual a la tasa de acumulación de masa dentro del volumen de control (ecuación 2.12), más el flujo neto que pasa a través de la superficie de control en las tres direcciones (ecuación 2.11) (Chow, et al., 1994). Resultando la ecuación 2.13:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz + \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] dx dy dz \quad (2.13)$$

La **ley de conservación de masa** establece que la masa ni se crea ni se destruye, en otras palabras que la masa dentro del sistema permanece constante con el tiempo (Streeter, et al., 2000), y se puede expresar de la siguiente manera:

$$\frac{dm}{dt} = 0 \quad (2.14)$$

Por lo tanto, la ecuación de conservación de masa se tiene reemplazando la ecuación 2.14 en 2.13:

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz + \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] dx dy dz \quad (2.15)$$

Si se divide a ambos lados de la igualdad por $dx dy dz$, resulta la **ecuación de conservación de masa** para un punto:

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \quad (2.16)$$

La ecuación 2.16 se puede reducir de la siguiente manera:

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \vec{v}_i)}{\partial x_i} \quad (2.17)$$

Donde el subíndice i indica que es para cada una de las tres direcciones x, y y z . Si se aplica el operador Nabla ($\nabla = \partial/\partial x_i$) a un vector mediante el producto punto se obtiene un escalar conocido como la divergencia de un vector (Duarte & Niño, 2001).

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{v} \quad (2.18)$$

2.3. Ecuación de continuidad-Conservación de momentum lineal

El **momentum** es una cantidad vectorial del producto de la masa y un vector velocidad. La segunda ley de Newton establece que, bajo un sistema inercial, la razón de cambio de momentum de un volumen de material fluido con respecto al tiempo es igual a la suma de fuerzas actuantes en el volumen de material fluido (Liggett, 1994). De esta manera se tiene:

$$\Sigma F = \frac{dm\vec{v}}{dt} \quad (2.19)$$

Al multiplicar la ecuación de conservación de masa (ecuación 2.18) por un vector velocidad e igualando a la sumatoria de fuerzas se tiene la **ecuación de conservación de momentum**:

$$\Sigma F = \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} dV + \nabla \rho \vec{v} \otimes \vec{v} dV \quad (2.20)$$

Donde la propiedad $\rho \vec{v}$ representa el momentum por unidad de volumen del fluido (Rubin & Atkinson, 2001), el operador $\otimes$ representa el producto diádico (o tensorial) entre los dos vectores velocidad, y $dV = dx dy dz$. Luego la sumatoria de fuerzas al lado izquierdo de la ecuación 2.20 es:

$$\nabla T + \rho \vec{g} dV + \vec{F} = \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} dV + \nabla \rho \vec{v} \otimes \vec{v} dV \quad (2.21)$$

Si se hace una descripción del lado izquierdo de la ecuación 2.21, se tiene que el primer término ∇T es el tensor de esfuerzos que se relaciona con las fuerzas actuantes sobre la superficie del fluido (sección 2.3.1), el segundo término $\rho \vec{g} dV$ representa las fuerzas del cuerpo procedentes de la gravedad y el tercer término $\vec{F}$ representa las fuerzas actuantes sobre la superficie sólida del volumen de control (Rubin & Atkinson, 2001).

2.3.1. Tensor de esfuerzos

Un **tensor** es una clase de entidad algebraica de varias componentes que generaliza los conceptos de escalar, vector y matriz de una manera que sea independiente de cualquier sistema de coordenadas elegido. Así un escalar es considerado como un tensor de orden 0; un vector, tensor de orden 1; y dada una base vectorial, los tensores de segundo orden pueden ser representados por una matriz (Kolecki, 2002). Ejemplos de tensores son el tensor de esfuerzos y el tensor de velocidades, resultado del producto diádico (o tensorial) entre los vectores de velocidad como se muestra en la ecuación 2.20.

Es necesario recordar que esfuerzo es la fuerza distribuida dentro de un cuerpo que ofrece una resistencia por unidad de área para una carga externa aplicada. Los esfuerzos pueden ser normales denotado por la letra σ (sigma), donde la fuerza actúa de manera perpendicular a la sección transversal del cuerpo ya sea a compresión o a tensión, y también existe el esfuerzo cortante que se denota con la letra τ (tau), donde la fuerza actúa de manera tangente a la sección transversal del cuerpo (Mott, 1996b).

El esfuerzo es definido matemáticamente por el límite cuando la variación del área tiende a cero de la relación entre la variación de la fuerza sobre la variación del área (Crandall, et al., 1972). Así, el esfuerzo normal y el esfuerzo tangente, se pueden expresar respectivamente como:

$$\sigma_{ij} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_j}{\Delta A_i} \quad \text{O} \quad \tau_{ij} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_j}{\Delta A_i}$$

Donde el subíndice i denota el área al cual ofrece la resistencia y el subíndice j la dirección del vector esfuerzo.

Para explicar los esfuerzos que pueden existir en un fluido, los ejemplos de esfuerzos normales son la presión y la tensión superficial, y para los esfuerzos cortantes es la viscosidad (que es la fricción interna de un fluido) (Hauke, 2008; Streeter, et al., 2000). Las fuerzas internas se oponen al movimiento de una porción de un fluido con relación a otra de tal manera que un fluido viscoso tiende a adherirse a una superficie sólida que está en contacto con ella, consecuentemente siempre hay una capa delgada de frontera cerca a la superficie en la que el fluido está casi en reposo (Young & Freedman, 2008).

Para calcular el tensor de esfuerzos, la propiedad (esfuerzo) esta vez no tendrá un valor definido en el centro del volumen de control como se explicó en la sección 2.2.1, ya que los esfuerzos actúan sobre la superficie. Por lo tanto, el esfuerzo tiene un valor definido en la cara anterior (o de entrada) del volumen de control y con la expansión de las series de Taylor se halla el valor definido de los esfuerzos en la cara posterior (o de salida) del volumen de control, en cada una de las direcciones. Los esfuerzos normales se tomarán positivos a compresión como se muestra en la Figura 7.

Para hacer sumatoria de fuerzas, el esfuerzo se multiplica por la variación del área dA en la que actúa el esfuerzo. En la dirección x :

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) dydz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy \\ &\quad - \sigma_{xx} dydz - \tau_{yx} dx dz - \tau_{zx} dx dy \\ \Sigma F_x &= \sigma_{xx} dydz + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx dydz + \tau_{yx} dx dz + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dx dydz + \tau_{zx} dx dy + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dx dydz \\ &\quad - \sigma_{xx} dydz - \tau_{yx} dx dz - \tau_{zx} dx dy\end{aligned}\quad (2.22)$$

Restando términos en la ecuación 2.22 se reduce a:

$$\Sigma F_x = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx dydz + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy dx dz + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz dx dy = 0 \quad (2.23)$$

Agrupando términos y dividiendo la ecuación 2.23 entre la variación del volumen $dz dx dy$, resulta la ecuación 2.24.

$$\begin{aligned}\frac{\left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dz dx dy}{dz dx dy} &= \frac{0}{dz dx dy} \\ \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= 0\end{aligned}\quad (2.24)$$

Haciendo sumatoria de fuerzas en la dirección y se tiene:

$$\begin{aligned}\Sigma F_y &= \left(\sigma_{yy} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} dy \right) dx dz + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dy dz + \left(\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz \right) dx dy \\ &\quad - \sigma_{yy} dx dz - \tau_{xy} dy dz - \tau_{zy} dx dy\end{aligned}$$

$$\Sigma F_y = \sigma_{yy} dx dz + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} dx dy dz + \tau_{xy} dy dz + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx dy dz + \tau_{zy} dx dy + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dx dy dz - \sigma_{yy} dy dz - \tau_{xy} dx dz - \tau_{zy} dx dy \quad (2.25)$$

Restando términos en la ecuación 2.25 se reduce a:

$$\Sigma F_y = \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dx dy dz = 0 \quad (2.26)$$

Agrupando términos y dividiendo la ecuación 2.26 entre la variación del volumen $dz dx dy$, resulta la ecuación 2.27.

$$\frac{\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) dz dx dy}{dz dx dy} = \frac{0}{dz dx dy}$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 \quad (2.27)$$

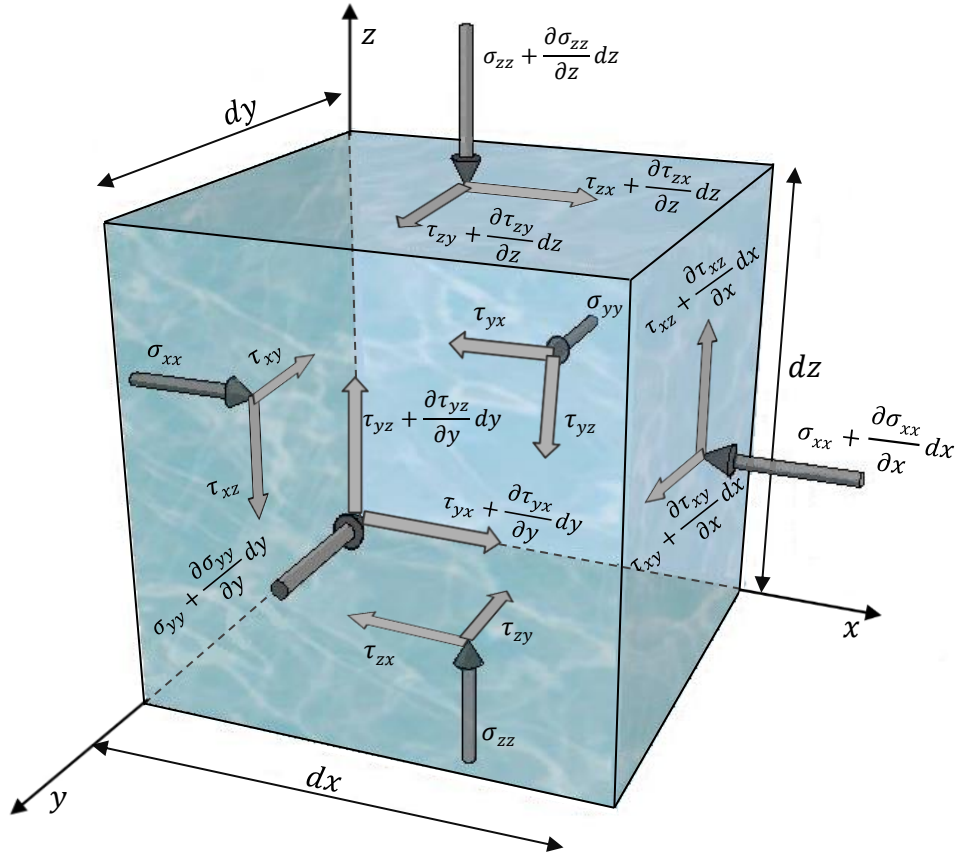


Figura 7. Distribución de esfuerzos en un volumen de control infinitesimal fijo.

Haciendo sumatoria de fuerzas en la dirección z se tiene que:

$$\Sigma F_z = \left(\sigma_{zz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz \right) dx dy + \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx \right) dy dz + \left(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy \right) dx dz$$

$$\begin{aligned}
& -\sigma_{zz}dxdz - \tau_{xz}dydz - \tau_{yz}dxdz \\
\Sigma F_z = & \sigma_{zz}dxdy + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}dxdydz + \tau_{xz}dydz + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}dxdydz + \tau_{yz}dxdz + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}dxdydz \\
& -\sigma_{zz}dxdz - \tau_{xz}dydz - \tau_{yz}dxdz
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Restando términos en la ecuación 2.28 se reduce a:

$$\Sigma F_z = \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}dxdydz + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}dxdydz + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}dxdydz = 0 \tag{2.29}$$

Agrupando términos y dividiendo la ecuación 2.29 entre la variación del volumen $dzdxdy$, resulta la ecuación 2.30.

$$\begin{aligned}
\frac{\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}\right)dzdxdy}{dzdxdy} &= \frac{0}{dzdxdy} \\
\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= 0
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Las ecuaciones 2.24, 2.27 y 2.30, son las ecuaciones de equilibrio de fuerzas en las tres direcciones x, y y z . Cada ecuación se compone de tres términos, y cada uno corresponde a un gradiente de esfuerzos entre un par de planos paralelos (Crandall, et al., 1972). El estado de esfuerzos en un punto utilizando tres planos mutuamente ortogonales pueden ser descritos por nueve valores distintos de esfuerzos. Este estado de esfuerzos puede ser reescrito en forma de matriz (conocido como **tensor de esfuerzos**) de la siguiente manera (Budynas, 1997):

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} & \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} & \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} & \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} & \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} & \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} & \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \end{bmatrix} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = \nabla T \tag{2.31}$$

Aparentemente, los nueve componentes de esfuerzos son necesarios para describir el estado de esfuerzos en un punto de un cuerpo. Sin embargo, si se supone que un cuerpo continuo está en equilibrio, al realizar la sumatoria de momentos ($\Sigma M=0$) se satisface tomando momentos con los tres pares de esfuerzos tangenciales alrededor del centro del elemento (Boresi & Schmidt, 2003; Crandall, et al., 1972). Teniendo como resultado:

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad \tau_{zy} = \tau_{yz} \tag{2.32a, b, c}$$

La conservación de momentum angular también se aplica a flujos de material desagregado, pero en la mecánica continua convencional, el momentum angular es conservado implícitamente a través del uso de un tensor de esfuerzos simétricos, que es determinado si se cumplen las ecuaciones 2.32a, b, c.

3. MECÁNICA DE MATERIAL DESAGREGADO

Los flujos de material desagregado son estudiados desde la mecánica de medios continuos para así tratar de comprender y predecir el comportamiento de estos eventos. Los modelos basados en leyes físicas, reglas matemáticas, modelos constitutivos y teorías sobre los esfuerzos (responsables de disipación de energía) son presentados en este capítulo tomando como base principal a Iverson (2005). Esta propuesta se dispuso después de realizar muchas observaciones en campo, experimentos e investigaciones teóricas, la cual proporciona una base fundamental para predecir el comportamiento de los flujos de material desagregado, como una mezcla de sólidos y fluido, y también se presenta como pueden ser evaluados algunos de los términos que los componen.

3.1. Definición

Las definiciones de los movimientos en masa difieren de un autor a otro, y aunque en el capítulo 1 ya se dio una definición cualitativa de flujos de detritos, Iverson (2005) indica que los flujos de detritos son procesos intermedios entre avalancha de rocas secas, cuya interacción es casi exclusivamente entre granos sólidos (colisión, adhesión y fricción), y flujo de agua cargada de sedimentos, que se mantienen en suspensión casi exclusivamente por efectos mecánicos del fluido (arrastre viscoso, flotación y turbulencia). Por lo tanto, los flujos de detritos son procesos en los que predomina la interacción entre los constituyentes sólido y fluido. La cantidad de estos constituyentes se encuentran entre 30-70% (sólido-fluido o fluido-sólido) del volumen de un flujo de detritos, permaneciendo más o menos constante esta composición durante el flujo. Como no es de nuestro interés entrar en detalles de las diferentes definiciones, entonces utilizaremos el término de flujo de material desagregado al referirnos a los flujos de lodos, flujo de detritos y flujos de suelos.

3.2. Dinámica macroscópica

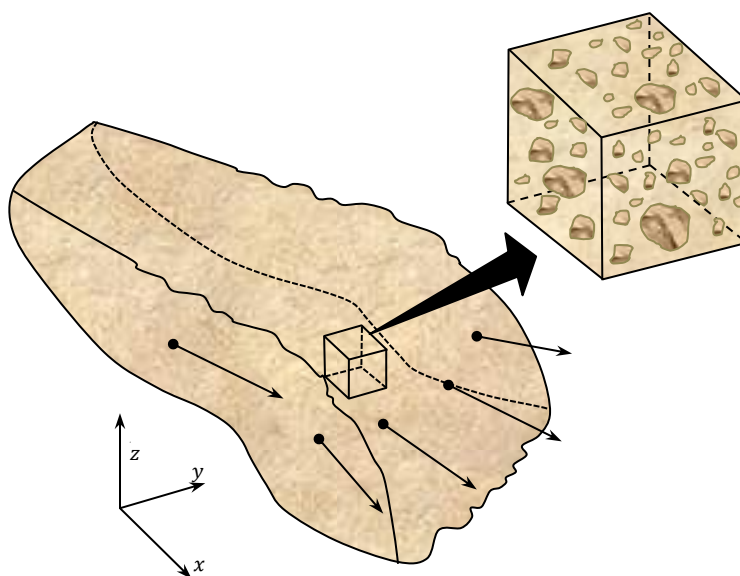


Figura 8. Definición de volumen elemental representativo (VER) fijo. Fuente: (Iverson, 2005).

Para la modelación matemática de flujos de material desagregado se adopta la perspectiva del continuo, pero haciendo uso del concepto de **volumen elemental representativo** (VER) (Figura 8), donde se captura el comportamiento a escalas no tan pequeñas como para que contenga la suficiente cantidad de fluido y sólidos

3.2.1. Leyes de conservación en un medio continuo

Las leyes de conservación de masa y momentum lineal, proporcionan herramientas fundamentales para el análisis de flujo de material desagregado, que fueron desarrolladas detalladamente en el capítulo 2. De esta manera la ecuación diferencial de conservación de masa para cada fase de la mezcla de flujo de material desagregado tratado como un medio continuo es:

$$\frac{\partial \rho_i n_i}{\partial t} + \nabla \cdot \rho_i n_i \vec{v}_i = 0 \quad (3.1)$$

Donde el subíndice i indica que es para cada una de las fases individuales, n denota la fracción de volumen (de tal modo que $\sum n_i = 1$). Según Iverson (2005) la ecuación de conservación de masa para la mezcla de flujo de material desagregado se puede obtener utilizando el promedio ponderado, que define la densidad de la mezcla ρ y velocidad de la mezcla $\vec{v}$, respectivamente como:

$$\rho = \rho_s n_s + \rho_f n_f \quad (3.2)$$

$$\vec{v} = \frac{\rho_s n_s \vec{v}_s + \rho_f n_f \vec{v}_f}{\rho} \quad (3.3)$$

Donde los subíndice s y f denotan la fase sólida y fluida, respectivamente. Reemplazando 3.2 y 3.3 en la ecuación 3.1, Resulta la ecuación de conservación de masa para la mezcla de flujo de material desagregado.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{v} = 0 \quad (3.4)$$

La ecuación 3.4 se expande cuando se utiliza la regla de la derivada de un producto sobre el término de divergencia:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \nabla \cdot \rho + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (3.5)$$

La derivada material representada como $d\rho/dt = \partial\rho/\partial t + \vec{v} \nabla \cdot \rho$ denota la diferenciación en un marco de referencia que se mueve con la velocidad de la mezcla $\vec{v}$. Al reconocer la derivada material en la ecuación 3.5 y asumiendo que es un flujo incompresible (dividiendo entre ρ), la ecuación de conservación de masa para la mezcla de flujo de material desagregado es escrita en una forma alternativa:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (3.6)$$

La ecuación de conservación de momentum que fue descrita en la sección 2.3 (ecuación 2.21) para una sola fase, es reescrita para flujos multifase:

$$\frac{\partial \rho_i n_i \vec{v}_i}{\partial t} + \nabla \cdot \rho_i n_i \vec{v}_i \otimes \vec{v}_i = -\nabla \cdot T + \rho_i n_i \vec{g} + \vec{f}_i \quad (3.7)$$

Donde $\vec{f}_i$ representa la fuerza de interacción entre las fases sólido y fluido. La ecuación de conservación de momentum para el flujo de la mezcla de material desagregado se puede obtener reemplazando las ecuaciones 3.2 y 3.3 en la ecuación 3.7:

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{v} \otimes \vec{v} = -\nabla \cdot T + \rho \vec{g} \quad (3.8)$$

En la ecuación 3.8 no aparece explícitamente la fuerza de interacción $\vec{f}_i$ porque la fuerza ejercida sobre los granos sólidos por el fluido equilibra la fuerza ejercida sobre el fluido por los granos sólidos, satisfaciendo así la tercera ley de Newton (Iverson, 2005). La ecuación 3.8 se expande cuando se utiliza la regla de la derivada de un producto sobre los términos de derivada local y convectiva:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla \rho \vec{v} = -\nabla \cdot T + \rho \vec{g} \quad (3.9)$$

Asumiendo que es un flujo incompresible, los términos en los cuales hay variación de la densad con respecto al tiempo y al espacio se pueden anular, y dividiendo entre ρ los demás términos de la ecuación 3.9, se tiene:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla \cdot T + \rho \vec{g} \quad (3.10)$$

Al reconocer la derivada material en la ecuación 3.10, la ecuación de conservación de momentum del flujo de la mezcla de material desagregado es reescrita de una forma alternativa:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot T + \vec{g} \quad (3.11)$$

3.2.2. Integración en la profundidad y efectos de cambio de masa

Una forma de mayor utilidad para las ecuaciones 3.6 y 3.11, se puede obtener por la integración de las ecuaciones a través del espesor (h) del flujo de material desagregado (ecuación 3.12), medido verticalmente desde el lecho a una elevación $z = b(x, y, t)$, hasta la superficie del flujo $z = \eta(x, y, t)$, donde x y y son las coordenadas planimétricas (Figura 9). De esta manera se reduce el número de incógnitas de 4 a 3, dos espaciales y la temporal (Iverson, 2005). Para poder llevar acabo esta integración es necesario tener en cuenta cinco aspectos importantes, que se definirán a continuación.

$$h(x, y, t) = \eta - b \quad (3.12)$$

1. Para realizar la integración de la ecuación de conservación de masa es útil definir **el primer teorema de valor medio para integrales**:

$$f(\xi) = \frac{1}{(\eta - b)} \int_b^\eta f(z) dz \quad (3.13)$$

Si $f(z)$ es una función continua en $[b, \eta]$, entonces existe un punto ξ entre (b, η) (Spiegel, 1963). Utilizando la anterior definición se halla el valor medio de la velocidad en las direcciones x y y :

$$\bar{v}_x = \frac{1}{h} \int_{z=b}^{z=\eta} v_x dz \quad \bar{v}_y = \frac{1}{h} \int_{z=b}^{z=\eta} v_y dz \quad (3.14a, b)$$

Donde la barra en la parte superior es una notación abreviada para el valor medio integrado en profundidad. Al despejar las ecuaciones 3.14a, b se tiene:

$$\bar{v}_x h = \int_{z=b}^{z=\eta} v_x dz \quad \bar{v}_y h = \int_{z=b}^{z=\eta} v_y dz \quad (3.15a, b)$$

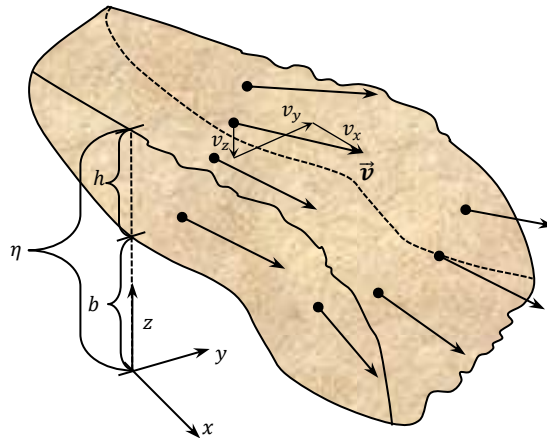


Figura 9. Definición del sistema de coordenadas cartesianas, la elevación variable del lecho b , el espesor de material desagregado variable $h = \eta - b$, y los componentes cartesianos de la velocidad (v_x, v_y, v_z). Fuente: (Iverson, 2005).

2. También es necesario conceptualizar que la relación de las velocidades vertical y horizontal debe ser igual a la pendiente de la superficie (Liggett, 1994) (Figura 10). Así, para dos dimensiones la velocidad en la dirección z es:

$$\frac{v_z}{v_x} = \frac{d\eta}{dx} \rightarrow v_z = v_x \frac{d\eta}{dx} \quad (3.16)$$

Utilizando la anterior afirmación, **las condiciones cinemáticas** en las tres dimensiones para el flujo en la superficie libre e inestable verticalmente $\partial\eta/\partial t = 0$, es:

$$v_z(\eta) = \frac{\partial\eta}{\partial t} + v_x(\eta) \frac{\partial\eta}{\partial x} + v_y(\eta) \frac{\partial\eta}{\partial y} + A(x, y, t) \quad (3.17)$$

Al despejar resulta:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -v_x(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} - v_y(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} + v_z(\eta) - A \quad (3.18)$$

Donde A es una fuente de velocidad en caso de que haya una razón de crecimiento vertical de la superficie del flujo de material desagregado causado por el colapso de un banco de material adyacente. **Las condiciones cinemáticas** en las tres dimensiones para el flujo en el fondo e inestable verticalmente $\partial b / \partial t = 0$, es:

$$v_z(b) = \frac{\partial b}{\partial t} + v_x(b) \frac{\partial b}{\partial x} + v_y(b) \frac{\partial b}{\partial y} + B(x, y, t) \quad (3.19)$$

Al despejar resulta:

$$-\frac{\partial b}{\partial t} = v_x(b) \frac{\partial b}{\partial x} + v_y(b) \frac{\partial b}{\partial y} - v_z(b) + B \quad (3.20)$$

Donde B es una fuente de velocidad en caso de que hayan cambios de elevación en el lecho causado por la erosión ($B < 0$), o sumidero de velocidad en caso de que hayan cambios de elevación en el lecho causado por la deposición de material en movimiento ($B > 0$).

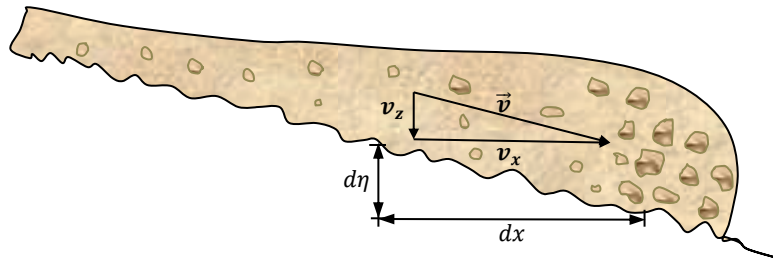


Figura 10. Relación de velocidades vertical y horizontal con la pendiente de la trayectoria del flujo.

- 3. La regla de integración de Leibniz** dice esencialmente que cuando se deriva una integral respecto a un parámetro distinto a la variable en la que se integra, derivada e integral pueden intercambiarse (Cañizo, 2004). Esta regla da una fórmula para la diferenciación de una integral definida, cuyos límites son funciones de la variable diferencial (ecuación 3.21) (Weisstein, 2012). Esto a veces se conoce como la diferenciación bajo el signo de la integral.

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{b(x)}^{\eta(x)} f(x, z) dz = \int_{b(x)}^{\eta(x)} \frac{\partial f}{\partial x} dz + f(\eta(x), x) \frac{\partial \eta}{\partial x} - f(b(x), x) \frac{\partial b}{\partial x} \quad (3.21)$$

Al despejar resulta:

$$\int_{b(x)}^{\eta(x)} \frac{\partial f}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{b(x)}^{\eta(x)} f(x, z) dz - f(\eta(x), x) \frac{\partial \eta}{\partial x} + f(b(x), x) \frac{\partial b}{\partial x} \quad (3.22)$$

- 4. El teorema fundamental del cálculo** consiste en que la derivación e integración de una función son operaciones inversas. Esto significa que la derivada de la integral de toda función continua integrable es igual a la misma función (ecuación 3.23) (Edwards & Penney, 1996).

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_b^\eta f(z) dz = f(z) \quad (3.23)$$

Donde f es continua en el intervalo cerrado $[b, \eta]$ y z un punto variable en (b, η) (Purcell, et al., 2007). Después de haber sintetizado esas cuatro primeras definiciones, se procede a realiza la integración de la ecuación de conservación de masa (ecuación 3.6):

$$\int_b^\eta \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \vec{v} \right) dz = \int_b^\eta \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} dz + \int_b^\eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dz \quad (3.24)$$

$$= \int_b^\eta \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} dz + \int_b^\eta \frac{\partial v_x}{\partial x} dz + \int_b^\eta \frac{\partial v_y}{\partial y} dz + \int_b^\eta \frac{\partial v_z}{\partial z} dz \quad (3.25)$$

Después de separar los componentes de velocidad, al último término de la ecuación 3.25, se le aplica el teorema fundamental del cálculo:

$$\int_b^\eta \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} dz + \int_b^\eta \frac{\partial v_x}{\partial x} dz + \int_b^\eta \frac{\partial v_y}{\partial y} dz + [v_z]_b^\eta \quad (3.26)$$

Al utilizar la regla de integración de Leibniz en el segundo y tercer término de la ecuación 3.26, y evaluando la velocidad v_z entre η y b , resulta:

$$\int_b^\eta \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_b^\eta v_x dz - v_x(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} + v_x(b) \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \int_b^\eta v_y dz - v_y(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} + v_y(b) \frac{\partial b}{\partial y} + v_z(\eta) - v_z(b) \quad (3.27)$$

Donde los términos denotados por la superficie (η) o el lecho (b) son términos de corrección que vienen de la integración y la diferenciación con la posición de frontera en función de x y y (Vreugdenhil, 1994). Al agrupar términos:

$$\int_b^\eta \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_b^\eta v_x dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_b^\eta v_y dz - \left[v_x(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} + v_y(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} - v_z(\eta) \right] + \left[v_x(b) \frac{\partial b}{\partial x} + v_y(b) \frac{\partial b}{\partial y} - v_z(b) \right] \quad (3.28)$$

Al reemplazar el valor medio de la velocidad (ecuaciones 3.15a, b) en el segundo y tercer término de la ecuación 3.28, resulta:

$$\int_b^\eta \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} dz + \frac{\partial(\bar{v}_x h)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}_y h)}{\partial y} - \left[v_x(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} + v_y(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} - v_z(\eta) \right] + \left[v_x(b) \frac{\partial b}{\partial x} + v_y(b) \frac{\partial b}{\partial y} - v_z(b) \right] \quad (3.29)$$

Donde $\bar{v}_x h$, $\bar{v}_y h$ son las descargas por unidad de ancho en las direcciones x y y (Tan, 1992). Al incorporar las condiciones cinemáticas de frontera (ecuaciones 3.18 y 3.20) en la ecuación 3.29:

$$\int_b^\eta \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} dz + \frac{\partial(\bar{v}_x h)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}_y h)}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial b}{\partial t} + A - B = 0 \quad (3.30)$$

La variación de la profundidad del flujo de material desagregado es igual a la variación de la superficie menos la variación de lecho con respecto al tiempo.

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial b}{\partial t} \quad (3.31)$$

Finalmente, al sustituir la ecuación 3.31 en 3.30, resulta la ecuación de conservación de masa integrada en la profundidad promedio:

$$\int_b^\eta \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} dz + \frac{\partial(\bar{v}_x h)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}_y h)}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial t} + A - B = 0 \quad (3.32)$$

Si la densidad aparente de material desagregado es constante, se puede despreciar la integral de la ecuación 3.32. Si $A = B = 0$, se obtiene **la ecuación de la teoría de aguas superficiales**:

$$\frac{\partial(\bar{v}_x h)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}_y h)}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (3.33)$$

Si la densidad de mezcla no es constante, pero los sólidos y el fluido son individualmente incompresibles, el cambio de la densidad aparente $d\rho/dt$ se puede expresar en términos de cambio de la porosidad (Iverson, 2005).

$$\frac{d\rho}{dt} = (\rho_f - \rho_s) \frac{dn_f}{dt} \quad (3.34)$$

Los cambios en la porosidad implican movimientos relativos de los componentes sólidos y fluido, y así se producen los esfuerzos de interacción sólido-fluido.

La integración ecuación de momentum en la dirección x :

$$\int_b^\eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x^2}{\partial x} + \frac{\partial v_x v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_x v_z}{\partial z} \right) dz = -\frac{1}{\rho} \int_b^\eta \left[\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right] dz \quad (3.35)$$

Al separar los términos del lado izquierdo de la ecuación 3.35:

$$\int_b^\eta \frac{\partial v_x}{\partial t} dz + \int_b^\eta \frac{\partial v_x^2}{\partial x} dz + \int_b^\eta \frac{\partial v_x v_y}{\partial y} dz + \int_b^\eta \frac{\partial v_x v_z}{\partial z} dz \quad (3.36)$$

Utilizando la regla de integración de Leibniz en los tres primeros términos de la ecuación 3.36 y el teorema fundamental del cálculo para el último término de la ecuación 3.36, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_b^\eta v_x dz - v_x(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial t} + v_x(b) \frac{\partial b}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_b^\eta v_x^2 dz - v_x^2(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} + v_x^2(b) \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \int_b^\eta v_x v_y dz \\ - v_x(\eta) v_y(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} + v_x(b) v_y(b) \frac{\partial b}{\partial y} + v_x(\eta) v_z(\eta) - v_x(b) v_z(b) \end{aligned} \quad (3.37)$$

Al agrupar términos y factorizando, resulta:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_b^\eta v_x dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_b^\eta v_x^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_b^\eta v_x v_y dz - v_x(\eta) \left[\frac{\partial \eta}{\partial t} + v_x(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} + v_y(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} - v_z(\eta) \right]$$

$$+v_x(b) \left[\frac{\partial b}{\partial t} + v_x(b) \frac{\partial b}{\partial x} + v_y(b) \frac{\partial b}{\partial y} - v_z(b) \right] \quad (3.38)$$

Al despejar e incorporar las condiciones cinemáticas de frontera (ecuaciones 3.17 y 3.19) y reemplazando el valor medio de la velocidad en la dirección x (ecuación 3.15a) en la ecuación 3.38:

$$\frac{\partial h \bar{v}_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_b^\eta v_x^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_b^\eta v_x v_y dz - v_x(\eta)[-A] + v_x(b)[-B] \quad (3.39)$$

5. Para solucionar el segundo y tercer término de la ecuación 3.39, se utiliza **el primer teorema de valor medio generalizado para integrales**, definido como:

$$\int_b^\eta f(z)g(z)dz = f(\xi) \int_b^\eta g(z)dz \quad (3.40)$$

Donde $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones continuas sobre $[\eta, b]$, $g(x) \geq 0$ para cualquier z entre $[\eta, b]$, entonces existe un punto ξ entre (η, b) (Spiegel, 1963; Spivak, 2008). La ecuación 3.40 es reducida a la ecuación (3.13) si $g(x) = 1$. Al despejar la ecuación 3.13, e incorporándola en la ecuación 3.40:

$$\int_b^\eta f(z)g(z)dz = f(\xi) \int_b^\eta g(z)dz = f(\xi)(\eta - b)g(\xi) \quad (3.41)$$

Por lo tanto:

$$\int_b^\eta f(z)g(z)dz = f(\xi)(\eta - b)g(\xi) \quad (3.42)$$

Utilizando la ecuación 3.42 se tiene el resultado de la integración del producto de las velocidades:

$$\int_b^\eta v_x^2 dz = \hat{v}_{x(1)} h \bar{v}_x \quad \int_b^\eta v_x v_y dz = \hat{v}_{x(2)} h \bar{v}_y \quad (3.43a, b)$$

Donde $\hat{v}_{x(1)} = \beta_1 \bar{v}_x$ y $\hat{v}_{x(2)} = \beta_2 \bar{v}_x$, β_1 y β_2 son factores de corrección del momentum (Uoane, 2011; Liggett, 1994), que pueden ser determinados con base en las ecuaciones 3.43a, b:

$$\beta_1 h \bar{v}_x^2 = \int_b^\eta v_x^2 dz \quad \beta_2 h \bar{v}_x \bar{v}_y = \int_b^\eta v_x v_y dz \quad (3.44a, b)$$

Al despejar resulta:

$$\beta_1 = \frac{1}{h \bar{v}_x^2} \int_b^\eta v_x^2 dz \quad \beta_2 = \frac{1}{h \bar{v}_y \bar{v}_x} \int_b^\eta v_x v_y dz \quad (3.45a, b)$$

Al reemplazar las ecuaciones 3.44a, b en la ecuación 3.39:

$$\frac{\partial h \bar{v}_x}{\partial t} + \frac{\partial \beta_1 h \bar{v}_x^2}{\partial x} + \frac{\partial \beta_2 h \bar{v}_y \bar{v}_x}{\partial y} + A v_x(\eta) - B v_x(b) \quad (3.46)$$

Según Savage & Hutter (1989) los valores de β que se diferencia de la unidad dan información acerca de la desviación del perfil de velocidad desde la uniformidad. Para dar una idea de los valores numéricos de β , para un perfil de velocidad parabólico con desvanecimiento de la velocidad basal (que tiene diferencial por corte y no se desliza) $\beta = 6/5$, mientras que para un perfil uniforme (que todo se desliza sin diferencial por corte) $\beta = 1$. Como es probable que el deslizamiento exista, la zona activa de corte se limita a una delgada capa basal y el perfil de velocidad es “despuntado” (Savage & Hutter, 1989). En otras palabras no se supone que las velocidades no son función de z (constante en la vertical), pero los términos β se toman generalmente como unidad ($\beta = 1$), que es equivalente (Liggett, 1994; Uoane, 2011). Por lo tanto:

$$\frac{\partial h \bar{v}_x}{\partial t} + \frac{\partial h \bar{v}_x^2}{\partial x} + \frac{\partial h \bar{v}_y \bar{v}_x}{\partial y} + A v_x(\eta) - B v_x(b) \quad (3.47)$$

Reemplazando la ecuación 3.47 en el lado izquierdo de la ecuación 3.35 y despejando, finalmente resulta la ecuación de conservación de momentum en la dirección x , integrada en la profundidad:

$$\frac{\partial h \bar{v}_x}{\partial t} + \frac{\partial h \bar{v}_x^2}{\partial x} + \frac{\partial h \bar{v}_y \bar{v}_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \int_b^\eta \left[\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right] dz - A v_x(\eta) + B v_x(b) \quad (3.48)$$

Realizando una operación matemática similar a la que se hizo para obtener la ecuación 3.48 se tienen las ecuaciones de conservación de momentum en las direcciones y, z integradas en la profundidad:

$$\frac{\partial h \bar{v}_y}{\partial t} + \frac{\partial h \bar{v}_x \bar{v}_y}{\partial x} + \frac{\partial h \bar{v}_y^2}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \int_b^\eta \left[\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right] dz - A v_y(\eta) + B v_y(b) \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial h \bar{v}_z}{\partial t} + \frac{\partial h \bar{v}_x \bar{v}_z}{\partial x} + \frac{\partial h \bar{v}_y \bar{v}_z}{\partial y} = -gh - \frac{1}{\rho} \int_b^\eta \left[\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right] dz - A v_z(\eta) + B v_z(b) \quad (3.50)$$

- **Observación 3.1.** La fuerza gravitacional se supone que actúa verticalmente hacia abajo y aparece solamente en la ecuación de momentum en z (Ecuación 3.50). El movimiento en las direcciones x y y es impulsado por el gradiente de esfuerzos que surge en reacción a la fuerza gravitacional.
- **Observación 3.2.** A y B representan los cambios de momentum asociados con la aceleración de la masa recién adicionada o perdida (fuentes y sumideros), como resultado de la erosión o sedimentación respectivamente.

3.2.3. Análisis de escala y flujo superficial con esfuerzos no hidrostáticos

El **análisis de escala o escalamiento** es una técnica para estimar las magnitudes de varios términos en las ecuaciones de gobierno para un tipo de movimiento en particular. En el escalamiento, se esperan valores típicos de las siguientes cantidades específicas: (1) las magnitudes de las variables de campo; (2) la amplitud de la fluctuación en las variables de campo; y (3) las escalas características de longitud, profundidad y tiempo sobre esas fluctuaciones que ocurren. Estos valores típicos se utilizan para comparar las magnitudes de los

diversos términos en la ecuación y determinar si algunos términos en las ecuaciones son despreciables para un movimiento de material desagregado (Holton, 1992).

Por ejemplo, tanto en flujo de material desagregado como en flujo de agua superficial de extensión finita, la escala pertinente en la dirección z es típicamente el espesor H , mientras las escalas longitudinales en la dirección x y y que son típicamente las dimensiones planimétricas (longitud y ancho) del flujo (L) (ecuaciones 3.51a, b). Los componentes de velocidad en las direcciones x, y y z se escalan con el producto de la aceleración gravitacional, las escalas longitudinales pertinentes (L o H) elevado a la $1/2$ (ecuaciones 3.51d, e), y el tiempo se escala con $(L/g)^{1/2}$ porque el movimiento impulsado por la gravedad es dependiente del tiempo predominantemente en la dirección x y y (ecuación 3.51g). Todos los componentes de esfuerzos en las ecuaciones 3.48, 2.49 y 3.50, se escalan con el esfuerzo estático debido a la gravedad $\rho g H$, porque la gravedad y sus efectos sobre el peso del material desagregado es el proceso fundamental que impulsa el movimiento (ecuación 3.51c).

$$x, y \sim L \quad z \sim H \quad (3.51a, b)$$

$$\tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{zz}, \tau_{yx}, \tau_{zx}, \tau_{yz} \sim \rho g H \quad (3.51c)$$

$$\bar{v}_x, \bar{v}_y \sim (gL)^{1/2} \quad \bar{v}_z \sim (gH)^{1/2} \quad t \sim (L/g)^{1/2} \quad (3.51d, e, g)$$

Por la teoría de aguas superficiales, típicamente $H/L \ll 1$ (Figura 11), esta aproximación es justificada para la mayoría de los procesos hidrodinámicos de ríos, lagos, estuarios y aguas costeras, siendo válida cuando $H/L \leq 0,05$ (Ji, 2008).

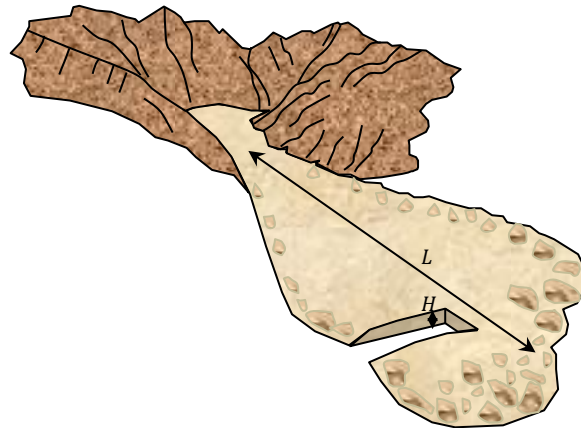


Figura 11. Esquema típico de la geometría de un flujo de material desagregado. Fuente: (Iverson, 2005).

El esfuerzo derivado en las direcciones x y y tiende a ser mucho más pequeño que en la dirección z [de orden (H/L)]. El componente de velocidad en la dirección z tiende a ser mucho más pequeño que los componentes de velocidad en x y y [de orden $(H/L)^{1/2}$], así una aproximación del momentum vertical se tiene omitiendo la componente de velocidad en z y los esfuerzos derivados en x y y . Para el caso de la ecuación 3.50:

$$\left[\frac{\partial h(gH)^{1/2}}{\partial (L/g)^{1/2}} + \frac{\partial h(gL)^{1/2}(gH)^{1/2}}{\partial L} + \frac{\partial h(gL)^{1/2}(gH)^{1/2}}{\partial L} \right] = -gh - \frac{1}{\rho} \int_b^\eta \left[\frac{\partial \rho g H}{\partial L} + \frac{\partial \rho g H}{\partial L} + \frac{\partial \rho g H}{\partial H} \right] dz$$

Por lo tanto:

$$0 = -gh - \frac{1}{\rho} \int_b^\eta \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz$$

$$\int_b^\eta \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz = -\rho gh \quad (3.52)$$

Al utilizar la condición de frontera de superficie libre en la integración, se supone como nulos tales esfuerzos $\sigma_{zz}(\eta) = 0$, resultando un esfuerzo normal basal hidrostático $\sigma_{zz}(b) = \rho gh$, normalmente utilizado en la teoría de aguas superficiales. Pero en el caso de flujos de material desagregado el estado de esfuerzos puede diferir significativamente del estado hidrostático, debido a que la aceleración vertical puede cambiar el peso de una masa de material desagregado en movimiento.

El efecto sobre los esfuerzos es importante donde un flujo de material desagregado se encuentre con pendientes empinadas y terrenos irregulares que desvíen el flujo. En este caso una aproximación adecuada de la ecuación de momentum vertical se puede obtener despreciando los términos de esfuerzos en x y y [de orden (H/L)] y reteniendo los términos de velocidad vertical [de orden $(H/L)^{1/2}$], De la ecuación 3.50 resulta:

$$\frac{\partial h \bar{v}_z}{\partial t} + \frac{\partial h \bar{v}_x \bar{v}_z}{\partial x} + \frac{\partial h \bar{v}_y \bar{v}_z}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \int_b^\eta \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz - gh \quad (3.53)$$

La ecuación 3.53 se expande cuando se utiliza la regla de la derivada de un producto sobre cada término del lado izquierdo de la ecuación:

$$\rho h \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial t} + \rho \bar{v}_z \frac{\partial h}{\partial t} + \rho h \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial x} + \rho \bar{v}_z \frac{\partial h \bar{v}_x}{\partial x} + \rho h \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial y} + \rho \bar{v}_z \frac{\partial h \bar{v}_y}{\partial y} = - \int_b^\eta \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz - \rho gh$$

Agrupando términos:

$$\rho \bar{v}_z \left[\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial h \bar{v}_y}{\partial y} \right] + \rho h \left[\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial t} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial y} \right] = - \int_b^\eta \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz - \rho gh$$

Si la derivada material es representada como: $d\bar{v}_z/dt = \partial \bar{v}_z/\partial t + \bar{v}_x \partial \bar{v}_z/\partial x + \bar{v}_y \partial \bar{v}_z/\partial y$, entonces se tiene:

$$\rho gh + \rho \bar{v}_z \left[\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial h \bar{v}_y}{\partial y} \right] + \rho h \frac{d\bar{v}_z}{dt} = - \int_b^\eta \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz \quad (3.54)$$

Si se multiplica a ambos lados de la ecuación 3.52 por (-1) , se puede igualar al esfuerzo normal basal en la dirección z :

$$- \int_b^\eta \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz = \rho gh = \sigma_{zz}(b) \quad (3.55)$$

Reemplazando la ecuación 3.55 en 3.54 resulta:

$$\rho gh + \rho \bar{v}_z \left[\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial h \bar{v}_y}{\partial y} \right] + \rho h \frac{d\bar{v}_z}{dt} = \sigma_{zz}(b) \quad (3.56)$$

Reemplazando el segundo término del lado izquierdo de la ecuación 3.56 por la ecuación de conservación de masa integrada en la profundidad promedio (ecuación 3.32) y sin intercambios de masa ($A = B = 0$), se tiene la aproximación en la teoría de agua superficiales para el movimiento de flujo de material desagregado en pendientes pronunciadas e irregulares, que se puede reducir a la aproximación de la presión hidrostática si $d\bar{v}_z/dt = 0$ y $d\rho/dt = 0$.

$$\sigma_{zz}(b) = \rho g' h - \rho \bar{v}_z \int_b^\eta \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} dz \quad (3.57)$$

Donde g' denota la aceleración vertical definida por:

$$g' = g + \frac{d\bar{v}_z}{dt} \quad (3.58)$$

Para poder realizar una estimación de las ecuaciones 3.57 y 3.58 es necesario hallar $\bar{v}_z$. La velocidad $\bar{v}_z$ se puede apreciar promediándola entre la superficie y el lecho, que es obtenida por la inclusión de los componentes de velocidad en la profundidad promedio $\bar{v}_x$ y $\bar{v}_y$ en las condiciones cinemáticas de frontera de las ecuaciones 3.17 y 3.19, resultando:

$$\bar{v}_z \approx \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \eta}{\partial t} + \bar{v}_x \frac{d\eta}{dx} + \bar{v}_y \frac{\partial \eta}{\partial y} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial b}{\partial t} + \bar{v}_x \frac{\partial b}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial b}{\partial y} \right] \quad (3.59)$$

3.3. Evaluación de esfuerzos

Utilizando la definición del primer teorema de valor medio para integrales para hallar el valor medio de los esfuerzos en las direcciones x y y , resulta:

$$\bar{\sigma}_{xx} = \frac{1}{h} \int_{z=b}^{z=\eta} \sigma_{xx} dz \quad \bar{\tau}_{yx} = \frac{1}{h} \int_{z=b}^{z=\eta} \tau_{yx} dz \quad (3.60a, b)$$

Donde la barra en la parte superior es una notación abreviada para el valor medio integrado en profundidad. Al despejar las ecuaciones 3.60a, b se tiene:

$$\bar{\sigma}_{xx} h = \int_{z=b}^{z=\eta} \sigma_{xx} dz \quad \bar{\tau}_{yx} h = \int_{z=b}^{z=\eta} \tau_{yx} dz \quad (3.61a, b)$$

La integración del lado izquierdo de la ecuación de conservación de momentum (ecuación 3.48):

$$\int_b^\eta \left[\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right] dz = \int_b^\eta \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dz + \int_b^\eta \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dz + \int_b^\eta \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \quad (3.62)$$

Al utilizar la regla de integración de Leibniz (ecuación 3.22) en la ecuación 3.62, resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_b^\eta \sigma_{xx} dz - \sigma_{xx}(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \sigma_{xx}(b) \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \int_b^\eta \tau_{yx} dz - \tau_{yx}(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} + \tau_{yx}(b) \frac{\partial b}{\partial y} \\ + \tau_{zx}(\eta) - \tau_{zx}(b) \end{aligned} \quad (3.63)$$

Al agrupar términos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_b^\eta \sigma_{xx} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_b^\eta \tau_{yx} dz - \left[\sigma_{xx}(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \tau_{yx}(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} - \tau_{zx}(\eta) \right] \\ + \left[\sigma_{xx}(b) \frac{\partial b}{\partial x} + \tau_{yx}(b) \frac{\partial b}{\partial y} - \tau_{zx}(b) \right] \end{aligned} \quad (3.64)$$

Suponiendo que la superficie superior del flujo (η) está libre de todos los esfuerzos [$T_{ij}(\eta) = 0$], el grupo de términos que están dentro del primer corchete de la ecuación 3.64 se pueden depreciar:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_b^\eta \sigma_{xx} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_b^\eta \tau_{yx} dz + \left[\sigma_{xx}(b) \frac{\partial b}{\partial x} + \tau_{yx}(b) \frac{\partial b}{\partial y} - \tau_{zx}(b) \right] \quad (3.65)$$

Finalmente al reemplazar el valor medio de los esfuerzos (ecuaciones 3.61a, b) en los dos primeros términos de la ecuación 3.65, se tiene el resultado de la integración de los términos de esfuerzos de la ecuación de conservación momentum en la dirección x :

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{xx} h}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{yx} h}{\partial y} + \left[\sigma_{xx}(b) \frac{\partial b}{\partial x} + \tau_{yx}(b) \frac{\partial b}{\partial y} - \tau_{zx}(b) \right] \quad (3.66)$$

Por lo tanto:

$$\int_b^\eta \left[\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right] dz = \frac{\partial \bar{\sigma}_{xx} h}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{yx} h}{\partial y} + \left[\sigma_{xx}(b) \frac{\partial b}{\partial x} + \tau_{yx}(b) \frac{\partial b}{\partial y} - \tau_{zx}(b) \right] \quad (3.68)$$

Realizando una operación matemática similar a la que se hizo para obtener la ecuación 3.68, se tienen la ecuación de conservación de momentum en la dirección y integrada en la profundidad:

$$\int_b^\eta \left[\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right] dz = \frac{\partial \bar{\tau}_{xy} h}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{yy} h}{\partial y} + \left[\sigma_{xy}(b) \frac{\partial b}{\partial x} + \tau_{yy}(b) \frac{\partial b}{\partial y} - \tau_{zy}(b) \right] \quad (3.69)$$

- **Observación 3.3.** De las ecuaciones 3.68 y 3.69, los dos primeros términos que se encuentran al lado derecho describen la influencia del gradiente de esfuerzos horizontales en la profundidad promedio y los términos agrupados dentro de los corchetes describen la resistencia basal al movimiento y dos términos de arrastre que son diferentes de cero si los componentes locales del lecho ($\partial b/\partial x, \partial b/\partial y$) resultan en un componente de fuerzas horizontales directas dentro o fuera del lecho (Iverson, 2005).
- **Observación 3.4.** La aproximación más sencilla para los términos de esfuerzos que aparecen al lado derecho de las ecuaciones 3.68 y 3.69, pueden ser hallados con el uso del escalamiento, indicando que la resistencia basal es del orden de $\rho g H$, mientras que los términos de esfuerzos horizontales en la profundidad promedio $\bar{\sigma}_{xx}$, $\bar{\tau}_{yx}$, $\bar{\tau}_{xy}$ y $\bar{\sigma}_{yy}$ son pequeños, del orden de $\rho g H^2/L$ (donde $H/L \ll 1$).

3.3.1. Partición de esfuerzos

En flujos de material desagregado se incluyen distintas contribuciones de esfuerzos como la de granos sólidos, fluido intergranular y la interacción entre sólido-fluido.

- La definición más sencilla de la fase fluida en un flujo de material desagregado consiste en agua líquida pura y aire puro, aunque el aire se puede excluir de la consideración por su baja densidad, baja viscosidad y gran compresibilidad. Esto hace que los efectos mecánicos sean muy pequeños comparados con los del agua. Por otra parte, se supone que el agua de los flujos de material desagregado lleva pequeños granos sólidos que permanecen suspendidos únicamente como consecuencia de la flotación, viscosidad y turbulencia. Estos granos a su vez influyen las propiedades efectivas del fluido.
- La fase sólida se puede caracterizar utilizando un criterio de escalamiento. Si la duración de un flujo de material desagregado (t_D) es prolongada en comparación con el tiempo requerido para el asentamiento de granos en estado de reposo, entonces los granos deben ser considerados como fracción sólida, por el contrario si los granos pueden permanecer suspendidos por tiempos que exceden t_D como resultado solo de la viscosidad del agua y la flotación, entonces los granos actúan como parte del fluido.

La duración de los flujos de material desagregado (t_D) está en un rango entre 10s (para pequeños pero significantes eventos) y 10^4 s (para eventos prolongados). La escala de tiempo de asentamiento se puede estimar dividiendo la distancia de asentamiento o la mitad del espesor de un flujo de material desagregado $H/2$ por la velocidad de asentamiento (v_{set}) estimada a partir de la ley de Stokes. Así, Cuando $H/(2t_D v_{set}) < 1$ la duración del flujo de material desagregado es prolongada en comparación con el tiempo de asentamiento de los granos.

El rango de $H/2$ para flujos de material desagregado esta alrededor de 0,01 m para pequeños flujos hasta 10 m para flujos grandes. Entonces, si $v_{set} = H/2t_D \sim 0,001$ m/s siendo este típico para eventos pequeños y grandes de flujos de material desagregado, implica que se requiere una velocidad de sedimentación $v_{set} < 0,001$ m/s para que los granos actúen como parte del fluido. Esta velocidad de asentamiento ocurre si el diámetro de partículas es menor a 0,05 mm, que según la clasificación de suelos de United States Department of Agriculture (USDA), el tamaño de partículas pertenece a arcillas (0.0002-0.002mm) y limos (0.002-0.05mm) (Gee & Or, 2002).

De acuerdo con los esfuerzos que aporta cada una de las fases, la partición de esfuerzos entre las fases sólida y fluida de una mezcla se puede realizar teniendo en cuenta la mecánica de sólidos. Así el esfuerzo total de la mezcla se puede partir como:

$$T = T_e + IP + nT_{vis} \quad (3.70)$$

Donde T_e es el tensor de esfuerzos efectivos, P es la presión de poros del fluido, I es el tensor identidad, T_{vis} es el tensor de esfuerzos viscosos del fluido y n es la porosidad de mezcla (o en caso de saturación, la fracción de volumen de fluido). Para el caso especial en que el fluido sea estático y el estado de esfuerzos sea en 1-D, la anterior ecuación se puede reducir a la definición de esfuerzos efectivos propuesta por Terzaghi en 1936:

$$\sigma = \sigma_e + P \quad (3.71)$$

Donde σ denota el esfuerzo normal y σ_e es el esfuerzo normal efectivo.

3.3.2. Interacción sólido-fluido

Las fases sólida y fluida pueden interactuar de diferentes formas. Para proporcionar una teoría simple, se establece una conexión con la mecánica de sólidos clásica, por medio del análisis de la interacción aparente de los sólidos y fluidos en un volumen elemental representativo continuo. Consecuentemente, para una mezcla de flujo de material desagregado con una porosidad (n) totalmente saturada [$n = n_f / (n_f + n_s)$], las ecuaciones de conservación de masa para la fase fluida (ecuación 3.72) y sólida (ecuación 3.73), son:

$$\frac{\partial n \rho_f}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{v}_f n \rho_f = 0 \quad (3.72)$$

$$\frac{\partial [(1-n) \rho_s]}{\partial t} + \nabla \cdot [\vec{v}_s (1-n)] = 0 \quad (3.73)$$

Donde los subíndices f y s denotan las fases fluida y sólida respectivamente. Si la densidad de las dos fases es constante (suposición posible si la magnitud de los esfuerzos es $<100\text{KPa}$ típica de flujo de material desagregado), las ecuaciones 3.72 y 3.73 se pueden reducir respectivamente a:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{v}_f n) = 0 \quad (3.74)$$

$$-\frac{\partial n}{\partial t} - \nabla \cdot (\vec{v}_s n) + \nabla \cdot \vec{v}_s = 0 \quad (3.75)$$

Despejando la ecuación 3.75 y reemplazando en la ecuación 3.74, resulta una ecuación especial de conservación de masa de la mezcla (3.78), que muestra como la divergencia de la velocidad de los granos sólidos ($\nabla \cdot \vec{v}_s$) debe ser equilibrada por el flujo del fluido respecto al de los grano.

$$-\nabla \cdot (\vec{v}_s n) + \nabla \cdot \vec{v}_s + \nabla \cdot (\vec{v}_f n) = 0 \quad (3.76)$$

$$-\nabla \cdot n(\vec{v}_s - \vec{v}_f) \nabla \cdot \vec{v}_s = 0 \quad (3.77)$$

$$\nabla \cdot \vec{v}_s = -\nabla \cdot n(\vec{v}_f - \vec{v}_s) \quad (3.78)$$

Una ecuación adicional muestra como la misma divergencia debe ser equilibrada por cambios en la porosidad, que se puede obtener al reordena la ecuación 3.75 y reemplazándola en la ecuación 3.74:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{v}_s &= \frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{v}_s n) \\ \nabla \cdot \vec{v}_s &= \frac{\partial n}{\partial t} + \vec{v}_s \nabla \cdot n + n \nabla \cdot \vec{v}_s = \frac{d_s n}{dt} + n \nabla \cdot \vec{v}_s \end{aligned} \quad (3.79)$$

Donde $d_s n/dt = \partial n/\partial t + \vec{v}_s \cdot \nabla n$ denota la derivada material con respecto al tiempo en un marco de referencia que se desplaza con la velocidad de los granos sólidos $\vec{v}_s$. Entonces:

$$\nabla \cdot \vec{v}_s = \frac{d_s n}{dt} + n \nabla \cdot \vec{v}_s$$

$$\nabla \cdot \vec{v}_s - n \nabla \cdot \vec{v}_s = \frac{d_s n}{dt}$$

$$\nabla \cdot \vec{v}_s (1 - n) = \frac{d_s n}{dt}$$

Después de algunos procedimientos algebraicos, finalmente se tiene:

$$\nabla \cdot \vec{v}_s = \frac{1}{1 - n} \frac{d_s n}{dt} \quad (3.80)$$

Reemplazando la ecuación 3.80 en 3.78, resulta:

$$\frac{1}{1 - n} \frac{d_s n}{dt} = -\nabla \cdot n(\vec{v}_f - \vec{v}_s) \quad (3.81)$$

$$\frac{d_s n}{dt} = -(1 - n) \nabla \cdot n(\vec{v}_f - \vec{v}_s) \quad (3.82)$$

La ecuación 3.82 muestra que los cambios locales de porosidad necesariamente van acompañados por una diferencia de velocidades locales entre los sólidos y el fluidos. Esa diferencia de velocidades $\vec{v}_f - \vec{v}_s$ implica la existencia de arrastre debido al movimiento relativo de los granos sólidos y el fluido adyacente. Una forma de evaluar el arrastre en un VER continuo, se hace suponiendo que es proporcional al gradiente de exceso de presión del fluido P_e (donde P_e es definido como la presión total del fluido menos la presión hidrostática). Por lo tanto:

$$\vec{v}_f - \vec{v}_s = \frac{\vec{q}}{n} = -\frac{k}{n\mu} \nabla p_e \quad (3.83)$$

Donde $\vec{q}$ es la descarga específica de fluido, k es la permeabilidad hidráulica intrínseca del agregado granular, μ es la viscosidad del fluido y el grupo de coeficientes $k/n\mu$ se puede ver como un parámetro de arrastre.

3.3.3. Esfuerzos debido a la interacción entre granos sólidos

Para los esfuerzos causados por la interacción entre granos sólidos se han realizado observaciones en campo y experimentos de laboratorio indicando que el contacto de granos sólidos con el lecho y unos contra otros transfiere gran cantidad de momentum y disipa mucha energía, produciendo así muchos esfuerzos durante el movimiento (Iverson, 2005). El contacto entre los granos y el lecho o entre granos sólidos, se puede considerar como un deslizamiento friccional o en forma de breves colisiones inelásticas. Por lo tanto, la estimación de esfuerzos cortantes intergranular en modelos de flujos de material desagregado en la profundidad promedio se puede evaluar con la ecuación desarrollada por Coulomb en 1976.

$$\tau = \sigma \tan \varphi \quad (3.84)$$

La ecuación 3.84 muestra como el esfuerzo cortante intergranular τ es directamente proporcional al esfuerzo normal intergranular σ actuando sobre el mismo plano. La constante de proporcionalidad es la tangente del ángulo de fricción φ . La ecuación 3.84 se puede generalizar reemplazando σ con el esfuerzo normal efectivo intergranular, definido como el esfuerzo total menos la presión de poros ($\sigma_e = \sigma - P$) y se puede adicionar un componente de resistencia cohesiva c , resultando la ecuación de Coulomb-Terzaghi, utilizada para describir esfuerzos durante el corte de la falla en rocas y suelos.

$$\tau = (\sigma - P) \tan \varphi + c \quad (3.85)$$

En el caso de flujo de material desagregado, la componente de resistencia cohesiva se puede despreciar, debido a las grandes deformaciones que se presentan en este tipo de fenómenos:

$$\tau = (\sigma - P) \tan \varphi \quad (3.86)$$

Esta ecuación es apta para estimar el esfuerzo cortante basal intergranular que resiste el movimiento del flujo de material desagregado. En este caso el esfuerzo normal total en el lecho se puede estimar por el peso aparente de una columna en movimiento de material desagregado superpuesto (Figura 12), con densidad de mezcla constante ρ , altura vertical media h , y un área horizontal planimétrica $\Delta x \Delta y$, resultando de esta manera $\rho g' h \Delta x \Delta y$ donde g' es definido por la ecuación 3.58. Así el peso aparente (F) normal al lecho es:

$$F = w \cos \theta = \rho g' h \Delta x \Delta y \cos \theta \quad (3.87)$$

Donde θ es el ángulo entre el lecho y la superficie de referencia horizontal (Figura 12). Entonces el esfuerzo basal (fuerza por unidad de área) es:

$$\sigma = \frac{\rho g' h \Delta x \Delta y \cos \theta}{\frac{\Delta x \Delta y}{\cos \theta}} = \rho g' h \cos^2 \theta \quad (3.88)$$

Reemplazando la ecuación 3.88 en 3.86, se tiene la resistencia cortante basal que actúa paralelo a la base de la columna de material desagregado.

$$\tau(b) = (\rho g' h \cos^2 \theta - P_{bed}) \tan \varphi_{bed} \quad (3.89)$$

Donde φ_{bed} denota el ángulo de fricción en la interface entre el lecho y el flujo, y P_{bed} es la presión de poros en el lecho. Para un deslizamiento paralelo al lecho, la resistencia basal (ecuación 3.89) puede tomar el lugar de los términos de acumulación de esfuerzos que aparecen dentro de los corchetes en las ecuaciones 3.68 y 3.69 como $[\sigma_{xx}(b) \partial b / \partial x + \tau_{yx}(b) \partial b / \partial y - \tau_{zx}(b)]$.

Un componente de esfuerzo adicional que aparece en las ecuaciones 3.68 y 3.69, se puede evaluar con el uso de coeficientes de presión lateral de tierras. De esta manera, el esfuerzo lateral en la profundidad promedio tal como $\bar{\sigma}_{xx}$ está relacionado con el esfuerzo vertical $\bar{\sigma}_{zz}$ mediante una simple proporcionalidad:

$$\bar{\sigma}_{xx} = k_{act/pas} \bar{\sigma}_{zz} \quad (3.90)$$

Donde $k_{act/pas}$ es descrito por (Savage & Hutter, 1989) como:

$$k_{act/pas} = 2 \frac{1 \mp [1 - \cos^2 \varphi_{int} (1 + \tan^2 \varphi_{deb})]^{1/2}}{\cos^2 \varphi_{int}} - 1 \quad (3.91)$$

La ecuación 3.91 se presenta de forma detallada en el apéndice c de Iverson (1997).

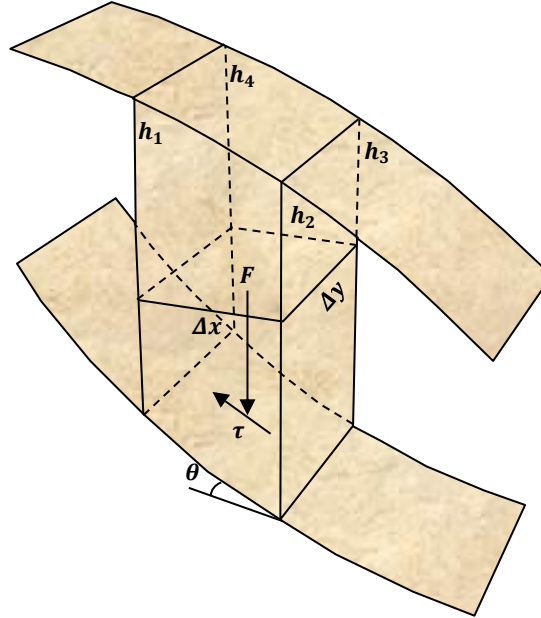


Figura 12. Geometría utilizada para el cálculo del esfuerzo normal basal, debido al peso aparente de una columna vertical de material desagregado con una altura media $h = (h_1 + h_2 + h_3 + h_4)/4$. Fuente: (Iverson, 2005).

3.3.4. Esfuerzos cortantes del fluido

En flujos de material desagregado, los esfuerzos también resultan de las deformaciones por corte de la fase fluida que consiste en agua más partículas de limo y arcilla que son transportadas de manera suspendida. Pruebas reométricas indican que las viscosidades de lodos con grano fino van desde 0,1 hasta 50 Pa-s (entre 100 y 500 veces más que la viscosidad del agua pura) que depende de la concentración de sedimentos. Así que el mejor modelo matemático para representar el esfuerzo cortante de un fluido en una mezcla de flujo de material desagregado es el modelo de Bingham (Figura 13), que para 1-D es:

$$\tau = S_f + \mu \frac{dv_x}{dz} \quad (3.92)$$

Donde S_f es la resistencia al corte del fluido, dv_x/dz es la razón de deformación del fluido y μ es la viscosidad dinámica. El esfuerzo cortante basal del fluido (ecuación 3.92) se puede expresar como función de la velocidad del flujo de material desagregado en la profundidad promedio $\bar{v}_x$ y el espesor de flujo h , asumiendo que el esfuerzo cortante resulta solo del peso del material desagregado superpuestos [$\tau = \rho g'(\eta - z) \sin \theta \cos \theta$, análogos a la suposición hecha para obtener el esfuerzo cortante de Coulomb (ecuación 3.89)] (Iverson, 2005).

Integrando la ecuación 3.92 entre $z = 0$ y $z = h$, muestra que la resistencia basal debida al cortante del fluido se puede expresar como:

$$\tau(b) = S_f + \bar{\eta} \int_0^h \frac{dv_x}{dz} dz = \left[S_f + \bar{\eta} \frac{v_x}{z} \Big|_{z=h} - S_f + \mu \frac{v_x}{z} \Big|_{z=0} \right] = S_f + \mu \frac{\bar{v}_x}{h} = S_f + 3\mu \frac{\bar{v}_x}{h} \quad (3.93)$$

La forma de la ecuación 3.93 resulta de la suposición de una condición de frontera basal sin deslizamiento para el flujo de un fluido con un perfil de velocidad parabólico en la dirección z (Iverson & Denlinger, 2001a; Bird, et al., 2002).

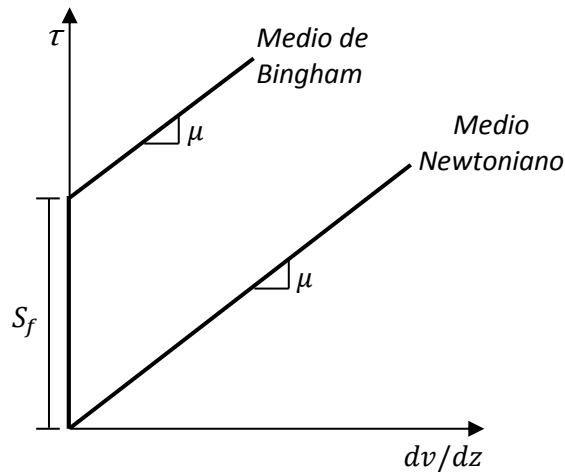


Figura 13. Comportamiento de fluidos Newtonianos y plástico ideal (Bingham). Fuente: (Oertel, 2001).

Si se compara la magnitud del esfuerzo cortante del fluido con el esfuerzo cortante basal de Coulomb (ecuación 3.89) para valores de parámetros como $\rho = 2000 \text{Kg/m}^3$, $h = 1\text{m}$, $V = 10\text{m/s}$, $\theta = 5^\circ$, $P_{bed} = 0$, $\tan \phi_{bed} = 30^\circ$, $S_f = 100\text{Pa}$ y $\mu = 10\text{Pa-s}$, el esfuerzo cortante basal de Coulomb es del orden de 10KPa , mientras que el esfuerzo cortante del fluido es del orden de 500Pa , 20 veces mas pequeño que el esfuerzo cortante de Coulomb. Esta relación de esfuerzos es reducida de 1:1 si la presión de poros casi licua la mezcla (Iverson, 2005). Esto conduce a que se omita cualquier mención de turbulencia del fluido, aunque la turbulencia de flujo del fluido podría estar presente en los flujos de material desagregado, esta es suprimida por la presencia de altas concentraciones de granos sólidos (Iverson, 2005; Brennen, 2005).

En este capítulo se presentaron algunas de las consideraciones que se tienen en los flujos de material desagregado en forma general al percibir estos procesos desde la mecánica de medios continuos. Algunos de los desarrollos matemáticos plasmados en este capítulo se compatibilizan con consideraciones planteadas en el capítulo 4, para el desarrollo del método de Iverson and Denglinger (2001).

4. FLUJO DE MASAS GRANULARES FLUIDIZADAS A TRAVÉS DE TERRENOS TRIDIMENSIONALES

Después de realizar la clasificación de algunos procedimientos para la modelación de material desagregado (Tabla 1), se seleccionó el procedimiento desarrollada por Iverson & Denlinger (2001). Dicha selección se debe a que su desarrollo se fundamenta desde la física mecánica y las reglas matemáticas para modelar el comportamiento de estos procesos. Esta propuesta tendrá en cuenta varios aspectos que resultarán similares a los desarrollados en el capítulo 3.

A diferencia del capítulo anterior, se llegará a una serie de ecuaciones (sección 4.3.3) que consideran las fuerzas de interacción de sólidos, fluidos y sólido-fluidos, de las cuales se plasman soluciones analíticas después de ser simplificadas (sección 4.4). Estas ecuaciones describen el comportamiento del flujo de material desagregado desde el inicio hasta la deposición, y requieren como parámetros de entrada las condiciones iniciales, topografía de la trayectoria, ángulo de fricción interna y de los granos sólidos del lecho, viscosidad del fluido, densidad de mezcla y la presión de poros.

Por otra parte se realiza una descripción de los procesos que pueden ser modelados en este procedimiento, de acuerdo con la clasificación cualitativa de los movimientos en masa realizada en el capítulo 1 (Figura 2, 3 y 14). Esta descripción esta de una manera explícita, señalada por el recuadro difuminado de color verde (Figura 14).

Los tipos de movimientos en masa que no podrían ser descritos por el modelo propuesto por Iverson & Denlinger (2001) son: Flujos y caída de rocas (límite derecho), ya que el modelo es multifase y estos dos procesos tienden a ser ligeramente húmedos (Suarez, 1998). Reptación (límite derecho inferior) es un proceso demasiado lento (del orden de cm/año) lo que anularía los términos de velocidad. Este caso podría ser analizado en estado estático tal como se desarrolla en la sección 4.4.3. Para el deslizamiento rotacional (límite inferior), la formulación más general como se muestra en la sección 4.3.3 podría describirlo, ya que esta tiene en cuenta la curvatura de la trayectoria, pero para la formulación simplificada (sección 4.4.1. Movimiento traslacional), se supone que la masa desciende por un plano inclinado de pendiente constante, razón por la cual no puede describir un movimiento rotacional.

Los flujos hiper-concentrados (límite izquierdo) según Coussot & Meunier (1996) tiene concentraciones de sólidos entre 1 y 25%, aunque según Spalletti, et al (2005) pueden llegar a tener concentraciones en volumen de hasta un 40%. Estos procesos podrían ser descritos por el modelo de Iverson & Denlinger (2001), siempre y cuando se tenga en cuenta que deben existir esfuerzos cortantes por fricción entre sólidos [por ejemplo cuando el numero de Savage ($N_s < 0,1$) (sección 4.1)], en el caso en que la concentración de sólidos disminuya de tal forma que la interacción entre sólidos no sea friccional, sino por colisiones entre granos [por ejemplo cuando el numero de Savage ($N_s > 0,1$) y el numero de Bagnold ($N_B > 450$)], esta formulación no sería la adecuada para este tipo de proceso.

Tanto los procesos como deslizamientos traslacionales y flujos de suelos cuyo contenido de agua es menor que los flujos hiper-concentrados, flujos de lodos y flujos de detritos, también pueden ser descritos por el modelo, siempre y cuando se tenga presente que la variación de la presión de fluido es lineal desde un máximo en el lecho, hasta cero en la superficie del flujo (sección 4.3.1).

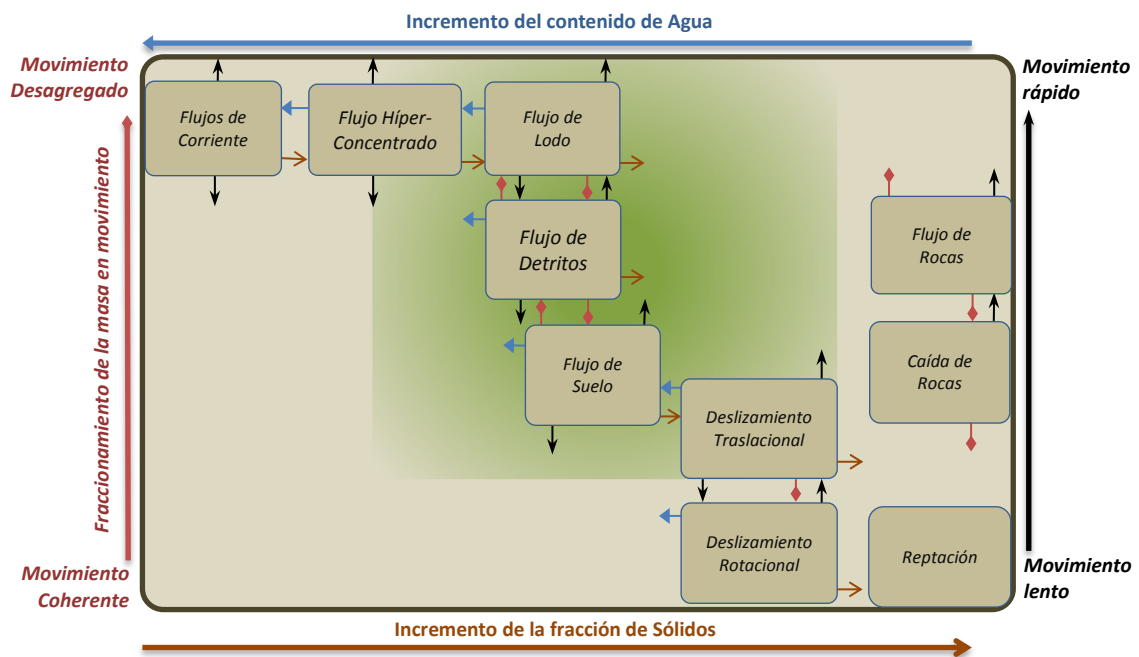


Figura 14. Clasificación de movimientos en masa en función de la fracción de sólidos (→), el contenido de agua (←), la disgregación del material (↕) y la velocidad del movimiento (↑).

Tabla 1. Revisión bibliográfica de procedimientos para la modelación de flujos de material desagregado que se basan en la física mecánica.

Autores	Consideraciones de los modelos						
	Condiciones de frontera geométrica del basamento	Conservación de masa	Conservación de momentum	Perfil de Velocidad	Estimación de esfuerzos de los sólidos	Estimación de esfuerzos del fluido	Método de solución
(Denlinger & Iverson, 2001)	r	*°~	*°~	Parabólico	C	N, (N-S)	Riemann
(Iverson & Denlinger, 2001a)	r	*°~	*°~	Parabólico	C	N, (N-S)	Analítico
(Pudasaini, et al., 2005)	$\wedge$	*°~	*°~	Casi uniforme	C	N, (N-S)	CNO
(Iverson, 2005)	$\backslash$	*°~, (E)	*°~	-----	C	B, (N-S)	-----
(Rickenmann, et al., 2006)	i	*°~	*°~	-----	C	B, (H-B), (VF)	Elementos finitos
(Wang, et al., 2008)	i	*°~	*°~	Parabólico	C	N, (N-S)	Diferencias finitas
(Quan Luna, et al., 2012)	i, r	*°~	*°~	-----	C	B, (S-V)	Diferencias finitas

r : Superficie curva, $\wedge$: Superficie curva y retorcida, $\backslash$: Superficie Plana, i : Superficie irregular, *: Se supone incompresibilidad, °: Teoría de mezcla, ~: Teoría de la profundidad promedio, E: Ecuación especial de conservación de masa (Ecuación 3.78), C: Teoría de fricción de Coulomb, N: Fluido Newtoniano, B: Modelo de Bingham, N-S: Modelo de Navier-Stokes, H-B: Modelo reológico de Herschel-Bulkley, VF: Relación de fricción del fluido Voellmy, S-V: Modelo de Saint-Venant, CNO: Esquema Central No Oscilatorio.

4.1. Transferencia de esfuerzos

En los flujos rápidos de material desagregado, predominan las colisiones breves entre granos para transportar momentum en lugar de contactos friccionales prolongados (Savage, 1984). Aunque según Iverson & Denlinger (2001), valores tabulados indican que muchos de los flujos geofísicos probablemente estén comprendidos en el dominio de la fricción, en lugar del dominio de la colisión.

La influencia de la fricción de Coulomb y la colisión de granos en los flujos de material desagregado impulsados por la gravedad se puede evaluar utilizando un criterio numérico identificado por Savage en 1984. Este criterio distingue los regímenes de flujo sobre la base de un parámetro adimensional (N_s), que caracteriza los flujos constantes y uniformes.

$$N_s = \frac{\rho_s \dot{\gamma}^2 \delta^2}{(\rho_s - \rho_f)gH} \quad (4.1)$$

Donde, ρ_s y ρ_f son las densidades de los sólidos y el fluido respectivamente, $\dot{\gamma}$ es la razón de deformación, δ es el diámetro de los granos, g es la aceleración gravitacional, y H es el espesor del flujo de material desagregado. Por ejemplo, $N_s > 0,1$ corresponde a un estado "fluidizado" de la mezcla en que las interacciones por colisiones juegan un papel dominante (Figura 15b) (Savage & Hutter, 1989). Si $N_s < 0,1$, la fricción de Coulomb puede superar todas las otras formas de resistencia al corte (Figura 15a) (Iverson & Denlinger 2001).

Bagnold en 1954 evaluó con experimentos la función de los esfuerzos viscosos del fluido en mezclas granulares. Distingue la contribución de esfuerzos por colisión de granos y esfuerzos viscosos en flujos constantes y uniformes sobre la base de un parámetro adimensional N_B , definido como:

$$N_B = \left(\frac{n_s^{1/3}}{n_*^{1/3} - n_s^{1/3}} \right)^{1/2} \frac{\rho_s \dot{\gamma} \delta^2}{\mu} \quad (4.2)$$

Donde, n_s es la fracción de volumen de los sólidos (concentración), n_* es el máximo valor de n_s y μ es la viscosidad del fluido intersticial. Por ejemplo si $N_B < 40$ indica un régimen "macroviscoso" en que la mayor parte de los esfuerzos normales y cortantes son proporcionales a la razón de deformación $\dot{\gamma}$ (Figura 15a). Si $N_B > 450$ indica que la colisión domina el régimen de flujo (Figura 15b), en que la mayoría de los esfuerzos normal y cortante son proporcionales a $\dot{\gamma}^2$.

Para flujos delgados y rápidos en pendiente pronunciadas, altas velocidades de deformación causan que el N_s y N_B sean moderadamente grandes. Así, se podría esperar que la colisión de granos transmita más esfuerzos, aunque la fricción y la viscosidad pueden también contribuir significativamente. Para flujos grandes con mayor profundidad y menores velocidades de deformación, producen pequeños valores de N_s y N_B indicando que la transferencia de esfuerzos por colisiones probablemente sea despreciable en estos flujos, y que la fricción y la viscosidad tiene un papel dominante (Iverson, 1997). Datos tabulados por Iverson & Denlinger (2001) e Iverson (1997) muestran que eventos como flujos de lodos, flujos de detritos y avalanchas de rocas, pueden predominar las interacciones por fricción y viscosidad, ya que N_s tiene valores del orden de 1×10^{-7} , 0,03 y 0,06 respectivamente.

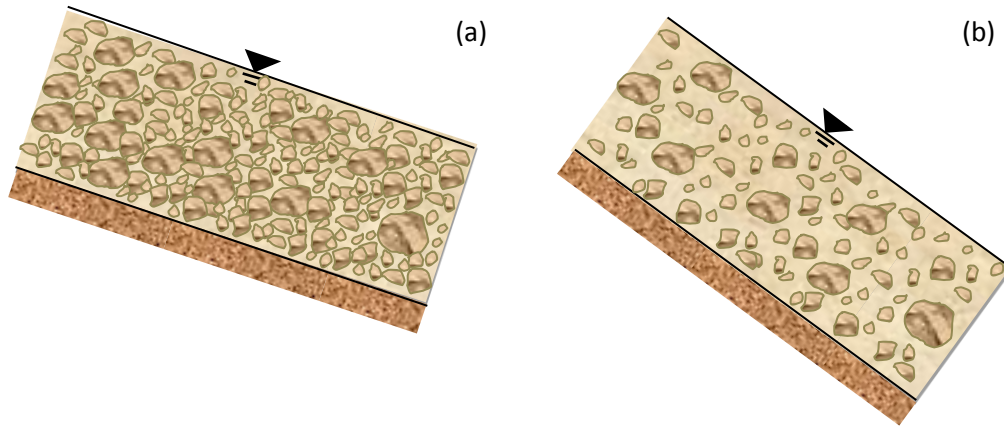


Figura 15. Secciones longitudinales de flujos constantes y uniformes de mezclas sólidos-fluido impulsados por gravedad hacia abajo por planos inclinados. (a) altamente concentrado, flujo dominado por el régimen fricción. (b) altamente diluido, flujo dominado por el régimen colisión. Fuente: (Iverson & Denlinger, 2001).

4.1.1. Comportamiento friccional de una mezcla (Coulomb)

De acuerdo con lo anterior, para la formulación flujos de material desagregado se tomará en cuenta el comportamiento friccional de Coulomb, así como la influencia del fluido intergranular. La presión de poros del fluido intersticial influye en la fricción de Coulomb para deformar masas granulares y se puede diferenciar de la presión constante cuando la masa está en equilibrio. Cálculos y datos indican que el principio de esfuerzo efectivo puede describir estos efectos de la presión de poros incluso si las deformaciones son moderadamente grandes y rápidas (Iverson & LaHusen, 1989). La ecuación de Coulomb con efectos de la presión de poro se puede escribir en varias formas:

$$\tau_{yield} = (\sigma_{yield} - P) \tan \varphi + c \quad (4.3)$$

$$\tau_{máximo} = (\sigma_{medio} - P) \sen \varphi + c \cos \varphi \quad (4.4)$$

$$\left[\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right)^2 + \tau_{yx}^2 \right]^2 = \left[\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right) - P \right]^2 \sen^2 \varphi + c^2 \cos^2 \varphi \quad (4.5)$$

Donde τ es el esfuerzo de corte intergranular, σ es el esfuerzo total normal de compresión, P es la presión de poros, φ es el ángulo de fricción intergranular, c es la cohesión intergranular, y $(\sigma - P)$ es el esfuerzo efectivo intergranular. Los subíndices denotan que los esfuerzos actúan sobre un plano resultante como en 4.3, sobre un plano máximo de esfuerzo cortante y esfuerzo normal medio como en 4.4 o sobre un plano definido por un sistema de coordenadas como en 4.5.

4.2. Teoría de mezcla

Para describir el flujo de la mezcla de grano y líquido se adopta el balance de conservación de masa (Ecuación 4.6) y momentum lineal (Ecuación 4.7) desde la teoría de mezcla en medios continuos [ya desarrollada en la sección 3.2.1 (ecuaciones 3.4 y 3.10) respectivamente].

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{v} = 0 \quad (4.6)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = -\nabla \cdot (T_s + T_f + T') + \rho \vec{g} \quad (4.7)$$

En la ecuación 4.7 se muestra una clara diferencia con la ecuación 3.10, ya que el tensor de esfuerzo T está partido en tres términos, que son definidos como positivo a compresión (Figura 16). Los subíndices s y f denotan la parte sólida y fluida respectivamente, y T' es la contribución de esfuerzos de la mezcla que resulta del movimiento de los sólidos y el fluido (Iverson & Denlinger, 2001a):

$$T' = -\rho_s n_s (v_s - v)(v_s - v) - \rho_f n_f (v_f - v)(v_f - v) \quad (4.8)$$

Este esfuerzo surge del término de aceleración convectiva no lineal en el balance de momentum para los constituyentes individuales sólido y fluido, que no se suman para producir la aceleración convectiva de la mezcla $v \cdot \nabla v$ (Iverson & Denlinger, 2001a).

De otra manera, la evaluación explícita del esfuerzo T' (ecuación 4.8) puede evitarse utilizando una aproximación adecuada en flujos geofísicos. Los resultados de esa aproximación consideran el movimiento del fluido intersticial en un marco de referencia que se mueve con la fase sólida, tal como en los problemas de medios porosos. Con ese fundamento, se define la descarga específica de fluido relativo a los sólidos como: $q_f/n_f = v_f - v_s$ resaltando que si $|q_f/n_f| \ll v_s$ y ρ_s, ρ_f y ρ son constantes, las ecuaciones de balance de masa y momentum pueden simplificadas de la siguiente manera:

$$\nabla \cdot \vec{v}_s = 0 \quad (4.9)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}_s}{\partial t} + \vec{v}_s \cdot \nabla \vec{v}_s \right) = -\nabla \cdot (T_s + T_f) + \rho \vec{g} \quad (4.10)$$

Donde $T_s + T_f$ es el esfuerzo total de la mezcla. Físicamente las ecuaciones 4.9 y 4.10 suponen que el movimiento del fluido en relación con los sólidos es tan lento, que la velocidad y la aceleración del fluido difieren despreciablemente de las de los sólidos adyacentes y que la densidad de la mezcla es constante.

Para que la simplificación de las ecuaciones 4.9 y 4.10 tenga validez se requiere que $|q_f/n_f v_s| \ll 1$, así que una escala apropiada para $|q_f|$, es la descarga específica necesaria para fluidizar o licuar la masa granular. Si $|q_f|$ excede este umbral, la masa puede desagregarse y perder el carácter de mezcla coherente. Este umbral se puede estimar por el cálculo que implica el gradiente de presión de poros normal a la pendiente $\partial P/\partial z$ que equilibra el componente en z del peso total de la mezcla por unidad de volumen $\partial P/\partial z = -\rho g$. Este gradiente está relacionado a $|q_f|$ por la ley de Darcy.

La generalización de la ley de Darcy (Bear, 1972) es:

$$q = -\frac{k}{\mu} \left[\frac{\partial P}{\partial x} 1x + \frac{\partial P}{\partial y} 1y + \left(\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g \right) 1z \right] = -\frac{k}{\mu} (\nabla P + \rho g) = -\frac{k}{\mu} (\nabla P + \rho g) \quad (4.11)$$

Tomando la ecuación 4.11 solamente con el gradiente de presión de poros en la dirección z y sustituyendo $\partial P / \partial z = -\rho g$ en la ley de Darcy, resulta la expresión del umbral de fluidización:

$$q_f = -\frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} + \rho_f g_z \right) = \frac{k}{\mu} (\rho_s g_z - \rho_f g_z) = \frac{k}{\mu} (\rho_s - \rho_f) g_z n_f \quad (4.12)$$

Donde k es la permeabilidad intrínseca de la masa granular y μ es la viscosidad del fluido.

Así las ecuaciones de la teoría de mezcla tienen grandes ventajas sobre las ecuaciones que tratan a la mezcla de sólido-fluido como una simple fase continua:

- Representa de forma explícita las fracciones de volumen sólido-fluido y velocidades, para su influencia sobre la dinámica de flujos.
- La dependencia explícita de los esfuerzos incluye la fase sólida-fluida y así elimina la necesidad para un tensor de esfuerzos fusionado que agrupa los efectos de los constituyentes sólidos y fluido y su interacción.
- Incluye las teorías estándar cuasi-estáticas de falla de taludes (generalmente accionadas por la creciente presión de poros intersticial) y la consolidación de sedimentos (difusión de la presión de poros intersticial) como casos especiales.

Por lo tanto la teoría de mezcla proporciona un marco unificado para el análisis de flujos de sólidos-fluido con diferentes composiciones y comportamientos, desde el inicio del flujo hasta la consolidación en el depósito.

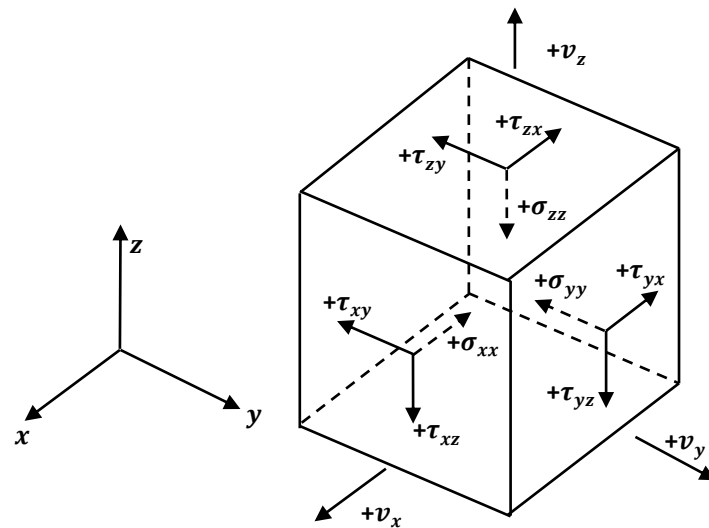


Figura 16. Definición del sistema de coordenadas locales y las convenciones utilizadas para el cálculo de esfuerzos y velocidades. Los componentes normales de esfuerzo (indicado por las flechas punteadas) son positivos a compresión, y los esfuerzos cortantes son positivos cuando están orientados como se muestra. Fuente: (Iverson & Denlinger, 2001a).

4.3. Teoría de la profundidad promedio

En la simplificación de las ecuaciones de movimiento es necesario involucrar la profundidad promedio para eliminar la coordenada normal al lecho (z). Para ello es necesaria la descomposición de las ecuaciones 4.9 y 4.10 y se integra cada componente desde la base hasta la superficie del flujo. De esta manera resulta la ecuación de conservación de masa integrada en la profundidad promedio tal como la ecuación 3.33 (sección 3.2.2).

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{v}_x h)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}_y h)}{\partial y} = 0 \quad (4.13)$$

De igual manera la profundidad promedio también implica que el esfuerzo total normal en la dirección z equilibra la componente en z del peso de la mezcla:

$$\sigma_{s(zz)} + \sigma_{f(zz)} = (h - z)\rho g_z \quad (4.14)$$

Esta ecuación a su vez conduce a las expresiones de esfuerzo total normal en el lecho y el esfuerzo total normal en la profundidad promedio en la dirección z .

$$\sigma_{s(zz)}|_{z=0} + \sigma_{f(zz)}|_{z=0} = \rho g_z h \quad (4.15)$$

Integrando en la profundidad promedio la ecuación 4.14, el esfuerzo total de la mezcla es:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{s(zz)} + \bar{\sigma}_{f(zz)} &= \frac{1}{h} \int_0^h \rho g_z (h - z) dz = \frac{1}{h} \int_0^h \rho g_z h dz - \frac{1}{h} \int_0^h \rho g_z z dz \\ &= \frac{1}{2h} \rho g_z h^2 - \frac{1}{2h} \rho g_z z^2 \Big|_{z=0} - \frac{1}{2h} \rho g_z h^2 + \frac{1}{2h} \rho g_z z^2 \Big|_{z=h} \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\bar{\sigma}_{s(zz)} + \bar{\sigma}_{f(zz)} = \frac{1}{2} \rho g_z h \quad (4.17)$$

Integrando en la profundidad tal como en la sección 3.2.2 (ecuaciones 3.48 y 3.49), se tienen las ecuaciones de conservación de momentum para las direcciones x y y respectivamente:

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial(h\bar{v}_x)}{\partial t} + \frac{\partial(h\bar{v}_x^2)}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{v}_y\bar{v}_x)}{\partial y} \right] \\ = - \int_0^h \left[\frac{\partial\sigma_{s(xx)}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{f(xx)}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{s(yx)}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{f(yx)}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{s(zx)}}{\partial z} + \frac{\partial\tau_{f(zx)}}{\partial z} - \rho g_x \right] dz \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial(h\bar{v}_y)}{\partial t} + \frac{\partial(h\bar{v}_y^2)}{\partial y} + \frac{\partial(h\bar{v}_x\bar{v}_y)}{\partial x} \right] \\ = - \int_0^h \left[\frac{\partial\sigma_{s(yy)}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{f(yy)}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{s(xy)}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{f(xy)}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{s(zy)}}{\partial z} + \frac{\partial\tau_{f(zy)}}{\partial z} - \rho g_y \right] dz \end{aligned} \quad (4.19)$$

4.3.1. Evaluación de esfuerzos entre sólidos

En la evaluación de los esfuerzos que ocurren entre sólidos se supone que obedecen a la ecuación de Coulomb (ecuaciones 4.3, 4.4 y 4.5) con $c = 0$. También se define la relación entre el esfuerzo de los sólidos T_s , el esfuerzo total de la mezcla $T_s + T_f$ y el esfuerzo efectivo T_e que se describió en la ecuación 3.70 como $T_s + T_f = T_e + Ip + n_f T_{fvis}$. En la teoría de mezcla es común especificar el esfuerzo del fluido como $T_f = n_f (Ip + T_{vis})$ y el esfuerzo de sólidos así: $T_s = T_e + n_s Ip$. Sin embargo, para simplificar la formulación y hacerla comparable a la de mecánica de suelos convencionales, se define el esfuerzo de fluido como $T_f = Ip + n_f T_{fvis}$, y también se iguala el esfuerzo de los sólidos al esfuerzo efectivo, $T_s = T_e$. Cualquiera del conjunto de definiciones de esfuerzos es satisfactorio para el modelo de profundidad promedio, obteniendo así la misma ecuación de esfuerzos total de la mezcla y la misma ecuación de momentum en la profundidad promedio para la mezcla.

Para estimar los esfuerzos se integra en la profundidad al igual que en la sección 3.3 (ecuaciones 3.68 y 3.69), resultando las ecuaciones 4.20 y 4.21 respectivamente:

$$-\int_0^h \left[\frac{\partial \sigma_{s(xx)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{s(yx)}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{s(zx)}}{\partial z} \right] dz = -\frac{\partial(h\bar{\sigma}_{s(xx)})}{\partial x} - \frac{\partial(h\bar{\tau}_{s(yx)})}{\partial y} + \tau_{s(zx)} \Big|_{z=0} \quad (4.20)$$

y

$$-\int_0^h \left[\frac{\partial \tau_{s(xy)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{s(yy)}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{s(zy)}}{\partial z} \right] dz = -\frac{\partial(h\bar{\tau}_{s(xy)})}{\partial x} - \frac{\partial(h\bar{\sigma}_{s(yy)})}{\partial y} + \tau_{s(zy)} \Big|_{z=0} \quad (4.21)$$

Las ecuaciones 4.20 y 4.21 muestran una diferencia con las ecuaciones 3.68 y 3.69, ya que al utilizar la aproximación de un "bloque uniforme" que supone los esfuerzos en cualquier lugar y tiempo (x, y, z, t) depende sólo del espesor local $h(x, y, t)$, y no de los gradientes de espesor $(\partial h / \partial x$ y $\partial h / \partial y)$ (Iverson & Denlinger, 2001a).

Los esfuerzos normales en la profundidad promedio en la dirección x y y ($\bar{\sigma}_{s(xx)}$ y $\bar{\sigma}_{s(yy)}$) están relacionados con el esfuerzo normal en la profundidad promedio en la dirección z ($\bar{\sigma}_{s(zz)}$), mediante el uso de un coeficiente de esfuerzo lateral $k_{act/pas}$ derivado de la teoría de Coulomb que asegura invarianza en el plano xy y preserva la simetría de esfuerzos $\bar{\tau}_{s(yx)} = \bar{\tau}_{s(xy)}$, mientras que si se utiliza diferentes coeficientes, puede violar la invarianza y la simetría. Al igual que la ecuación 3.90 se tiene:

$$\bar{\sigma}_{s(xx)} = \bar{\sigma}_{s(yy)} = k_{act/pas} \bar{\sigma}_{s(zz)} \quad (4.22)$$

Donde el coeficiente de empuje lateral $k_{act/pas}$ es descrito por 3.91. En el caso especial en que $\varphi_{bed} = 0$, la ecuación 3.91 se puede reducir a la definición clásica de Rankine. Mientras que si el lecho tiene una rugosidad máxima en el caso en que $\varphi_{bed} = \varphi_{int}$, la ecuación 3.91 se puede reducir a la siguiente expresión:

$$k_{act/pas} = \frac{1 + \sin^2 \varphi_{int}}{1 - \sin^2 \varphi_{int}} \quad (4.23)$$

La ecuación 4.23 indica que un bloque de material de Coulomb se mueve ladera abajo sin divergencia de velocidad sólo si el ángulo de fricción del lecho es igual al ángulo de fricción interno.

Despejando la ecuación 4.17 e incorporándola en la ecuación 4.22:

$$\bar{\sigma}_{s(xx)} = \bar{\sigma}_{s(yy)} = k_{act/pas} \left(\frac{1}{2} \rho g_z h - \bar{\sigma}_{f(zz)} \right) \quad (4.24)$$

Para evaluar el esfuerzo normal del fluido en la profundidad promedio $\bar{\sigma}_{f(zz)}$ que aparece en 4.24, se identifica este esfuerzo como la presión de poros del fluido, asumiendo que la presión de poros del fluido varía linealmente desde un máximo P_{bed} en la base del flujo hasta cero (presión atmosférica) en la superficie de flujo, así integrando entre estos dos intervalos se tiene:

$$\bar{\sigma}_{f(zz)} = \frac{1}{h} \int_0^h \sigma_{f(zz)} dz = \frac{1}{2} \sigma_{f(zz)} \Big|_{z=0} = \frac{1}{2} P_{bed} \quad (4.25)$$

La suposición de la variación lineal de la presión del fluido también permite expresar la presión de fluido como una fracción λ del esfuerzo total normal basal $\sigma_{s(zz)} + \sigma_{f(zz)}$, dado por la ecuación 4.15 (Figura 17), resultando la siguiente expresión:

$$P_{bed} = \lambda \rho g_z h \quad (4.26)$$

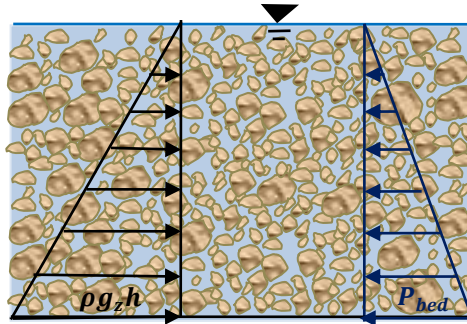


Figura 17. Fracción de presión de poros

Por lo tanto, si $\lambda = 1$ indica que el esfuerzo efectivo basal es cero o que el suelo está en una completa licuación. Con la combinación de las ecuaciones 4.24 y 4.26 se tiene:

$$\bar{\sigma}_{s(xx)} = \bar{\sigma}_{s(yy)} = k_{act/ppas} \left(\frac{1}{2} \rho g_z h - \frac{1}{2} \lambda \rho g_z h \right) = k_{act/pas} \left(\frac{1}{2} \rho g_z h (1 - \lambda) \right) \quad (4.27)$$

Implicando que $\bar{\sigma}_{s(xx)}$ y $\bar{\sigma}_{s(yy)}$ actúan sobre planos conjugados de máximo corte, como se demuestra en las equivalencias de 4.4 y 4.5. Consecuentemente 4.4 le da forma aplicable del criterio de Coulomb a estos planos, y así con la combinación de las ecuaciones 4.4 y 4.27 se obtiene la ecuación de esfuerzo cortante de los sólidos ($\bar{\tau}_{s(yx)}$, $\bar{\tau}_{s(xy)}$):

$$\bar{\tau}_{s(yx)} = \bar{\tau}_{s(xy)} = -\text{sgn} \left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \right) \cdot \left\{ k_{act/pas} \left[\frac{1}{2} \rho g_z h (1 - \lambda) \right] \right\} \text{sen } \varphi_{int} \quad (4.28)$$

Donde el factor $-\text{sgn}(\partial \bar{v}_x / \partial y)$ designa el signo (+ o -) opuesto al argumento $\partial \bar{v}_x / \partial y$ asegurando que los esfuerzos de corte se oponen en el plano xy (Figura 16 y 18).

Los esfuerzos de corte de sólidos son evaluados por la combinación de la ecuación 4.26, con la ecuación de Coulomb para el deslizamiento basal (ecuación 4.3) y la ecuación del esfuerzo normal en la dirección z (ecuación 4.15):

$$\bar{\tau}_{s(zx)}|_{z=0} = -\text{sgn}(\bar{v}_x) \cdot [\rho g_z h(1 - \lambda)] \tan \varphi_{bed} \quad (4.29)$$

y

$$\bar{\tau}_{s(zy)}|_{z=0} = -\text{sgn}(\bar{v}_y) \cdot [\rho g_z h(1 - \lambda)] \tan \varphi_{bed} \quad (4.30)$$

Donde el factor de forma $-\text{sgn}(\bar{v}_x)$ establece que el esfuerzo basal de coulomb va en dirección opuesta al deslizamiento, tomando en cuenta solamente la velocidad y no el gradiente de velocidad (en la dirección z), ya que este no aparece en el modelo de profundidad promedio.

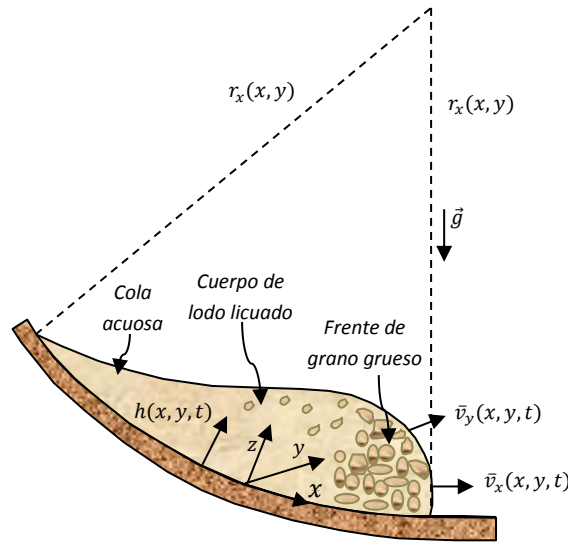


Figura 18. Corte longitudinal de un flujo inestable que desciende por una pendiente curvilínea, que ilustra el sistema de coordenadas locales y variables dependientes $h(x, y, t)$, $\bar{v}_x(x, y, t)$, $\bar{v}_y(x, y, t)$. La componente de curvatura en x se especifica por el radio local de curvatura r_x . Fuente: (Iverson & Denlinger, 2001b).

La resistencia debido a la fricción basal del deslizamiento es modificado por cambios en la pendiente del lecho que afectan el peso aparente de la masa en movimiento. Por ejemplo, cuando la pendiente del lecho disminuye en la trayectoria del flujo, una parte del momentum promediado en la profundidad por unidad de área ($\rho \bar{v}_x^2$), se dirige al lecho y es resistido por la fuerza de reacción proporcionada por la tierra subyacente. Esta fuerza externa de reacción, redirecciona el flujo y el momentum para mantenerlo paralelo al lecho. Sin embargo, la acción-reacción en el lecho aumenta el esfuerzo normal en el lecho una cantidad $(\rho h \bar{v}_x^2)/r_x$, donde r_x es el radio de curvatura en la dirección x , y $\bar{v}_x^2/r_x$ es asociado a la aceleración centrípeta (Figura 18). Por lo tanto en lechos curvos, las ecuaciones 4.29 y 4.30 se generalizan de la siguiente manera:

$$\bar{\tau}_{s(zx)}|_{z=0} = -\text{sgn}(\bar{v}_x) \cdot \left[\rho g_z h(1 - \lambda) \left(1 + \frac{\bar{v}_x^2}{r_x g_z} \right) \right] \tan \varphi_{bed} \quad (4.31)$$

y

$$\bar{\tau}_{s(z)}|_{z=0} = -\text{sgn}(\bar{v}_y) \cdot \left[\rho g_z h (1 - \lambda) \left(1 + \frac{\bar{v}_y^2}{r_y g_z} \right) \right] \tan \varphi_{bed} \quad (4.32)$$

Las ecuaciones 4.31 y 4.32 se reducen a 4.29 y 4.30 cuando el límite $r_x \text{ ó } y \rightarrow \infty$ aplicable a lechos planos. Las ecuaciones 4.31 y 4.32 se aplican a lechos en concavidades con curvatura positiva cuando $r_x \text{ ó } y > 0$ y a lechos en convexidades con curvatura negativo cuando $r_x \text{ ó } y < 0$.

4.3.2. Evaluación de los esfuerzos del fluido

Para la evaluación de los esfuerzos de la fase fluida de las ecuaciones 4.18 y 4.19, se supone que el fluido se comporta como un fluido Newtoniano (Figura 13). El esfuerzo del fluido incluye una componente de presión isotrópica que no depende de la deformación viscosa, como en la ecuación 4.25. Es oportuno hacer uso de las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo de fluidos incompresibles Newtonianos. Entonces los términos de esfuerzos de un fluido en las ecuaciones 4.18 y 4.19 se pueden expresar como:

$$-\int_0^h \left[\frac{\partial \sigma_f(x)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_f(y)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_f(z)}{\partial z} \right] dz = -\int_0^h \left[\frac{\partial P}{\partial x} - n_f \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \right] dz \quad (4.33)$$

Y

$$-\int_0^h \left[\frac{\partial \tau_f(x)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_f(y)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_f(z)}{\partial z} \right] dz = -\int_0^h \left[\frac{\partial P}{\partial y} - n_f \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \right] dz \quad (4.34)$$

En las ecuaciones 4.33 y 4.34, el término de viscosidad del fluido intersticial μ es multiplicado por la fracción de volumen de fluido n_f debido a que sólo esta fracción de la mezcla produce esfuerzos viscosos. La presión del fluido varía linealmente desde un máximo P_{bed} en el lecho, hasta cero en la superficie libre. Utilizando esta suposición y el teorema de Leibniz e integrando directamente el término de presión de la ecuación 4.33, se tiene:

$$-\int_0^h \frac{\partial P}{\partial x} dz = -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \lambda \rho g_z h (h - z) dz = -h \frac{\partial P_{bed}}{\partial x} \quad (4.35)$$

De igual manera se realiza la integración de término por término de las derivadas de la velocidad al lado derecho de la ecuación 4.33. Así, utilizando el teorema de Leibniz en el término de velocidad en la dirección x , se tiene:

$$\int_0^h n_f \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} dz = n_f \mu \left[h \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial}{\partial x} (\bar{v}_x - v_x(h)) \frac{\partial h}{\partial x} + (\bar{v}_x - v_x(h)) \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right]$$

Si se emplea la aproximación de un flujo uniforme ($\partial h / \partial x = 0$), entonces se tiene:

$$\int_0^h n_f \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} dz = n_f \mu h \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial x^2} \quad (4.36)$$

Con el uso del teorema de Leibniz para el término de velocidad en la dirección y , se tiene:

$$\int_0^h n_f \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} dz = n_f \mu \left[h \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial}{\partial y} (\bar{v}_x - v_x(h)) \frac{\partial h}{\partial y} + (\bar{v}_x - v_x(h)) \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right]$$

Si se emplea la aproximación de un flujo uniforme ($\partial h / \partial y = 0$), entonces se tiene:

$$\int_0^h n_f \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} dz = n_f \mu h \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} \quad (4.37)$$

El término de velocidad en la dirección z es integrado directamente:

$$\int_0^h n_f \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} dz = n_f \mu \frac{\partial v_x}{\partial z} = n_f \mu \left[\frac{\partial v_x}{\partial z} \Big|_{z=h} - \frac{\partial v_x}{\partial z} \Big|_{z=0} \right] = -3n_f \mu \frac{\bar{v}_x}{h} \quad (4.38)$$

La forma de la ecuación 4.38 resulta de la suposición de una condición de frontera basal sin deslizamiento para el flujo de un fluido con un perfil de velocidad parabólico en la dirección z (Iverson & Denlinger, 2001a; Bird, et al., 2002). Con la combinación de las ecuaciones 4.36, 4.37 y 4.38, se tiene la ecuación de que representa el esfuerzo del fluido en la ecuación 4.18. Resultando:

$$-\int_0^h \left[\frac{\partial \sigma_{f(xx)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{f(yx)}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{f(zx)}}{\partial z} \right] dz = n_f \mu h \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + n_f \mu h \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - 3n_f \mu \frac{v_x}{h} \quad (4.39)$$

Y una expresión análoga para 4.34.

4.3.3. Ecuaciones de gobierno

Finalmente la ecuación de momentum en la dirección x resulta de la combinación de las ecuaciones 4.18, 4.24, 4.25, 4.26, 4.27, 4.28, 4.31 y 4.39:

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial (h \bar{v}_x)}{\partial t} + \frac{\partial (h \bar{v}_x^2)}{\partial x} + \frac{\partial (h \bar{v}_x \bar{v}_y)}{\partial y} \right] = & -sgn(\bar{v}_x) \left[\rho g_z h - P_{bed} \left(1 + \frac{\bar{v}_x^2}{r_x g_z} \right) \right] \tan \varphi_{bed} - 3n_f \mu \frac{\bar{v}_x}{h} \\ & - h k_{a/p} \frac{\partial}{\partial x} (\rho g_z h - P_{bed}) - h \frac{\partial P_{bed}}{\partial x} - n_f \mu h \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial x^2} \\ & - sgn \left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \right) h k_{a/p} \frac{\partial}{\partial y} (\rho g_z h - P_{bed}) \sin \varphi_{int} + n_f \mu h \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} \\ & + \rho g_x h \end{aligned} \quad (4.40)$$

Y el momentum en la dirección y es obtenida por el intercambio de la variable ($x \leftrightarrow y$), y de subíndice ($x \leftrightarrow y$).

Los términos en el lado derecho de la ecuación 4.40 se agrupan por línea según el tipo de esfuerzo. De esta manera, la primera línea representa el esfuerzo cortante basal, la segunda línea representa el esfuerzo longitudinal normal, las tercera línea representan el esfuerzo cortante transversal, y la cuarta línea representa el esfuerzo de conducción debido a la fuerza gravitatoria del cuerpo.

- Para los casos en que no hay presión de poros ni viscosidad, las ecuaciones se reducen a un conjunto de casos de avalanchas granulares solamente con disipación de energía friccional.
- En el otro extremo, para los casos en los que la masa está totalmente licuada por alta presión de poros persistente, las ecuaciones se reducen a un conjunto de casos en que la disipación es solamente viscosa del flujo de un fluido Newtoniano.
- Para casos intermedios las ecuaciones demuestran una combinación de disipación de energía friccional y viscosa que cambia en respuesta a los cambios espaciales y temporales en la presión de poro.

4.4. Soluciones analíticas

La solución analítica de la ecuación no lineal, hiperbólica (ecuación 4.40) se puede obtener para algunos casos especiales. En tales casos la ecuación de balance de masa 4.13 se cumple trivialmente. El balance de momentum en la dirección y es inmaterial, y el momentum en la dirección x es principalmente simplificado como se muestra en las secciones 4.4.1, 4.4.2, 4.4.3 y 4.4.4.

4.4.1. Movimiento traslacional

Si se tiene una masa de mezcla uniforme con movimiento verticalmente inestable, espesor constante ($h = H$) descendiendo por una pendiente sin gradientes de velocidad en la dirección x y y , solamente con respecto al tiempo, sin gradiente de presión de poros y el terreno es un plano inclinado, la ecuación de momentum en la profundidad promedio en la dirección x es reducida a:

$$\rho \frac{\partial(H\bar{v}_x)}{\partial t} = -(\rho g_z H - P_{bed}) \tan \varphi_{bed} - 3n_f \mu \frac{\bar{v}_x}{H} + \rho g_x H \quad (4.41)$$

La ecuación 4.41 se expande cuando se utiliza la regla de la derivada de un producto sobre el término de derivada local:

$$\rho H \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t} + \rho \bar{v}_x \frac{\partial H}{\partial t} = -(\rho g_z H - P_{bed}) \tan \varphi_{bed} - 3n_f \mu \frac{\bar{v}_x}{H} + \rho g_x H \quad (4.42)$$

Como se supone un espesor constante H , entonces el segundo término del lado izquierdo de la ecuación 4.42 se puede despreciar.

$$\rho H \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t} = -\rho g_z H \tan \varphi_{bed} - \lambda \rho g_z H \tan \varphi_{bed} - 3n_f \mu \frac{\bar{v}_x}{H} + \rho g_x H \quad (4.43)$$

Si se divide todo entre la densidad y el espesor (ρH):

$$\frac{d\bar{v}_x}{dt} = -g_z(1 - \lambda) \tan \varphi_{bed} - 3 \frac{n_f \mu}{\rho H^2} \bar{v}_x + g_x \quad (4.44)$$

Reagrupando

$$\frac{d\bar{v}_x}{dt} + 3 \frac{n_f \mu}{\rho H^2} \bar{v}_x = -g_z(1 - \lambda) \tan \varphi_{bed} + g_x \quad (4.45)$$

Se normaliza la ecuación dividiéndola entre g_z

$$\frac{1}{g_z} \frac{d\bar{v}_x}{dt} + 3 \frac{n_f \mu}{\rho g_z H^2} \bar{v}_x = \frac{g_x}{g_z} - (1 - \lambda) \tan \varphi_{bed} \quad (4.46)$$

Como $g_x/g_z = \tan \theta$, Reemplazando en la ecuación 4.46, se tiene:

$$\frac{1}{g_z} \frac{d\bar{v}_x}{dt} + 3 \frac{n_f \mu}{\rho g_z H^2} \bar{v}_x = \tan \theta - (1 - \lambda) \tan \varphi_{bed} \quad (4.47)$$

Donde

$$\theta = \tan \theta - (1 - \lambda) \tan \varphi_{bed} \quad (4.48)$$

Siendo el lado derecho de la ecuación 4.47 un parámetro que representa la fuerza motriz gravitacional normalizada menos la resistencia debido a la fricción basal (ecuación 4.48). De esta manera reemplazando la ecuación 4.48 en 4.47.

$$\frac{1}{g_z} \frac{d\bar{v}_x}{dt} + 3 \frac{n_f \mu}{\rho g_z H^2} \bar{v}_x = \theta \quad (4.49)$$

$$\frac{d\bar{v}_x}{dt} + 3 \frac{n_f \mu}{\rho H^2} \bar{v}_x = g_z \theta \quad (4.50)$$

Para solucionar la ecuación 4.50 (ordinaria de primer orden), se hace agrupación de constantes de la siguiente manera:

$$a = 3 \frac{n_f \mu}{\rho H^2} \quad y \quad b = g_z \theta \quad (4.51a, b)$$

Entonces:

$$\frac{d\bar{v}_x}{dt} + a\bar{v}_x = b \quad (4.52)$$

$$\frac{d\bar{v}_x}{dt} = b - a\bar{v}_x \quad (4.53)$$

Así esta ecuación se puede resolver, haciendo uso de la técnica llamada separación de variables, reescribiendo la ecuación de tal modo que las variables $\bar{v}_x$ y t queden aisladas en lados opuestos:

$$\frac{d\bar{v}_x}{b - a\bar{v}_x} = dt \quad (4.54)$$

Ahora se integra la ecuación:

$$\int \frac{d\bar{v}_x}{b - a\bar{v}_x} = \int dt \quad (4.55)$$

Y se deduce que:

$$-\frac{1}{a} \ln|b - a\bar{v}_x| = t + c \quad (4.56)$$

Por lo tanto,

$$b - a\bar{v}_x = e^{-ac} e^{-at} \quad (4.57)$$

O

$$b - a\bar{v}_x = Ae^{-at} \quad (4.58)$$

Donde la nueva constante A tiene la magnitud de e^{-ac} y el mismo signo ($\mp$) que $(b-a)$. Al despejar $\bar{v}_x$ se tiene la ecuación para conocer la “velocidad instantánea” del flujo de material desagregado, que describe su comportamiento en un instante específico de tiempo.

$$\bar{v}_x = \frac{b}{a} - \frac{A}{a} e^{-at} \quad (4.59)$$

Para hallar el valor de la constante A , se sustituye en la solución general (ecuación 4.59) los valores iniciales cuando $\bar{v}_x = \bar{v}_0$ y $t = 0$:

$$\bar{v}_0 = \frac{b}{a} - \frac{A}{a} e^{-a(0)} \quad (4.60)$$

$$(b - a\bar{v}_0) = A \quad (4.61)$$

Así, teniendo el valor de la constante A , se reemplaza la ecuación 4.61 en 4.59.

$$\bar{v}_x = \frac{b}{a} - \frac{(b - a\bar{v}_0)}{a} e^{-at} \quad (4.62)$$

$$\bar{v}_x = \frac{b}{a} - \frac{b}{a} e^{-at} + \bar{v}_0 e^{-at} \quad (4.63)$$

$$\bar{v}_x = \frac{b}{a} (1 - e^{-at}) + \bar{v}_0 e^{-at} \quad (4.64)$$

Reemplazando las constantes a y b (ecuaciones 4.51a, b) en la ecuación 4.64, resulta:

$$\bar{v}_x = \frac{g_z \theta}{3 \frac{n_f \mu}{\rho H^2}} \left[1 - e^{-\left(3 \frac{n_f \mu}{\rho H^2}\right)t} \right] + \bar{v}_0 e^{-\left(3 \frac{n_f \mu}{\rho H^2}\right)t} \quad (4.65)$$

Finalmente, reordenando se tiene la solución de la ecuación 4.50. Esta solución (ecuación 4.66) es la **ecuación de velocidad instantánea del flujo (EVIF)** de material desagregado.

$$\bar{v}_x = \frac{\rho g_z H^2}{3 n_f \mu} \theta \left[1 - e^{-\left(\frac{\rho H^2}{3 n_f \mu}\right)t} \right] + \bar{v}_0 e^{-\left(\frac{\rho H^2}{3 n_f \mu}\right)t} \quad (4.66)$$

Si el esfuerzo debido a las fronteras laterales es insignificante en comparación con el esfuerzo en el lecho, la ecuación 4.66 describe el movimiento del centro de masa del cuerpo en deformación. Incluso si θ varía como una función arbitraria de posición o el tiempo, la ecuación 4.66 se puede utilizar como una base para el cálculo por etapas del movimiento del centro de masa de las mezclas de Coulomb, ya sea con λ constante o variable, tal como se muestra en el capítulo 6 (Hutchinson, 1986).

4.4.2. Desplazamiento del flujo

Para hallar la ecuación de desplazamiento del flujo de material desagregado en un instante de tiempo, se reordena la ecuación 4.64 y se integra de la siguiente manera:

$$\bar{v}_x = \frac{b}{a} + \left(\bar{v}_0 - \frac{b}{a} \right) e^{-at} \quad (4.67)$$

$$x = \int \bar{v}_x dt = \frac{b}{a} t - \frac{1}{a} \left(\bar{v}_0 - \frac{b}{a} \right) e^{-at} + c \quad (4.68)$$

Para hallar el valor de la constante c , se sustituye en la solución general (ecuación 4.68) los valores iniciales cuando $x = x_0$ y $t = 0$:

$$x_0 = \frac{b}{a}(0) - \frac{1}{a} \left(\bar{v}_0 - \frac{b}{a} \right) e^{-a(0)} + c \quad (4.69)$$

$$c = x_0 + \frac{1}{a} \left(\bar{v}_0 - \frac{b}{a} \right) \quad (4.70)$$

Así, teniendo el valor de la constante c , se reemplaza la ecuación 4.70 en 4.68.

$$x = \frac{b}{a} t - \frac{1}{a} \left(\bar{v}_0 - \frac{b}{a} \right) e^{-at} + x_0 + \frac{1}{a} \left(\bar{v}_0 - \frac{b}{a} \right) \quad (4.71)$$

$$x = \frac{b}{a} t - \frac{1}{a} \bar{v}_0 e^{-at} + \frac{b}{a^2} e^{-at} + x_0 + \frac{1}{a} \bar{v}_0 - \frac{b}{a^2}$$

$$x = x_0 + \frac{b}{a} t + \frac{1}{a} \bar{v}_0 - \frac{1}{a} \bar{v}_0 e^{-at} - \frac{b}{a^2} + \frac{b}{a^2} e^{-at}$$

$$x = x_0 + \frac{b}{a} t + \frac{\bar{v}_0}{a} (1 - e^{-at}) - \frac{b}{a^2} (1 - e^{-at})$$

Después de reordenar y utilizar algunas manipulaciones algebraicas resulta:

$$x = x_0 + \frac{b}{a} t + \frac{1}{a} \left(\bar{v}_0 - \frac{b}{a} \right) (1 - e^{-at}) \quad (4.72)$$

Al reemplazar las constantes a y b (ecuaciones 4.51a, b) en la ecuación 4.72, se tiene:

$$x = x_0 + \frac{g_z \theta}{3 \frac{n_f \mu}{\rho H^2}} t + \frac{1}{3 \frac{n_f \mu}{\rho H^2}} \left[\bar{v}_0 - \frac{g_z \theta}{3 \frac{n_f \mu}{\rho H^2}} \right] \left[1 - e^{-\left(3 \frac{n_f \mu}{\rho H^2} \right) t} \right] \quad (4.73)$$

Finalmente, reordenando se tiene la solución de la ecuación 4.67. Esta solución (ecuación 4.74) es la **ecuación de desplazamiento instantáneo del flujo (EDIF)** de material desagregado del centro de masa.

$$x = x_0 + \frac{\rho g_z H^2}{3n_f \mu} \theta \cdot t + \frac{\rho H^2}{3n_f \mu} \left[\bar{v}_0 - \frac{\rho g_z H^2}{3n_f \mu} \theta \right] \left[1 - e^{\left(-t / \frac{\rho H^2}{3n_f \mu} \right)} \right] \quad (4.74)$$

4.4.3. Equilibrio estático de áreas fuente y depósitos

Así como la ecuación 4.40 simula el comportamiento de un flujo de granos-fluido, también puede simular estados estáticos de equilibrio límite. De esta manera en el límite estático (cuando $\bar{v}_x = 0$ y $\bar{v}_y = 0$), la ecuación de momentum en la dirección x (4.40) se puede reducir:

$$0 = -(\rho g_z h - P_{bed}) \tan \varphi_{bed} - h k_{act/pas} \frac{\partial}{\partial x} (\rho g_z h - P_{bed}) - h \frac{\partial P_{bed}}{\partial x} - h k_{act/pas} \frac{\partial}{\partial y} (\rho g_x h - P_{bed}) \sin \varphi_{int} + \rho g_x h \quad (4.75)$$

Donde se supone que $\text{sgn}(\bar{v}_x)$ y $\text{sgn}(\partial \bar{v}_x / \partial y)$ son positivos, esta condición es aplicable si el movimiento incipiente ocurre en la dirección x positivo, y es resistido por los cortes en la frontera en la región donde $\partial h / \partial y > 0$. Al reagrupar:

$$(\rho g_z h - P_{bed}) \tan \varphi_{bed} + h k_{act/pas} \frac{\partial}{\partial x} (\rho g_z h - P_{bed}) + h \frac{\partial P_{bed}}{\partial x} + h k_{act/pas} \frac{\partial}{\partial y} (\rho g_x h - P_{bed}) \sin \varphi_{int} = \rho g_x h \quad (4.76)$$

Para simplificarla ecuación 4.76 se supone que $k_{act/pas} = 1$:

$$(\rho g_z h - P_{bed}) \tan \varphi_{bed} + h \frac{\partial}{\partial x} (\rho g_z h - P_{bed}) + h \frac{\partial P_{bed}}{\partial x} + h \frac{\partial}{\partial y} (\rho g_x h - P_{bed}) \sin \varphi_{int} = \rho g_x h \quad (4.77)$$

$$(\rho g_z h - P_{bed}) \tan \varphi_{bed} + h \frac{\partial \rho g_z h}{\partial x} - h \frac{\partial P_{bed}}{\partial x} + h \frac{\partial P_{bed}}{\partial x} + h \frac{\partial}{\partial y} (\rho g_x h - P_{bed}) \sin \varphi_{int} = \rho g_x h \quad (4.78)$$

Restando términos se reduce a:

$$(\rho g_z h - P_{bed}) \tan \varphi_{bed} + h \frac{\partial \rho g_z h}{\partial x} + h \frac{\partial}{\partial y} (\rho g_x h - P_{bed}) \sin \varphi_{int} = \rho g_x h \quad (4.79)$$

Utilizando la regla de la derivada un producto, el segundo término del lado izquierdo de la ecuación 4.79, es expandido de la siguiente manera:

$$(\rho g_z h - P_{bed}) \tan \varphi_{bed} + \rho g_z h \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial \rho g_z}{\partial x} + h \frac{\partial}{\partial y} (\rho g_x h - P_{bed}) \sin \varphi_{int} = \rho g_x h \quad (4.80)$$

Como los términos de gravedad y densidad son constantes, el término $\partial \rho g_z / \partial x = 0$:

$$(\rho g_z h - P_{bed}) \tan \varphi_{bed} + \rho g_z h \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial}{\partial y} (\rho g_x h - P_{bed}) \sin \varphi_{int} = \rho g_x h \quad (4.81)$$

Dividiendo entre $\rho g_z h$ a ambos lados de la igualdad:

$$\left(1 - \frac{P_{bed}}{\rho g_z h}\right) \tan \varphi_{bed} + \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(h - \frac{P_{bed}}{\rho g_z}\right) \sin \varphi_{int} = \frac{g_x}{g_z} \quad (4.82)$$

Si la derivada en la dirección y es cero ($\partial/\partial y = 0$), el término de $\partial h/\partial x$ se puede expresar en forma de derivada total ya que la ecuación queda en función de solamente una variable, y $g_x/g_z = \tan \theta$, entonces la ecuación 4.82 se puede reducir a:

$$\left(1 - \frac{P_{bed}}{\rho g_z h}\right) \tan \varphi_{bed} + \frac{dh}{dx} = \tan \theta \quad (4.83)$$

$$\frac{dh}{dx} = \tan \theta - \left(1 - \frac{P_{bed}}{\rho g_z h}\right) \tan \varphi_{bed} \quad (4.84)$$

Reemplazando la ecuación 4.26 en 4.84 se tiene como resultado que la variación del espesor con respecto a x es igual a la ecuación 4.48.

$$\frac{dh}{dx} = \tan \theta - \left(1 - \frac{\lambda \rho g_z h}{\rho g_z h}\right) \tan \varphi_{bed} = \theta \quad (4.85)$$

La ecuación 4.85 tiene una solución que es particularmente simple si se supone que θ es constante:

$$\frac{dh}{dx} = \theta \quad (4.86)$$

$$dh = \theta dx \quad (4.87)$$

Después de hacer separación de variables, se integra a ambos lados de la ecuación:

$$\int_h^H dh = \int_0^{-x} \theta dx \quad (4.88)$$

Y se obtiene como solución:

$$H - h = -\theta x \quad (4.89)$$

$$-h = -\theta x - H \quad (4.90)$$

Si se divide entre $(-H)$ para normalizar la ecuación, finalmente se tiene:

$$\frac{h}{H} = \theta \frac{x}{H} + 1 \quad (4.91)$$

Esta solución (ecuación 4.91) es la **ecuación de equilibrio estático (EEE)** de áreas fuente y deposito de material desagregado. Esta ecuación obedece a una condición de frontera que establece un espesor de material desagregado $h = H$ en una posición arbitraria $x = 0$.

4.4.4. Perfiles de depósitos no lineales

La ecuación 4.85, también puede predecir los perfiles de depósitos no lineales si P_{bed} varía como una función de la distancia desde las márgenes del depósito. Por ejemplo, especificando que $\lambda = h/H$ (donde H es el espesor máximo de depósito) como una aproximación lineal de la distribución de la presión de poros en los depósitos recién inmovilizados, se obtiene una versión especializada de la ecuación 4.85:

$$\frac{dh}{dx} = \tan \theta - \tan \varphi_{bed} \left(1 - \frac{h}{H}\right) \quad (4.92)$$

$$\frac{dh}{dx} = \tan \theta - \tan \varphi_{bed} + \tan \varphi_{bed} \frac{h}{H} \quad (4.93)$$

Para facilitar la solución de la ecuación 4.93 se hace agrupación de constantes de la siguiente manera:

$$a = \tan \theta - \tan \varphi_{bed} \quad y \quad b = \frac{\tan \varphi_{bed}}{H} \quad (4.94a, b)$$

Entonces:

$$\frac{dh}{dx} = a + bh \quad (4.95)$$

Haciendo uso de la técnica llamada separación de variables, se reescribe la ecuación 4.95 de tal modo que las variables h y x queden aisladas en lados opuestos:

$$\frac{dh}{a + bh} = dx \quad (4.96)$$

Ahora se integra la ecuación:

$$\int \frac{dh}{a + bh} = \int_{x_0}^x dx \quad (4.97)$$

Y se deduce que:

$$\frac{1}{b} \ln|a + bh| + c = x|_{x_0} \quad (4.98)$$

$$\frac{1}{b} \ln|a + bh| + c = x - x_0 \quad (4.99)$$

$$\frac{1}{b} \ln|a + bh| = (x - x_0) - c \quad (4.100)$$

$$\ln|a + bh| = (x - x_0)b - cb \quad (4.101)$$

$$a + bh = e^{(x-x_0)b} e^{cb} \quad (4.102)$$

O

$$a + bh = e^{(x-x_0)b} A \quad (4.103)$$

Donde la nueva constante A tiene la magnitud de e^{cb} y el mismo signo ($\mp$) que $(b+a)$. Para hallar el valor de la constante A , se sustituye en la solución general (ecuación 4.103) los valores cuando $x = x_0$ y $h = 0$:

$$a + b(0) = e^{(0)b} A \quad (4.104)$$

$$a = A \quad (4.105)$$

Así, teniendo el valor de la constante A , se reemplaza la ecuación 4.105 en 4.103.

$$a + bh = ae^{(x-x_0)b} \quad (4.106)$$

$$bh = ae^{(x-x_0)b} - a \quad (4.107)$$

$$bh = a(e^{(x-x_0)b} - 1) \quad (4.108)$$

$$h = \frac{a}{b}(e^{(x-x_0)b} - 1) \quad (4.109)$$

Al reemplazar nuevamente las constantes agrupadas (ecuación 4.94a, b) en la ecuación 4.109:

$$h = \frac{(\tan \theta - \tan \varphi_{bed})H}{\tan \varphi_{bed}} \left[e^{\left(\frac{x-x_0}{H} \tan \varphi_{bed}\right)} - 1 \right] \quad (4.110)$$

Dividiendo entre H , resulta:

$$\frac{h}{H} = \frac{(\tan \theta - \tan \varphi_{bed})}{\tan \varphi_{bed}} \left[e^{\left(\frac{x-x_0}{H} \tan \varphi_{bed}\right)} - 1 \right] \quad (4.111)$$

Finalmente, reordenando se tiene la solución de la ecuación 4.92. Esta solución (ecuación 4.111) es la **ecuación de perfiles de depósitos no lineales (EPDNL)** de material desagregado. Esta ecuación puede predecir los perfiles de depósitos no lineales si P_{bed} varía como una función de la distancia desde las márgenes del depósito.

5. DISCUSIÓN

Este capítulo muestra los resultados del análisis de sensibilidad a los parámetros de entrada de las soluciones analíticas de las ecuaciones de gobierno (sección 4.3.3), que son desarrolladas en la sección 4.4. Los objetivos del análisis de sensibilidad son: 1) reconocer los parámetros de entrada que contribuyen más a la variabilidad de la salida, y 2) reconocer los parámetros que tiene la menor influencia sobre el modelo. Los valores que fueron utilizados para este análisis se encuentran dentro de los posibles rangos tanto a nivel experimental como real, que se muestran en la Tabla 2. Además en la Tabla 3 se presentan medidas precisas y también indirectas de velocidad y espesor de flujo de algunos casos reales de flujos de material desagregado.

Tabla 2. Valores típicos de las propiedades físicas de un flujo de detritos, tanto a nivel experimental como real.

Parámetro	Símbolo (unidades)	Fuentes			
		(Iverson, 1997)	(Iverson & Denlinger, 2001a)	(Denlinger & Iverson, 2001)	(Iverson, 2005)
Propiedades de la Mezcla					
Densidad de mezcla	ρ (Kg/m ³)	2000	2000	2000	2000
Espesor del flujo	H (m)	0,1-1	2	0,2	0,01-10
Ángulo de fricción	φ (°)	25-45	25-50	28-42	30
Fracción de volumen de fluido	n_f	0,2-0,6	0,4	0,4	
Fracción de volumen de sólidos	n_s	0,4-0,8	0,6	0,6	
Tiempo de flujo	t(s)			17-25	10-10000
Velocidad de flujo	v (m/s)	10-20			10
Longitud del flujo	L(m)		100	100	
Propiedades del fluido					
Densidad del fluido	ρ_f (Kg/m3)	1000-1200	1200	1200	
Viscosidad	μ (Pa/s)	0,001-0,1	0,1	0,1	0,1-50
Propiedades de los sólidos					
Densidad de sólidos	ρ_s (Kg/m3)	2400-3000	2600	2700	
Ángulo de fricción	φ (°)		25-50	28-42	
Diámetro de partículas	d(m)	10 ⁻⁵ -10	0,2		>0,00005

Tabla 3. Valores de velocidad y espesor de algunos eventos naturales de flujos de material desagregado.

País/Región	v(m/s)	H(m)
<i>Flujos de detritos en campo "a pequeña escala", medidas precisas.</i>		
Italia, T. Moscardo	0,9-5	0,84-2,17
Japón, valle Kamikamihori	1,9-6,4	1,5-4,1
U.S.A., Monte Santa Elena	0,8-4,4	0,05-2,8
<i>Flujos de detritos en campo "a gran escala", medidas precisas.</i>		
China, Cárcava Jiangia	4-14,5	0,6-5,5
<i>Flujos de detritos en campo "a pequeña escala", medidas indirectas.</i>		
Alpes Suizos	3,5-14	1-10
<i>Flujos de detritos en campo "a gran escala", medidas indirectas.</i>		
Colombia, Nevado del Ruiz	5-17	2-25

Adaptado de: (Rickenmann, 1999).

5.1. Análisis de sensibilidad

Para realizar el análisis de sensibilidad se toman todos los parámetros como constantes en cada iteración, excepto el parámetro elegido para realizar el análisis de sensibilidad.

5.1.1. Condiciones iniciales y de frontera

Para evaluar el comportamiento de los modelos analíticos solucionados en la sección 4.4, se utilizan las condiciones iniciales como la velocidad, distancia y tiempo igual a cero, y todos los demás parámetros considerados por los modelos se suponen como constantes en el tiempo y en el espacio.

$$\bar{v}_x(x, y, 0) = 0 \quad x = (x, y, 0) = 0 \quad t = 0 \quad (5.1)$$

Lo que describe que una masa estática de volumen y geometría específica está a punto de descender una pendiente de inclinación constante.

5.1.2. Movimiento traslacional

Para iniciar es importante tener conocimiento del comportamiento general de la ecuación de velocidad instantánea del flujo (EVIF) (ecuación 4.66). Por ejemplo, se puede identificar fácilmente que:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \bar{v}_x = \frac{\rho g_z H^2}{3n_f \mu} \Theta \quad (5.2)$$

Lo que indica que la velocidad instantánea $\bar{v}_x(t)$ no aumenta de manera indefinida como en caída libre en el vacío, sino que, debido a la resistencia que ejerce el lecho en la base el flujo y a la viscosidad dinámica del componente fluido, tiende a una velocidad límite (o constante) de una manera asintótica, después de un tiempo determinado (Figura 19). Por lo tanto, el flujo nunca se detiene principalmente como consecuencia de suponer que la pendiente de la trayectoria del flujo es constante, al igual que la fricción del lecho y la fracción de presión de poros.

El comportamiento asintótico se debe a que $e^{\left(-t/\frac{\rho H^2}{3n_f \mu}\right)}$ tiende rápidamente a cero, y la velocidad es aproximadamente igual al peso unitario ρg_z por el cuadrado del espesor del flujo H^2 y por el término de “equilibrio límite” Θ , dividido entre tres veces la viscosidad dinámica del componente fluido por la fracción de volumen de fluido. Esto se puede ver en la Figura 19, donde se grafica la EVIF de material desagregado (ecuación 4.66) para diferentes valores de velocidad inicial $\bar{v}_0$, indicando que $\bar{v}_x$ tiende a $(\rho g_z H^2 / 3n_f \mu) \Theta$ (descrito por la línea punteada), sin importar la velocidad inicial $\bar{v}_0$.

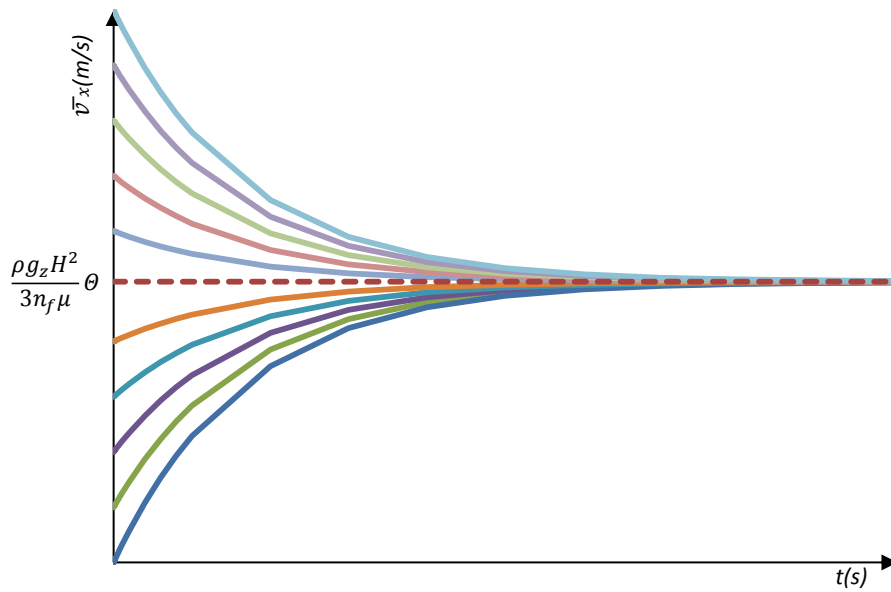


Figura 19. Gráfica de $\bar{v}_x$ para diferentes valores de velocidades iniciales $\bar{v}_0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Con valores de constantes $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$, $g_z = 9,81 \text{ m/s}^2$, $H = 1 \text{ m}$, $n_f = 0,4$, $\mu = 0,1 \text{ Pa.s}$, $\theta = 0,06$.

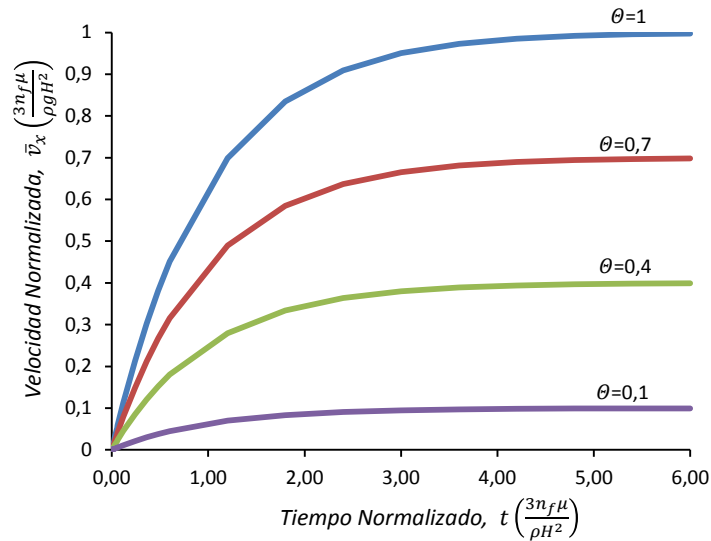


Figura 20. Gráfica de la EVIF (ecuación 4.66) para los valores típicos del parámetro $\theta = \tan \theta - (1 - \lambda) \tan \varphi_{bed}$. El estado constante de velocidades se acerca sólo después de tiempos muy largos, indicado por tiempos normalizados mayores que 1.

Por otra parte el tiempo necesario para acercarse a una velocidad límite (o constante) puede ser tan largo que es prácticamente inalcanzable porque las escalas de tiempo para la ecuación de velocidad instantánea del flujo tiene valores de 10^6 s (~ 12 días) cuando se introducen valores de los parámetro para que el flujo sea lo más rápido posible (Figura 19 y 20). Por ejemplo cuando $\rho = 2400 \text{ kg/m}^3$, $g_z = 9,81 \text{ m/s}^2$, $H > 1 \text{ m}$, $n_f < 0,7$, $\mu < 0,1$, Pa.s , $\theta = 1$.

Un análisis de sensibilidad de la EVIF se realiza tomando los diferentes valores que puede tener de espesor un flujo de material desagregado como se puede ver en la Figura 21. El espesor de

flujos de material desagregado tiene un efecto importante sobre la velocidad del flujo, con valores de H inferiores a 1 m en tiempos cortos (≤ 200 s). Como se aprecia en la Tabla 3, podrían ser flujos de pequeña escala o a nivel experimental. Para flujos con valores de espesor iguales o superiores a 1 m (de gran escala-Tabla 3) su influencia en la velocidad es baja para un tiempo ≤ 200 s, ya que la diferencia de velocidades es aproximada a 4,78 m/s en flujos que tengan espesores entre 1 y 10 m.

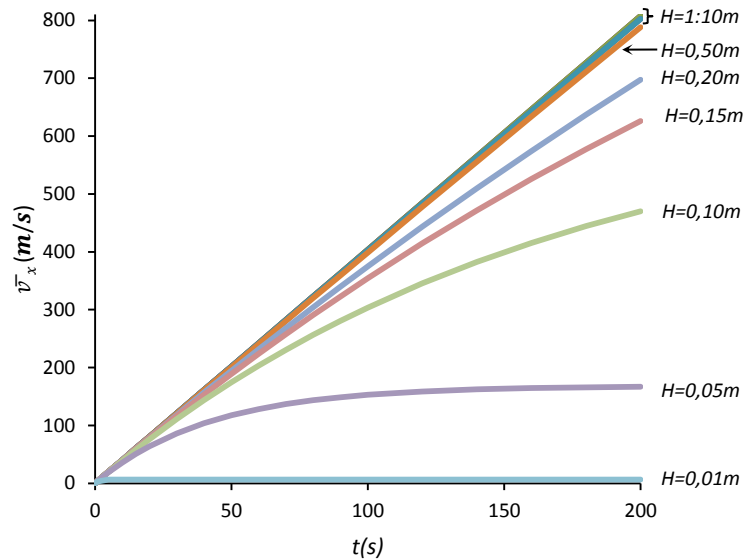


Figura 21. Comportamiento de la EVIF para diferentes valores de profundidad de flujo (H), para valores de parámetros: $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$, $g_z = 9,81 \text{ m/s}^2$, $n_f = 0,4$, $\mu = 0,1 \text{ Pa.s}$, $\theta = 0,4$.

Aunque para $t > 300$ s la diferencia de velocidades es mayor a 10 m/s para flujos que tengan espesores entre 1 y 10 m, o cuando $t \rightarrow \infty$ la diferencia de velocidades es $\sim 3^6 \text{ m/s}$ para los mismos espesores, lo que hace que estos valores cobren importancia en la velocidad del flujo en tiempos prolongados. Esto se debe a que el espesor se encuentra en el numerador de la EVIF. Entonces, a mayor espesor de flujo mayor velocidad, y la ecuación 5.2 representada por la línea punteada en la Figura 19 toma valores mucho más grandes si se toma a $H > 1\text{m}$, lo que a su vez aumenta el tiempo de convergencia como se puede apreciar en la Figura 21.

La Figura 22 muestra la influencia de la viscosidad dinámica del componente fluido en la velocidad de la mezcla (de material desagregado), a mayor viscosidad dinámica, menor velocidad. La velocidad puede diferir mucho para los posibles valores de viscosidades dinámicas en un fluido con sólidos suspendidos (arcillas y limos) como explica detalladamente en la sección 3.3.1.

Según Montserrat, et al. (2005), mientras las partículas más grandes pueden ser las responsables de otorgar la inercia suficiente como para dar al flujo un carácter inercial, las fracciones más finas pueden alterar en forma dramática las propiedades reológicas del fluido intersticial. Esta reología de la mezcla agua-finos no solo depende de la concentración de finos, sino también de las características electroquímicas del material. Por otra parte, altos valores de viscosidad dificultan la resuspensión (ya que disminuyen los niveles de turbulencia) y reduce el grado de interacción entre partículas.

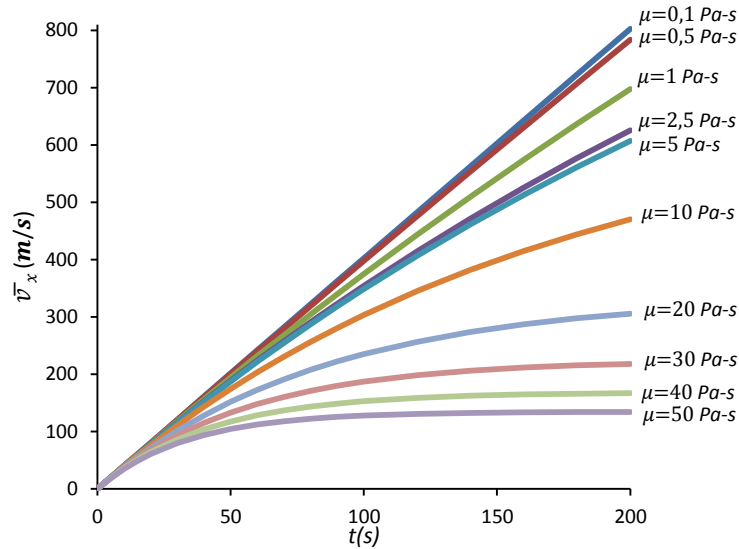


Figura 22. Comportamiento de la EVIF para diferentes valores de viscosidad (μ), para valores de parámetros: $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$, $g_z = 9,81 \text{ m/s}^2$, $H = 1 \text{ m}$, $n_f = 0,4$, $\theta = 0,4$.

En experimentos elaborados por Montserrat, et al. (2005) se utilizaron concentraciones de arcillas (bentonita) que se hallan normalmente en flujos naturales, y se encontró que los efectos en términos de esfuerzos viscosos, no son directamente proporcionales a la concentración de arcillas. Por lo que la ecuación que representa la relación de viscosidad con la concentración de bentonita (C_b) es:

$$\mu = 0,015e^{1,41C_b} \quad (5.3)$$

Por lo tanto, para una viscosidad de 0,01 Pa-s se requiere una concentración volumétrica de ~1,4%. Para una viscosidad de fluido más común en flujos de detritos de 0,1 Pa-s (Tabla 2), se requiere una concentración volumétrica de 3% y para una viscosidad “máxima” de 50 Pa-s se requiere una concentración volumétrica de 7,4% de bentonita. Resultados que dan una idea más clara de cómo cambia la viscosidad del fluido, en función de la concentración de finos, que a su vez produce cambios importantes en la velocidad del flujo.

En la Figura 23a, se puede observar como la densidad de la mezcla del flujo de material desagregado afecta muy poco el resultado de la velocidad en un tiempo de 200s, ya que la diferencia es del orden de 2,4 m/s si la densidad de la mezcla está entre los 1500 kg/m³ y 2400 kg/m³. Para $t > 300\text{s}$ la influencia de la densidad de la mezcla empieza a ser importante y aun más cuando $t \rightarrow \infty$, como se puede apreciar en la Figura 23a. La proporcionalidad de esta relación se puede decir que es: a mayor densidad mayor velocidad.

La explicación matemática de este comportamiento es que la densidad está en el numerador de la EVIF, de esta manera si la densidad aumenta también lo hará la velocidad. La explicación física, es que la densidad está siendo multiplicada por la gravedad, lo que se tendría con este producto es una fuerza unitaria. Así, un flujo que tiene una masa m_1 mayor que un flujo de masa m_2 , el flujo de m_1 será impulsado con mayor fuerza que el flujo de m_2 . Entonces a mayor masa, mayor fuerza, mayor velocidad y mayor la tasa de cambio de la velocidad (aceleración).

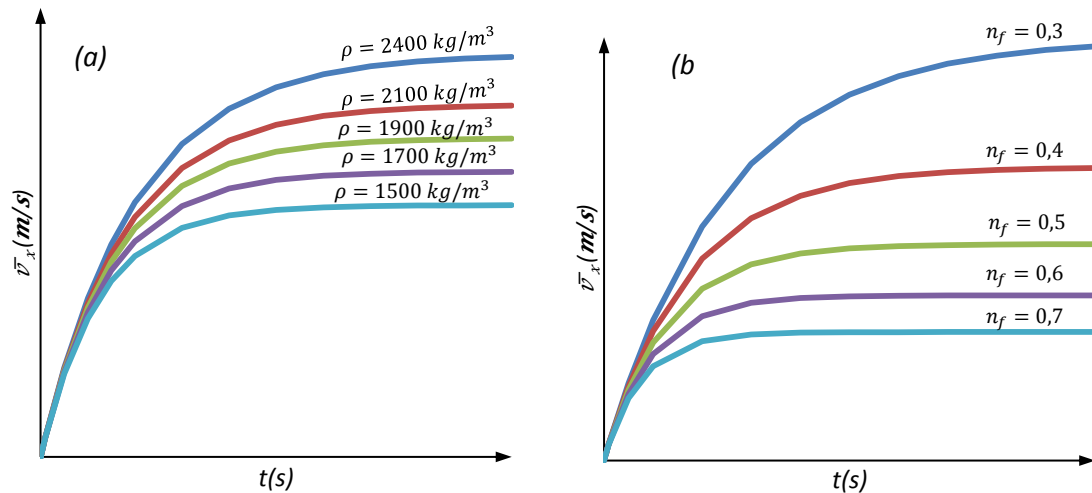


Figura 23. Comportamiento de la EVIF. (a) Para diferentes valores de densidad de mezcla (ρ), y (b) Para diferentes valores de fracción de volumen de fluido (n_f). Con valores de parámetros: $g_z = 9,81 \text{ m/s}^2$, $H = 1 \text{ m}$, $\mu = 0,1 \text{ Pa.s}$, $\theta = 0,4$.

La Figura 23b, muestra la influencia de la fracción de volumen de fluido en la EVIF es un poco mayor que de la densidad de mezcla, aproximadamente 7,37 m/s de diferencia, para un tiempo de 200s, si se tienen valores de fracción de volumen de fluido entre 0,3 a 0,7. Para $t \geq 200 \text{ s}$ la influencia de la densidad de la mezcla empieza a ser importante y aun más cuando $t \rightarrow \infty$, como se puede apreciar en la Figura 23b. Esta relación se puede decir que es inversa, a mayor fracción de volumen de fluido, menor velocidad.

Esto se debe a que la fracción de volumen de fluido esta directamente relacionada con la densidad de mezcla (Ecuación 3.2). Al aumentar la fracción de volumen de fluido (que es el componente de menor densidad), la fracción de volumen de sólidos disminuye de una forma inversa (que es el componente de mayor densidad), y a su vez hace que la densidad de mezcla disminuya como se muestra en la Figura 24. Esta disminución de la densidad de la mezcla se ve reflejada en la disminución la velocidad del flujo como se ve en la Figura 23a.

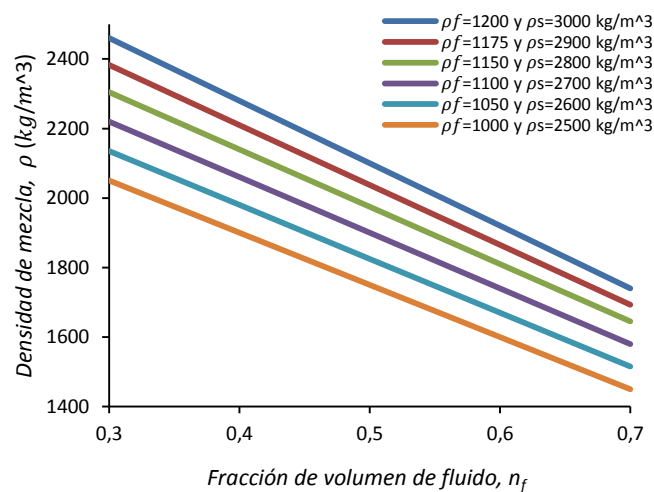


Figura 24. Relación entre la densidad de la mezcla (que está en función de la densidad del fluido, la densidad de los sólidos y la fracción volumétrica de los mismos) y la fracción de volumen de fluido.

También se analizó cual era la influencia del ángulo de talud θ , ángulo de fricción del lecho φ_{bed} , y fracción de presión de poros λ , variables que hacen parte del parámetro Θ (ecuación 4.48). En este análisis de sensibilidad se encontró que si se ingresan al modelo valores dentro de los rangos posibles de estas variables (Tabla 2), se tienen resultados de velocidad instantánea negativas a partir de un valor determinado y menor que aquel. Este comportamiento del modelo se puede ver claramente en las Figuras 25, 26 y 27, para ángulo de talud θ , ángulo de fricción del lecho φ_{bed} , y fracción de presión de poros λ , respectivamente.

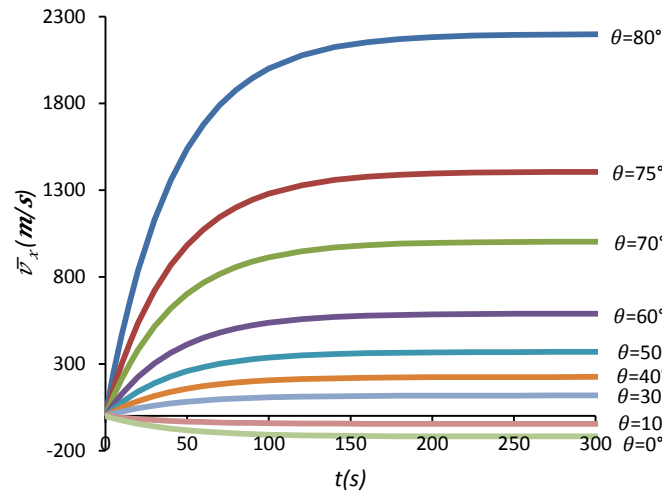


Figura 25. Comportamiento de la EVIF para diferentes valores de ángulo de talud (θ). Para valores de parámetros: $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$, $g_z = 9,81 \text{ m/s}^2$, $H = 1 \text{ m}$, $\mu = 40 \text{ n}_f = 0,4 \text{ Pa.s}$, $\varphi_{bed} = 30^\circ$, $\lambda = 0,5$.

La Figura 25 muestra que a mayor ángulo de talud mayor velocidad. Para este caso específico, con un ángulo de talud $\theta \leq 16^\circ$ la velocidad empieza a tener valores negativos. Según Suarez (1998), los movimientos tienden a comportarse como en caída libre cuando la pendiente superficial es mayor a 75° , en taludes de ángulo menor generalmente, los materiales rebotan y en los taludes de menos de 45° los materiales tienden a rodar.

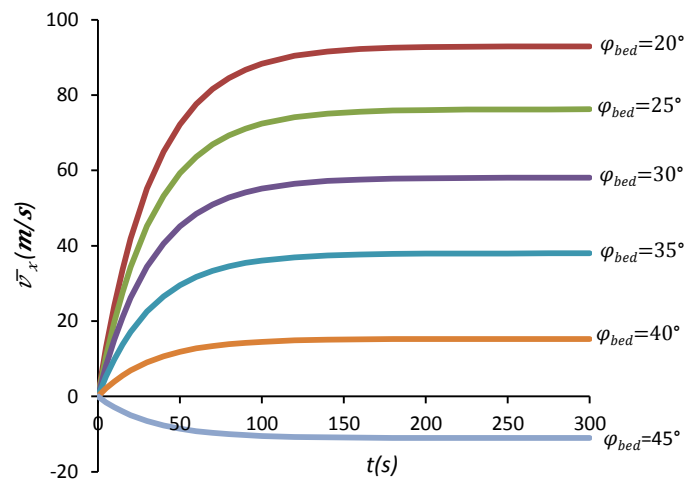


Figura 26. Comportamiento de la EVIF para diferentes valores de ángulo de fricción del lecho (φ). Para valores de parámetros: $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$, $g_z = 9,81 \text{ m/s}^2$, $H = 1 \text{ m}$, $\mu = 50 \text{ Pa.s}$, $n_f = 0,4$, $\theta = 25^\circ$, $\lambda = 0,5$.

La Figura 26 muestra que a menor ángulo de fricción del lecho mayor velocidad. Así los materiales de fricción interna baja alcanzan los valores de velocidad más altas. Según (Baum, et al., 2003) los flujos de tierra más rápido se producen en zonas de depósitos de arcillas. Para este caso específico, con un ángulo de fricción del lecho $\varphi_{bed} \geq 44^\circ$ la velocidad empieza a tener valores negativos.

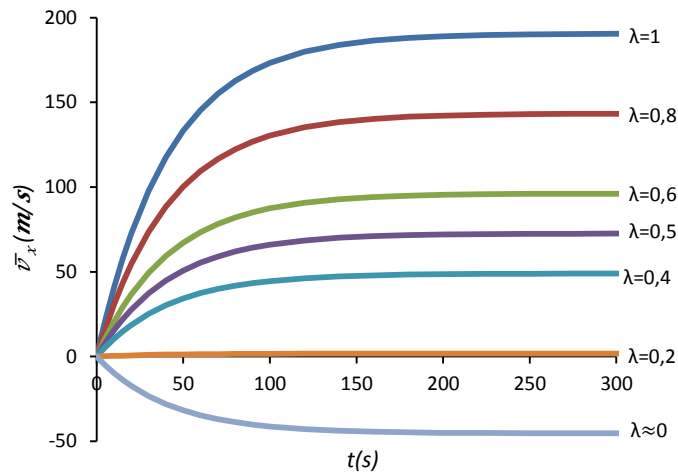


Figura 27. Comportamiento de la EVIF para diferentes valores de fracción de presión de poros (λ). Para valores de parámetros: $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$, $g_z = 9,81 \text{ m/s}^2$, $H = 1 \text{ m}$, $\mu = 40 \text{ Pa.s}$, $n_f = 0,4$, $\theta = 25^\circ$, $\varphi_{bed} = 30^\circ$.

En la Figura 27 se puede ver que a mayor fracción de presión de poros mayor velocidad. Así, la máxima velocidad de acuerdo a este parámetro se alcanza cuando $\lambda = 1$. Para este caso específico, con valores de fracción de presión de poros $\lambda < 0,2$ la velocidad empieza a tener valores negativos. De estas observaciones se puede concluir que los parámetros de ángulo de talud (θ), ángulo de fricción del lecho (φ_{bed}) y fracción de presión de poros (λ) son los que tiene mas influencia que los demás parámetros considerados por el modelo como la densidad de mezcla (ρ), el espesor de flujo (H), la viscosidad dinámica (μ) y la fracción de volumen de fluido (n_f).

De acuerdo con estas observaciones, se buscó el valor límite en el cual da como resultados valores positivos del parámetro θ (sin tener en cuenta las otras variables de la EVIF). Este parámetro consecuentemente hace que el valor de la velocidad tenga el mismo signo (positivo). En el caso contrario en que el parámetro θ de valores negativos, consecuentemente la velocidad tendrá valores negativos, que se pueden asociar a un estado estático del talud.

La búsqueda de esos valores límites están representados en la Figura 28, que refleja la importancia de la influencia del ángulo de talud, el ángulo de fricción y la fracción de presión de poros, ya que estos tres parámetros establecen si en el talud puede existir o no un movimiento. Si se ingresa en la Figura 28 con un ángulo de fricción entre los rangos posibles, cruzando con una línea de fracción de presión de poros, se puede determinar cuales son los valores de ángulos de inclinación de talud θ en los que puede existir un movimiento. Por ejemplo, si se tiene un ángulo de fricción de 30° (Arena) y una fracción de presión de poros de 0,6; el ángulo de talud en el cual puede existir un flujo de material desagregado es $\theta \geq 13,1^\circ$ (línea punteada en la Figura 28), en el caso en que el ángulo de inclinación del talud sea $< 13,1^\circ$ la posibilidad de que el talud presente inestabilidad disminuye.

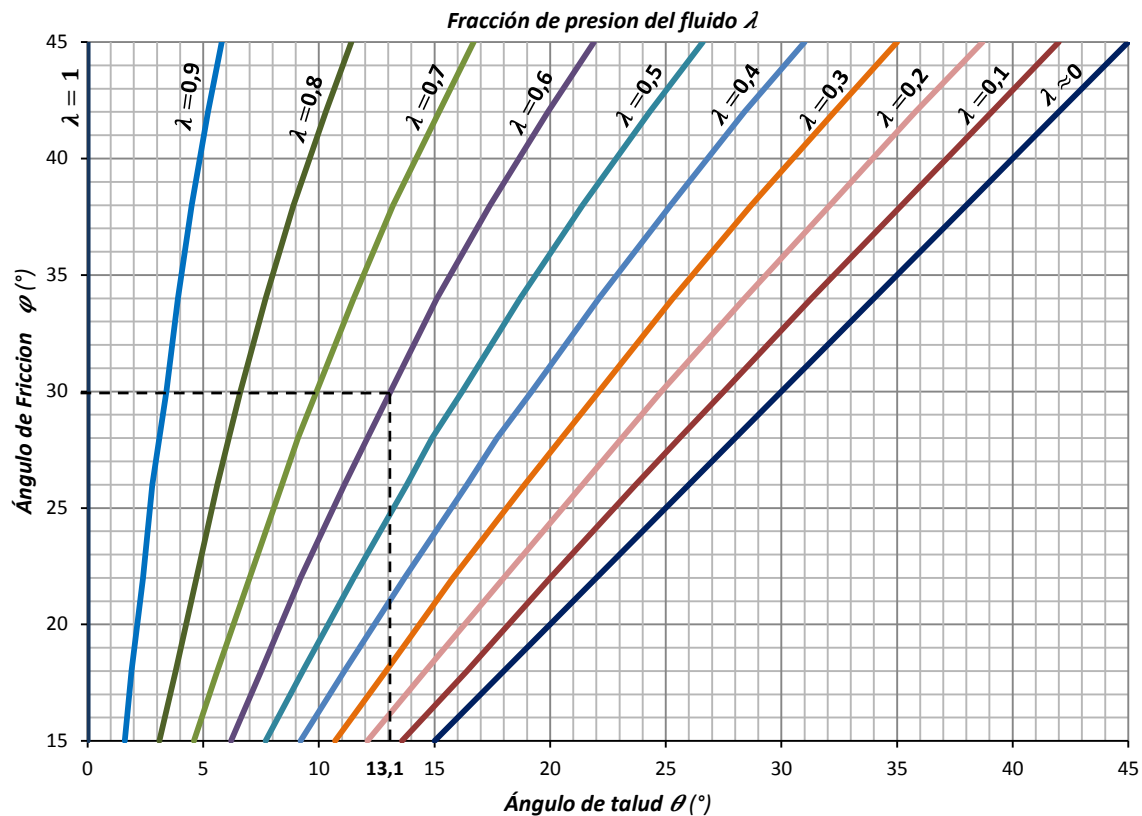


Figura 28. Influencia del ángulo de talud límite, ángulo de fricción del lecho y fracción de presión de poros.

La Figura 28 se puede ver como un resultado análogo al método para calcular la estabilidad de taludes conocido como el método de talud infinito. Este método es desarrollado en los apéndices A y B, para compararlo con la EVIF. Si se utiliza la ecuación A.12 (talud infinito sin infiltración), se puede observar como para un suelo que no tiene cohesión ($c = 0$), ni presión de poros, da los mismos resultados que si se ingresa en la Figura 28 por la línea de fracción de presión de poros $\lambda \approx 0$ y en ángulo de fricción del lecho, suponiendo que el factor de seguridad es el crítico ($FS = 1$):

$$1 = \frac{\tan \varphi}{\tan \beta} \rightarrow \beta = \tan^{-1}(\tan 30^\circ) = 30^\circ$$

Esto muestra que el ángulo de la superficie de falla con respecto a la horizontal debe tener un valor igual o menor que 30° , para el caso en que sea mayor que 30° , el talud ya empieza a ser inestable como se muestra en la Figura 28. Para el caso en que el talud tenga presión de poros diferente de cero, se puede ingresar por las líneas $0 < \lambda \leq 1$, que dan los mismos resultados que si se utiliza la ecuación B.25 [ecuación de talud infinito con infiltración (expresado en términos de fracción de presión de poros)]. Por ejemplo suponiendo de que el factor de seguridad es el crítico ($FS = 1$):

$$1 = \frac{(1 - \lambda) \tan \varphi}{\tan \beta} \rightarrow \beta = \tan^{-1}[(1 - 0.6) \tan 30^\circ] = 13^\circ$$

Esto muestra que el ángulo de la superficie de falla con respecto a la horizontal (de un talud con presión de poros) debe tener un valor igual o menor que 13° para que sea estable, en el caso en que sea mayor que 13° el talud ya empieza a ser inestable como se muestra en la Figura 28. Esto significa que la EVIF puede hallar un factor de seguridad, que establece un estado estático del talud en caso en que la EVIF de valores negativos y un estado de falla (en movimiento) en el caso en que la EVIF de valores positivos. En el caso en el que exista un movimiento (valores positivos), la EVIF tiene en cuenta otros aspectos que hacen parte del proceso como: la fuerza unitaria que impulsa al flujo [densidad de la mezcla (ρ) por la gravedad (g_z)], el espesor del flujo (H), la fracción de volumen de fluido (n_f) y viscosidad dinámica del componente fluido (μ). Además el modelo supone que es un flujo y por lo tanto tiene diferentes velocidades a través de la profundidad (perfil de velocidades parabólico), aunque el resultado de velocidad instantánea sea del centro de masa, promediado en la profundidad.

5.1.3. Desplazamiento del flujo

Con la ecuación de desplazamiento instantáneo del flujo (EDIF) (ecuación 4.74) se puede conocer la posición del centro de masa de un flujo de material desagregado en un instante de tiempo determinado, o si se despeja la ecuación se puede determinar cuanto tiempo tarda un flujo en recorrer una distancia cualquiera. En la Figura 29 muestra como se comporta la EDIF de material desagregado respecto al tiempo, y se puede apreciar que la posición $x(t)$ tiende en forma asintótica a la recta punteada cuando $t \rightarrow \infty$ (ecuación 5.4).

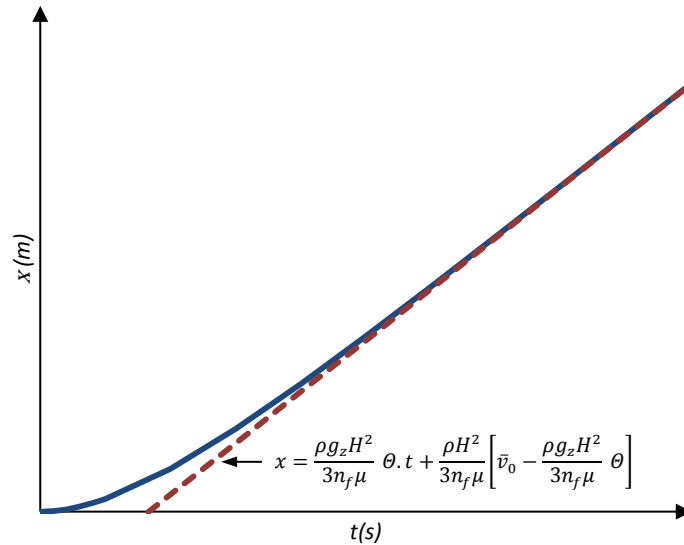


Figura 29. Grafica de desplazamiento (x) con respecto al tiempo cuando $t \rightarrow \infty$. Con valores de constantes $x_0 = 0$, $\bar{v}_0 = 0$, $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$, $g_z = 9,81 \text{ m/s}^2$, $H = 1 \text{ m}$, $n_f = 0,4$, $\mu = 0,1 \text{ Pa.s}$, $\theta = 0,06$.

$$x = \frac{\rho g_z H^2}{3 n_f \mu} \theta \cdot t + \frac{\rho H^2}{3 n_f \mu} \left[\bar{v}_0 - \frac{\rho g_z H^2}{3 n_f \mu} \theta \right] \quad (5.4)$$

Debido a que $e^{\left(-t/\frac{\rho H^2}{3 n_f \mu}\right)}$ tiende rápidamente a cero.

5.1.4. Equilibrio estático

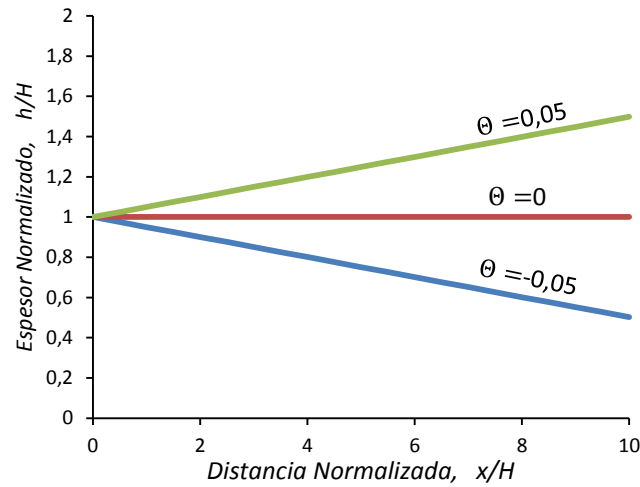


Figura 30. Equilibrio límite de perfiles longitudinales en laderas estáticas para espesores predichos por la ecuación 4.91 con valores típicos de Θ .

La Figura 30 muestra que al suponer Θ constante, se puede ver que obedece a una condición límite estipulando un espesor de escombros $h = H$ en una posición arbitraria $x = 0$. Los valores del parámetro Θ controlan el comportamiento de la ecuación de equilibrio estático (EEE) (ecuación 4.91), como se ilustra en la Figura 30. Por ejemplo, cuando $\Theta = 0$ la EEE se reduce a una ecuación estándar que describe el equilibrio límite de un talud infinito sin cohesión (Iverson & Denlinger, 2001a). En este caso, $\tan \theta = (1 - \lambda) \tan \phi_{bed}$ y $h/H = 1$, indican que una masa granular en el equilibrio límite tiene un espesor uniforme. En los casos en que $\Theta \neq 0$ una masa granular apoyada sobre un plano tendrá un espesor de equilibrio límite no uniforme (Figura 30).

5.1.5. Perfiles no lineales de depósitos

La Figura 31 muestra el comportamiento de la ecuación de perfiles de depósitos no lineales (EPDNL) (ecuación 4.111) para los casos en los que $x_0/H = 1$. Esta ecuación bosqueja el perfil de un depósito de material desagregado que reposa sobre un lecho plano ($\theta = 0^\circ$).

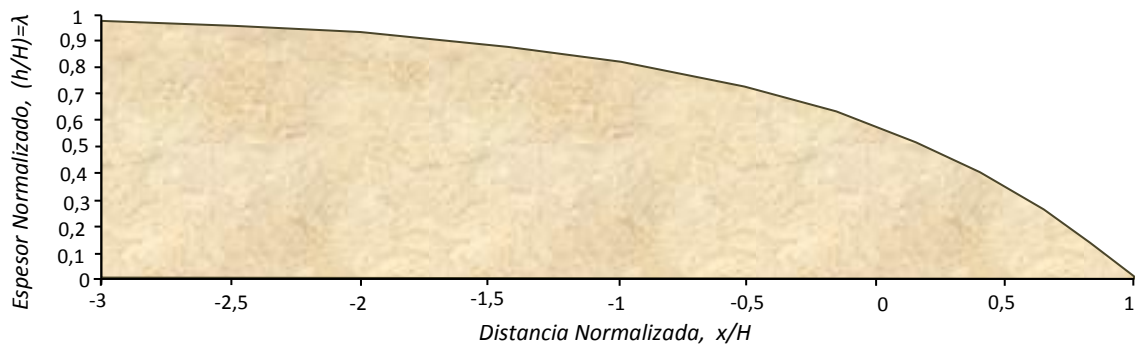


Figura 31. Equilibrio límite longitudinal de perfiles de depósitos estáticos predichos por la EPDNL (4.111)

La Figura 32 muestra el comportamiento de la EPDNL (ecuación 4.111) para los casos en los que $x_0/H = 1$. Esta ecuación bosqueja el perfil de un depósito de material desagregado que reposa sobre un lecho de pendiente suave ($\theta = 10^\circ$). Estos tipos de ejemplos representan perfiles, más que predicciones para cualquier depósito específico, porque diferentes distribuciones de presión de poros y los diferentes valores de θ y φ_{bed} , por supuesto, producen diferente perfiles.

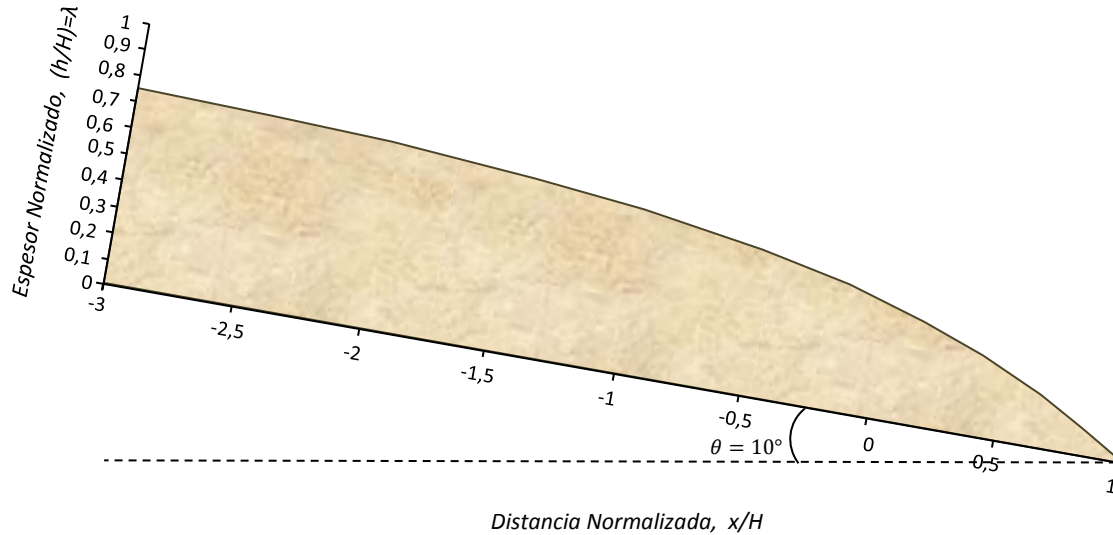


Figura 32. Equilibrio límite longitudinal de perfiles de depósitos estáticos predichos por la EPDNL (4.111)

Además, la inmovilización de los depósitos puede estar influida por la acumulación de sedimentos de forma gradual (que no está representada en las ecuaciones 4.66, 4.74, 4.91 y 4.111), y por la acumulación e interposición de clastos excepcionalmente grandes (con diámetros comparables a la profundidad máxima del flujo). A pesar de estas complicaciones, los perfiles se muestran en las Figuras 31 y 32 tienen formas que se asemejan a las de muchos depósitos.

6. APLICACIÓN Y COMPARACIÓN DEL MODELO

En este capítulo se aplicará la ecuación de equilibrio estático (ecuación 4.91), la ecuación de velocidad instantánea del flujo (EVIF) (ecuación 4.66) y la ecuación de desplazamiento instantáneo del flujo (EDIF) (ecuación 4.74) en un talud que ha presentado flujos de material desagregado. Este talud se encuentra ubicado en la avenida circunvalar con calle 42 en la localidad de chapinero de la ciudad de Bogotá. Para el análisis de estabilidad del talud se supone una pendiente de la superficie de falla con la horizontal de $\sim 20^\circ$, una vez inicia el flujo la masa se trasladará por una pendiente de unos $\sim 45^\circ$, una distancia de ~ 23 m, y posteriormente cambia a un ángulo de $\sim 0^\circ$ (Figura 33).

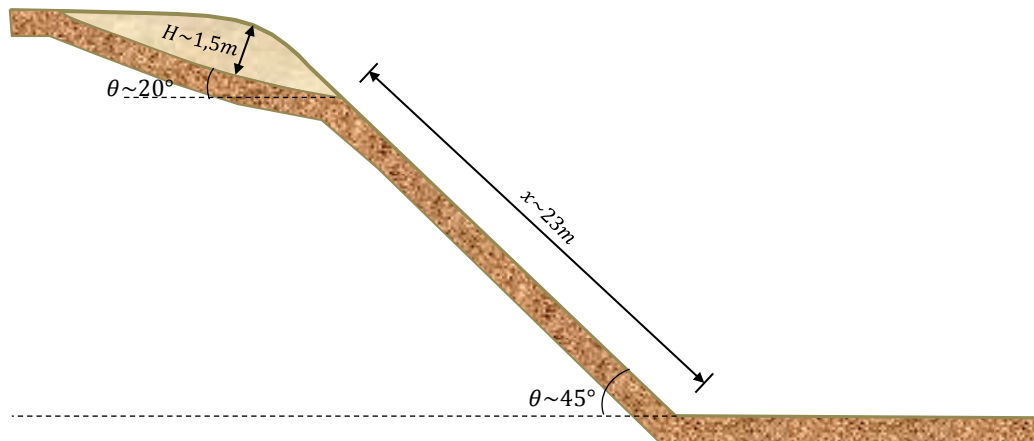


Figura 33. Gradiente topográfico en la dirección del flujo para el caso de aplicación al talud.

El Instituto Geofísico Universidad Javeriana realizó el estudio de la microzonificación sísmica del campus de la Universidad Javeriana. Uno de los insumos fue una campaña de exploración geotécnica. Dada la exploración geotécnica, se realizaron varios ensayos de SPT, de los cuales uno se encuentra ubicado en el talud de interés, cuyos resultados se muestran en la Tabla 4. Con estos resultados del SPT se puede suponer que el espesor de flujo ocurrió con una profundidad máxima H aproximada a los 1,5m, ya que través de esta profundidad se encuentra un material blando compuesto principalmente por arcilla limosa.

Tabla 4. Resultados de ensayos de penetración estándar STP.

Muestra					Material reportado
Profundidad (m)	Golpes (N)				
0,20-0,65	4/6"	6/6"	7/6"	Arcilla limosa amarilla con vetas habanas	
1,90-2,35	30/6"	31/6"	42/6"	Arcilla rojiza con vetas habanas	
3,35-3,55	42/6"	50/2"	Rechazo	Arcillolita rojiza con algo de morado y gris claro	

Fuente: (Instituto Geofísico Universidad Javeriana, 2002)

Con el número de golpes (N) obtenidos en el ensayo del SPT y la correlación de Kishida, se puede determinar un valor aproximado de ángulo de fricción del lecho por el cual descendió la masa de flujos de material desagregado (González, 1999):

$$\varphi_{bed} = 15 + \sqrt{12,5 * N} = 15 + \sqrt{12,5 * (6 + 7)} \cong 28^\circ$$

Por otra parte, para este caso se supone una viscosidad dinámica del fluido de 0,1 Pa-s, que según Iverson (2005) es común para los flujos de material desagregado. Con la ecuación 5.3, se determina que para obtener este valor en la viscosidad dinámica, se necesita una concentración volumétrica de finos de aproximadamente el 3%. Debido a que el espesor del suelo con el cual se supone que hay un flujo de material desagregado está compuesto de arcilla limosa, se espera que la composición mineralogía de este material sea la bentonita. En tal caso, la densidad de la bentonita se toma con un valor de 2000 kg/m³. Con las anteriores observaciones se puede calcular la densidad del fluido:

$$\rho_f = (\% \text{ de agua} * \rho_a) + (\% \text{ de sólidos} * \rho_b)$$

Donde ρ_a es la densidad del agua pura, ρ_b es la densidad de la bentonita, y ρ_f es la densidad del fluido. Al reemplazar los valores:

$$\rho_f = \left(0,97 * 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) + \left(0,03 * 2000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) = (970 + 60) \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 1030 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Con la ecuación de densidad de mezcla promedio ponderada (ecuación 3.2), se calcula la densidad de mezcla:

$$\rho = \rho_s n_s + \rho_f n_f = \left(2260 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} * 0,6\right) + \left(1030 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} * 0,4\right) = 1768 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Con la ecuación de presión de poros del fluido (ecuación 4.26), se determina la fracción de presión de poros:

$$\lambda = \frac{\rho_f g_z h}{\rho g_z h} = \frac{\rho_f}{\rho} = \frac{1030 \text{ kg/m}^3}{1768 \text{ kg/m}^3} = 0,583$$

En la Tabla 5 se presenta un resumen de los valores de los parámetros y condiciones iniciales utilizados para simular el comportamiento de un flujo de material desagregado en el talud de interés. Para iniciar, se realiza un análisis de estabilidad al talud con la ecuación de equilibrio estático (ecuación 4.91), el cual presenta un valor de $\theta = 0,142$, indicando que la masa está apoyada sobre una superficie plana, y el espesor de equilibrio límite no es uniforme como se puede apreciar en la Figura 34.

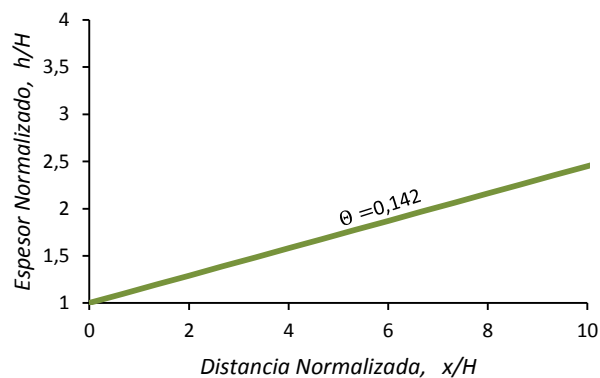


Figura 34. Equilibrio límite del perfil longitudinal del talud estático para espesores predichos por la ecuación 4.91 con un valor de $\theta = 0,142$.

Tabla 5. Valores de las propiedades físicas del flujo de material desagregado.

Parámetro	Símbolo (unidades)	Valor
<i>Condiciones iniciales</i>		
Tiempo	$t(s)$	0
Velocidad inicial	$\bar{v}_0(m/s)$	0
Posición inicial	$x_0(m)$	0
Ángulo de talud	$\theta(^{\circ})$	20
<i>Propiedades de la mezcla</i>		
Densidad de mezcla	$\rho(Kg/m^3)$	1768
Espesor del flujo	$H(m)$	1,5
Ángulo de fricción del lecho	$\varphi_{bed}(^{\circ})$	28
Fracción de volumen de fluido	n_f	0,4
Fracción de volumen de sólidos	n_s	0,6
Fracción de presión de poros	λ	0,583
<i>Propiedades del fluido</i>		
Densidad del fluido	$\rho_f(Kg/m^3)$	1030
Viscosidad dinámica del fluido	$\mu(Pa/s)$	0,1
<i>Propiedades de los sólidos</i>		
Densidad de sólidos	$\rho_s(Kg/m^3)$	2260
Ángulo de fricción del lecho	$\varphi(^{\circ})$	28

Por otra parte se remplazan los valores tabulados en la Tabla 4, en la ecuación de velocidad instantánea del flujo (EVIF) de material desagregado (ecuación 4.66), cuyos resultados se puede apreciar en la Figura 35.

La Figura 35 muestra como la masa se empieza a desplazar desde el reposo en un tiempo $t = 0s$ con una aceleración constante de $1,4 m/s^2$ sobre la superficie de falla con $\theta = 20^{\circ}$, antes de que inicie a descender por el plano de pendiente más pronunciada. Cuando el instante de tiempo de flujo es de 1s (señalado por la línea punteada) cambia a la pendiente de 45° , y recorre una distancia de unos 23m en un intervalo de tiempo igual a 2,25s, con una aceleración de $7,63 m/s^2$. En el instante de tiempo igual a 3,25s la pendiente cambia a 0° y comienza a desacelerarse en forma constantemente ($-2,18m/s^2$) hasta llegar nuevamente al reposo, después de haber recorrido en total $\sim 103m$.

La Figura 36 muestra como se desplaza el flujo de material desagregado en función del tiempo desde el inicio hasta la deposición del material, recorriendo en total aproximadamente unos 103m en un tiempo de $\sim 12s$. En el primer intervalo de tiempo (0-1s) la masa apenas inicia a desplazarse por la pendiente de 20° recorriendo unos 0,7m. En el segundo intervalo de tiempo (1-2,25s) el flujo desciende por una pendiente de 45° una distancia aproximada a los 23m y al cambiar de pendiente a 0° , durante el tercer intervalo de tiempo (2,25-12s) la masa empieza a desacelerar hasta llegar al reposo, recorriendo unos $\sim 80m$.

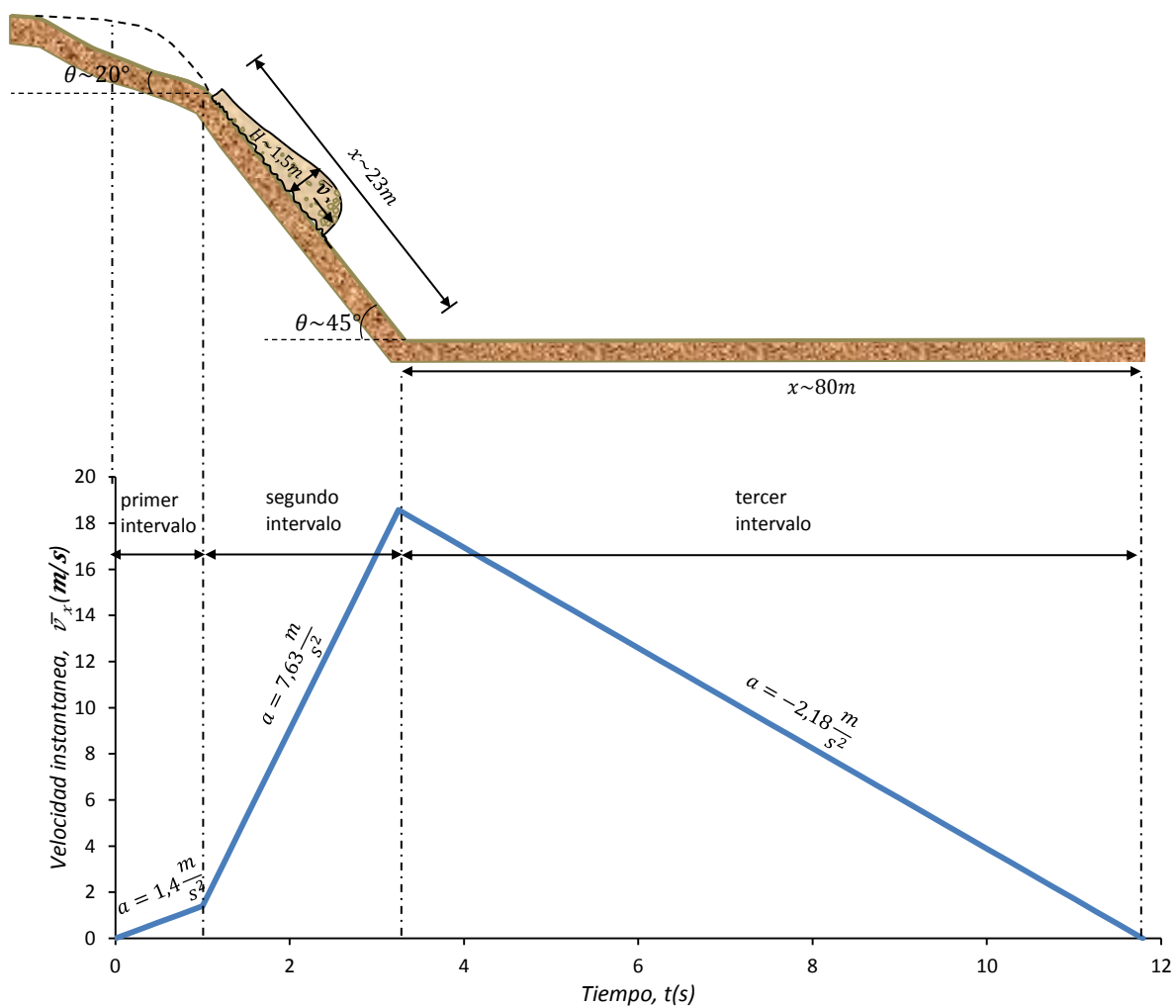


Figura 35. Velocidad del flujo de material desagregado en función del tiempo.

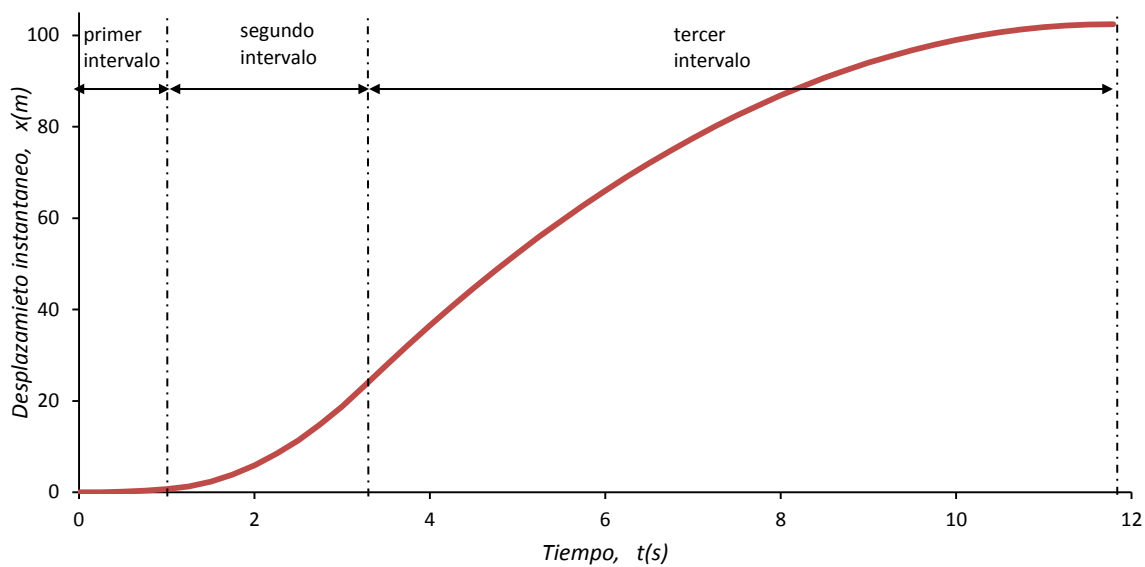


Figura 36. Desplazamiento del flujo de material desagregado en función del tiempo.

La distancia de 103m puede ser prolongada para un espesor de flujo de 1,5m. Esto puede ser causado al suponer que las variables como, la densidad de la mezcla, el espesor de flujo, la fracción de volumen de fluido, la fracción de presión de poros y el ángulo de fricción de lecho son constantes en el tiempo y en el espacio. Situación que no es necesariamente así, ya que durante el proceso puede haber pérdida del componente fluido, disminución del espesor del flujo y ligeros cambios en la pendiente, acontecimientos que pueden hacer que aumente los esfuerzos cortantes por los sólidos y consecuentemente disminuya la velocidad.

Con el objetivo de comparar el análisis realizado al flujo de material desagregado con los métodos convencionales de estabilidad de taludes, se procede a calcular el factor de seguridad (FS) con el método de talud infinito [en términos de fracción de presión de poros (ecuación B.25)] (Figura 37):

$$FS = \frac{(1 - \lambda) \tan \varphi_{deb}}{\tan \theta} = \frac{(1 - 0,586) \tan 28^\circ}{\tan 20^\circ}$$

$$FS \cong 0,61$$

Este resultado indica que el talud es inestable en un solo punto cuando tiene una fracción de presión de poros de 0,586. Mientras que el método de talud infinito solamente permite realizar un análisis en el estado estático del talud, y determinar si es estable o inestable, la metodología de Iverson & Denlinger (2001) permite conocer no solamente la estabilidad del talud, sino también, en caso de ser inestable y producirse un flujo de material desagregado, permite conocer la velocidad en cada instante de tiempo del centro de masa del flujo. También la ecuación de desplazamiento permite conocer la posición del centro de masa del flujo en un instante de tiempo determinado y la distancia que recorrerá la masa desde el inicio de flujo hasta la deposición.

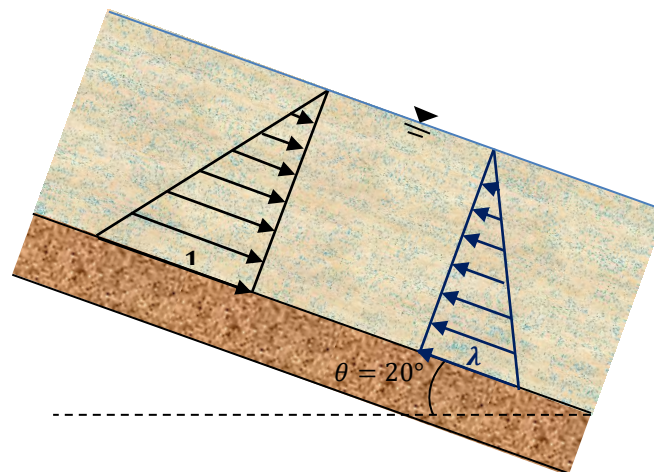


Figura 37. Método de talud infinito con infiltración, en términos de fracción de presión de poros.

La ecuación de velocidad instantánea del flujo (EVIF) y la ecuación de desplazamiento instantáneo del flujo (EDIF) de material desagregado pueden ser utilizadas como insumo para evaluar el riesgo por flujos de material desagregado. El **riesgo** (R) se define como la magnitud probable de daño de un sistema específico o en alguno de sus componentes, en un periodo determinado ante la presencia de una actividad específica potencialmente peligrosa (es este caso los flujos de material desagregado) (Vargas, 2002).

A la probabilidad de que una determinada magnitud y duración de una fuerza o energía potencialmente peligrosa (en este caso la velocidad, que se puede asociar a la energía cinética) se desencadene y tenga la capacidad de generar daño se le llama **amenaza** (A) [$A=f(\text{probabilidad de falla y probabilidad de una magnitud de velocidad})$]. A la predisposición del sistema o de alguno de sus componentes a sufrir daño por una amenaza (en este caso la ubicación del sistema), se le denomina **vulnerabilidad** (V) [$V=f(\text{grado de exposición, resistencia})$]. Entonces el riesgo esta en función de la amenaza potencial y de la vulnerabilidad del sistema y sus componentes a esa amenaza [$R=f(A,V)$] (Vargas, 2002).

Los resultados de los métodos convencionales para análisis de estabilidad de taludes se pueden utilizar como insumo para determinar la amenaza, debido a que se puede hallar solamente la probabilidad de falla. Pero la ecuación de velocidad instantánea del flujo de material desagregado se puede utilizar como insumo para evaluar una amenaza no solamente por la probabilidad de falla (en el caso de que se obtengan valores positivos de velocidad), sino también con la probabilidad de ocurrencia de cierta magnitud de velocidad en una distancia determinada. La ecuación de desplazamiento del flujo de material desagregado se puede utilizar como insumo para determinar la vulnerabilidad (grado de exposición del sistema). Por ejemplo, estos datos de velocidad calculados se pueden utilizar para obtener una función de vulnerabilidad física, función que relaciona la velocidad del flujo y su altura en el momento del impacto con una estructura a los daños que genera dicha velocidad (Quan Luna, et al., 2011).

7. CONCLUSIONES

- Las consideraciones de los modelos de Iverson (2005) y de Iverson & Denlinger (2001) proporcionan una base fundamental desde las leyes físicas y reglas matemáticas para la modelación de los flujos de material desagrado.
- El modelo de Iverson and Denlinger (2001) puede describir a aquellos tipos de movimientos en masa que estén compuestos por dos fases como: flujos hiper-concentrados, flujos de lodos, flujos de detritos, flujos de suelos y deslizamientos traslacionales, siempre y cuando se tenga presente que la presión de poros varía linealmente desde el un máximo en el fondo hasta cero en la superficie; y que se tienen esfuerzos cortantes por fricción entre sólidos.
- El comportamiento general de la ecuación de velocidad instantánea del flujo (EVIF) de material desagregado tiende de manera asintótica a una velocidad constante, por lo que el flujo nunca se detiene, principalmente como consecuencia de suponer que la pendiente de la trayectoria del flujo es constante, al igual que la fricción del lecho y la fracción de presión de poros.
- Si el ángulo de talud, el ángulo de fricción del lecho y la fracción de presión de poros (dado como: $\Theta = \tan \theta - (1 - \lambda) \tan \phi_{bed}$) varían como una función arbitraria de la posición o el tiempo, la ecuación de velocidad instantánea del flujo (EVIF) y la ecuación de desplazamiento instantáneo del flujo (EDIF) se pueden utilizar como una base para el cálculo por etapas del movimiento del centro de masa del flujo de material desagregado.
- Los parámetros que más influyen en la estabilidad de un talud haciendo uso de la EVIF son el ángulo de talud, el ángulo de fricción del lecho y la fracción de presión de poros.
- El espesor de flujo influye de manera importante en la velocidad, ya que a mayor espesor mayor aceleración, debido al aumento de masa.
- La viscosidad dinámica del componente fluido influye significativamente en la velocidad, ya que a mayor viscosidad menor aceleración, debido al aumento de la resistencia cortante del fluido.
- El modelo de Iverson & Denlinger (2001) muestra una clara ventaja sobre el método de talud infinito, ya que no solamente determina la estabilidad del talud, sino que también permite tener una valoración de la velocidad y desplazamiento del flujo.
- La ecuación de velocidad instantánea del flujo (EVIF) y la ecuación de desplazamiento instantáneo del flujo (EDIF) pueden ser utilizadas como insumo para evaluar el riesgo por flujos de material desagregado.

APÉNDICE A: ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DE TALUDES MÉTODO DE TALUD INFINITO-SIN INFILTRACIÓN

Este apéndice se desarrolla con el propósito de comparar el método convencional para el análisis de estabilidad de taludes (talud Infinito), con el método de modelación de flujo de material desagregado, desarrollado por Iverson & Denlinger (2001). Para tener conocimiento de la estabilidad de un talud en el cual se presenta una falla paralela a la superficie del talud, a una profundidad superficial y una longitud de falla larga en comparación con su espesor, puede hacerse uso del método de talud infinito (Suarez, 1998).

En general el factor de seguridad es definido como la resistencia cortante promedio dividido entre el esfuerzo cortante promedio desarrollado a lo largo de la superficie potencial de falla (Das, 2001):

$$FS_s = \frac{\tau_f}{\tau_d} \quad (A.1)$$

Donde:

FS_s = Factor de Seguridad con respecto a la resistencia

τ_f = resistencia cortante promedio

τ_d = esfuerzo cortante promedio desarrollado a lo largo de la superficie potencial de falla

La resistencia cortante promedio puede hallarse utilizando el criterio de Morh-Coulomb:

$$\tau_f = c + \sigma' \tan \varphi \quad (A.2)$$

Donde:

c = cohesión

φ = ángulo de fricción drenada

σ' = esfuerzo normal efectivo sobre la superficie potencial de falla

También se define a τ_d como:

$$\tau_d = c_d + \sigma' \tan \varphi_d \quad (A.3)$$

Donde:

c_d = cohesión efectiva

φ_d = ángulo de fricción que se desarrolla a lo largo de la línea potencial de falla

Sustituyendo las ecuaciones A.2 y A.3 en la ecuación A.1

$$FS_s = \frac{c + \sigma' \tan \varphi}{c_d + \sigma' \tan \varphi_d} \quad (A.4)$$

Otras formas de definir el factor de seguridad son con respecto a la cohesión y a la fricción como se muestra en las ecuaciones A.5 y A.6 respectivamente.

$$FS_s = \frac{c}{c_d} \quad (A.5)$$

$$FS_s = \frac{\tan \varphi}{\tan \varphi_d} \quad (A.6)$$

Cuando el FS es igual a 1, el talud está en un estado de falla incipiente. Generalmente un valor de 1.5 para el factor de seguridad con respecto a la resistencia es aceptable para el diseño de un talud estable (Das, 2001).

Para evaluar el factor de seguridad contra una posible falla de un talud a lo largo de un plano AB y una profundidad H por debajo de la superficie del terreno como se muestra en la Figura A1, se considera el elemento abcd con una longitud unitaria perpendicular al plano mostrado. Las fuerzas F que actúan sobre las caras ab y cd iguales y opuestas de tal manera que se pueden despreciar, y el peso efectivo del suelo es con una presión de poros igual a cero. Entonces:

$$W = (\text{Volumen del suelo}) \times (\text{peso específico del suelo}) = \gamma LH \quad (A.7)$$

El peso w se resuelve en dos componentes. Perpendicular a plano AB: $Na = w \cos \theta = \gamma LH \cos \theta$ y paralelo al plano AB: $Ta = w \sin \theta = \gamma LH \sin \theta$ que es la fuerza que tiende a causar la falla.

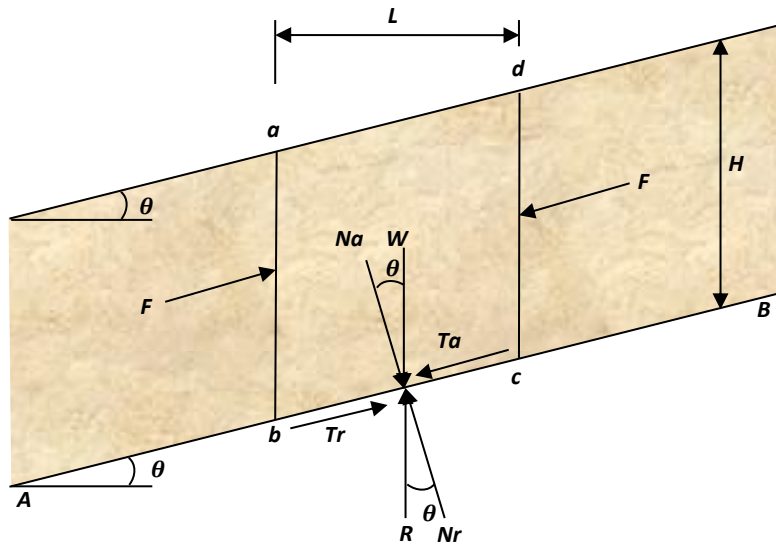


Figura A1. Análisis de un talud infinito sin infiltración

El esfuerzo efectivo σ' y el esfuerzo cortante τ en la base del elemento del talud son:

$$\sigma' = \frac{Na}{\text{área de la base}} = \frac{\gamma Lh \cos \theta}{\left(\frac{L}{\cos \theta}\right)} = \gamma H \cos^2 \theta \quad (A.8)$$

y

$$\tau = \frac{Ta}{\text{área de la base}} = \frac{\gamma Lh \sin \theta}{\left(\frac{L}{\cos \theta}\right)} = \gamma H \cos \theta \sin \theta \quad (A.9)$$

Al sustituir A.8 en la ecuación A.3 resulta:

$$\tau_d = c_d + \gamma H \cos^2 \theta \tan \varphi_d$$

Como τ_d es definido en A.9 y reemplazando en la anterior ecuación, se tiene que:

$$\gamma H \cos \theta \sin \theta = c_d + \gamma H \cos^2 \theta \tan \varphi_d$$

Despejando,

$$\frac{c_d}{\gamma H} = \cos \theta \sin \theta - \cos^2 \theta \tan \varphi_d$$

Dividiendo la igualdad entre $\cos^2 \theta$

$$\frac{c_d}{\gamma H \cos^2 \theta} = \frac{\cos \theta \sin \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{\cos^2 \theta \tan \varphi_d}{\cos^2 \theta}$$

Como $\tan \theta = \sin \theta / \cos \theta$, entonces:

$$\frac{c_d}{\gamma H} = \cos^2 \theta (\tan \theta - \tan \varphi_d)$$

$$c_d = \gamma H \cos^2 \theta (\tan \theta - \tan \varphi_d) \quad (A.10)$$

Despejando las ecuaciones A.5 y A.6, y Sustituyendo en la ecuación A.10, se tiene:

$$\frac{c}{FS} = \gamma H \cos^2 \theta \left(\tan \theta - \frac{\tan \varphi}{FS} \right)$$

$$\frac{c}{FS} = \gamma H \cos^2 \theta \tan \theta - \frac{\gamma H \cos^2 \theta \tan \varphi}{FS}$$

$$\frac{c}{FS} + \frac{\gamma H \cos^2 \theta \tan \varphi}{FS} = \gamma H \cos^2 \theta \tan \theta$$

$$\frac{1}{FS} (c + \gamma H \cos^2 \theta \tan \varphi) = \gamma H \cos^2 \theta \tan \theta$$

Finalmente se tiene la ecuación para calcular el factor de seguridad en un talud infinitamente largo con una presión de poros igual a cero.

$$FS = \frac{c}{\gamma H \cos^2 \theta \tan \theta} + \frac{\tan \varphi}{\tan \theta} \quad (A.11)$$

Cuando el suelo no tiene cohesión $c = 0$ como es el caso de los suelos granulares el factor de seguridad es:

$$FS = \frac{\tan \varphi}{\tan \theta} \quad (A.12)$$

Esto indica que, en un talud infinito compuesto de arena, el valor del FS es independiente de la altura H y que el talud es estable siempre que $\varphi > \theta$ (Das, 2001). Si el suelo posee cohesión y fricción, la profundidad del plano a lo largo del cual ocurre el equilibrio límite se determina sustituyendo $FS=1$ y $H = H_{cr}$ en la ecuación A.11, resultando:

$$1 = \frac{c}{\gamma H_{cr} \cos^2 \theta \tan \theta} + \frac{\tan \varphi}{\tan \theta}$$

$$1 - \frac{\tan \varphi}{\tan \theta} = \frac{c}{\gamma H_{cr} \cos^2 \theta \tan \theta}$$

$$H_{cr} = \frac{c}{\gamma \cos^2 \theta \tan \theta \left(1 - \frac{\tan \varphi}{\tan \theta}\right)}$$

$$H_{cr} = \frac{c}{\gamma \cos^2 \theta (\tan \theta - \tan \varphi)} \quad (A.13)$$

APÉNDICE B: ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DE TALUDES MÉTODO DE TALUD INFINITO-CON INFILTRACIÓN

La Figura B1 muestra un talud infinito que tiene infiltración a través del suelo y el nivel del agua freática coincide con la superficie del terreno.

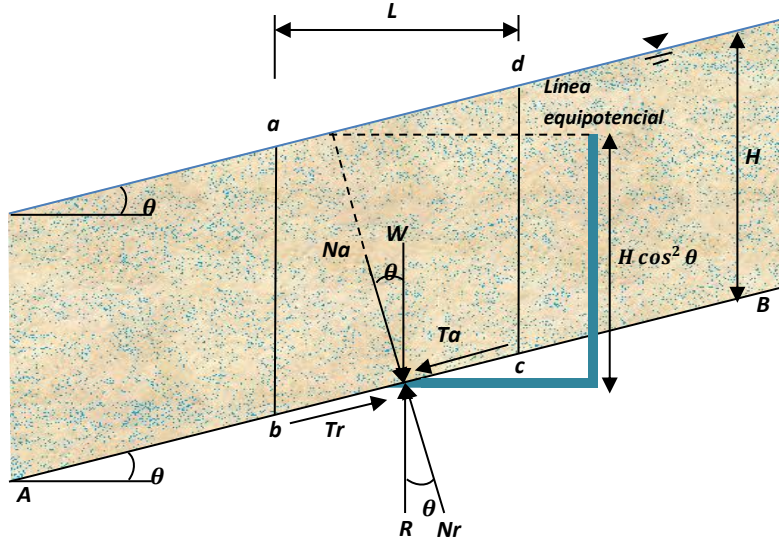


Figura B1. Análisis de talud infinito con infiltración

La resistencia cortante del suelo se da por la ecuación A.3 como: $\tau_d = c_d + \sigma' \tan \varphi_d$

Para determinar el factor de seguridad contra falla a lo largo del plano AB, se considera el elemento abcd del talud. Las fuerzas que actúan sobre las caras verticales ab y cd son iguales y opuestas. El peso total del elemento de talud de longitud unitaria es

$$W = \gamma_{sat} LH \quad (B.1)$$

Las componentes del peso en las direcciones normal y paralela al plano AB son:

$$Na = W \cos \theta = \gamma_{sat} LH \cos \theta \quad (B.2)$$

y

$$Ta = W \sin \theta = \gamma_{sat} LH \sin \theta \quad (B.3)$$

La reacción al peso W es igual a R. Entonces,

$$Nr = R \cos \theta = W \cos \theta = \gamma_{sat} LH \cos \theta \quad (B.4)$$

y

$$Tr = R \sin \theta = W \sin \theta = \gamma_{sat} LH \sin \theta \quad (B.5)$$

El esfuerzo normal total y el esfuerzo cortante en la base del elemento, respectivamente son:

$$\sigma' = \frac{Nr}{\text{área de la base}} = \frac{\gamma_{sat} Lh \cos \theta}{\left(\frac{L}{\cos \theta}\right)} = \gamma_{sat} H \cos^2 \theta \quad (B.6)$$

Y

$$\tau = \frac{Tr}{\text{área de la base}} = \frac{\gamma_{sat} Lh \sin \theta}{\left(\frac{L}{\cos \theta}\right)} = \gamma_{sat} H \cos \theta \sin \theta \quad (B.7)$$

El esfuerzo cortante resistente desarrollado en la base del elemento también se puede escribir como:

$$\tau_d = c_d + \sigma' \tan \varphi_d = c_d + (\sigma - P) \tan \varphi_d \quad (B.8)$$

Donde $P = \text{presión poros} = \gamma_w H \cos^2 \theta$, Sustituyendo en la ecuación B.6 y P en la ecuación B.8, se obtiene:

$$\tau_d = c_d + (\gamma_{sat} H \cos^2 \theta - \gamma_w H \cos^2 \theta) \tan \varphi_d = c_d + \gamma' H \cos^2 \theta \tan \varphi_d \quad (B.9)$$

Ahora, igualando las ecuaciones B.7 y B.9:

$$\gamma_{sat} H \cos \theta \sin \theta = c_d + \gamma' H \cos^2 \theta \tan \varphi_d \quad (B.10)$$

Donde γ' es el peso específico efectivo del suelo. Dividiendo la igualdad entre $\gamma_{sat} H \cos^2 \theta$:

$$\frac{\gamma_{sat} H \cos \theta \sin \theta}{\gamma_{sat} H \cos^2 \theta} = \frac{c_d}{\gamma_{sat} H \cos^2 \theta} + \frac{\gamma' H \cos^2 \theta \tan \varphi_d}{\gamma_{sat} H \cos^2 \theta} \quad (B.12)$$

$$\tan \theta = \frac{c_d}{\gamma_{sat} H \cos^2 \theta} + \frac{\gamma'}{\gamma_{sat}} \tan \varphi_d \quad (B.13)$$

El factor de seguridad con respecto a la resistencia se encuentra sustituyendo $\tan \varphi_d = (\tan \varphi)/FS$ y $c_d = c/FS$ en la ecuación B.13.

$$\tan \theta = \frac{c}{FS \gamma_{sat} H \cos^2 \theta} + \frac{\gamma'}{\gamma_{sat}} \frac{\tan \varphi}{FS} \quad (B.14)$$

$$\tan \theta = \frac{1}{FS} \left(\frac{c}{\gamma_{sat} H \cos^2 \theta} + \frac{\gamma'}{\gamma_{sat}} \tan \varphi \right) \quad (B.15)$$

$$FS = \frac{c}{\gamma_{sat} H \cos^2 \theta \tan \theta} + \frac{\gamma' \tan \varphi}{\gamma_{sat} \tan \theta} \quad (B.16)$$

Sin cohesión

$$FS = \frac{\gamma' \tan \varphi}{\gamma_{sat} \tan \theta} \quad (B.17)$$

Como $\gamma' = \gamma_{sat} - \gamma_f$:

$$FS = \frac{(\gamma_{sat} - \gamma_f) \tan \varphi}{\gamma_{sat} \tan \theta} \quad (B.18)$$

Otra forma de escribir la ecuación es:

$$FS = \frac{(\rho gH - P_{bed}) \tan \varphi}{\rho gH \tan \theta} \quad (B.19)$$

$$FS = \frac{(\rho gH - \rho_f gH) \tan \varphi}{\rho gH \tan \theta} \quad (B.20)$$

$$FS = \frac{(\rho - \rho_f) gH \tan \varphi}{\rho gH \tan \theta} \quad (B.21)$$

$$FS = \frac{(\rho - \rho_f) \tan \varphi}{\rho \tan \theta} \quad (B.22)$$

La ecuación B.19 se puede expresar en términos de la fracción de presión de poros si $P_{bed} = \lambda \rho g h$, y $\tan \varphi = \tan \varphi_{deb}$:

$$FS = \frac{(\rho gH - \lambda \rho gH) \tan \varphi_{deb}}{\rho gH \tan \theta} \quad (B.23)$$

$$FS = \frac{(1 - \lambda) \rho gH \tan \varphi_{deb}}{\rho gH \tan \theta} \quad (B.24)$$

$$FS = \frac{(1 - \lambda) \tan \varphi_{deb}}{\tan \theta} \quad (B.25)$$

BIBLIOGRAFÍA

- Bartle, R. G. & Sherbert, D. R., 1990. Introducción al análisis matemático de una variable. s.l.:Limusa.
- Baum, R. L., Savage, W. Z. & Wasowski, J., 2003. Mechanics of Earth Flows. Sorrento, Italy, s.n., pp. 1-8.
- Bear, J., 1972. Dynamics of fluids in porous media. New York: Dover Publications, Inc. New York.
- Bird, R. . B., Stewart, W. . E. & Lightfoot, E. . N., 2002. Transport phenomena. Segunda edición ed. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Boresi, A. P. & Schmidt, R. J., 2003. Advanced mechanics of material. Sixth edition ed. Laramie: John Wiley y Sons, Inc.
- Brennen, C. E., 2005. Fundamentals of multiphase flows. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Budynas, R. G., 1997. Advanced strength and applied stress analysis. primera ed. Rochester: McGraw-Hill, Inc.
- Cañizo, J. A., 2004. Derivación bajo la integral. [Arte] (Universidad Autonoma de Barcelona).
- Casadevall, T., 1991. National geophysical data center. [En línea] Available at: <http://www.ngdc.noaa.gov/hazardimages/picture/show/697> [Último acceso: 2 Marzo 2012].
- Cengel, Y. A. & Cimbala, J. M., 2006. Mecanica de fluidos fundamentos y aplicaciones. México D.F.: McGraw-Hill/Interamericana Editores S.A.
- Chow, V. T., Maidment, D. R. & Mays, L. W., 1994. Hidrología aplicada. Primera edición ed. Bogotá D.C.(Cundinamarca): McGraw-Hill Interamericana S.A.
- Cousot, P. & Meunier, M., 1996. Recognition, classification and mechanical description of debris flows. Earth-Science Reviews, Junio, 40(3-4), pp. 209-227.
- Crandall, S. H., Dahl, N. C. & Lardner, T. J., 1972. An introduction to the mechanics of solids. Second edition ed. Massachusetts: McGraw-Hill, Inc.
- Das, B. M., 2001. Fundamentos de Ingeniería y Geotécnica. México D.F.: Thomson Editores S.A.
- Denlinger, R. P. & Iverson, R. M., 2001. Flow of Variably Fluidized Granular Masses Across Three-Dimensional Terrain 2. Numerical Predictions and Experimental Test. Reviews of Geophysics, Volumen 106, pp. 553-566.
- Duarte, C. A. & Niño, J. R., 2001. Introducción a la mecánica de fluidos. Bogotá: Unidad de publicaciones de la Facultad de Ingeniería.

- Duque, J. G., 2009. Skyscrapercity. [En línea] Available at: <http://www.skyscrapercity.com/showthread.php?t=795426&page=5> [Último acceso: 3 Marzo 2012].
- Edwards, C. H. & Penney, D. E., 1996. Cálculo con geometría analítica. Cuarta ed. Naucaplan de Juárez: Prentice Hall Hispanoamericana, S.A.
- Ermini, L. & Casagli, N., 2003. Prediction of the behaviour of landslides dam using a geomorphological dimensionless index. Earth Surface Processes and Landforms, Enero, 28(1), pp. 31-47.
- Fox, R. W. & McDonald, A. T., 1995. Introducción a la mecánica de fluidos. Segunda edición ed. México D.F.: McGraw-Hill/Interamericana de México, S.A. de C.V.
- Gee, G. W. & Or, D., 2002. Particle size analysis. En: Methods of soil. Madison: Soil Science Society of America, p. 255-293.
- González, Á. J., 1999. Estimativos de parámetros efectivos de resistencia con el SPT. Bogotá, s.n., pp. 1-12.
- González, E., 2003. Aspectos geomecánicos de los deslizamientos rápidos: modelación y diseño de estructuras de contención. [Arte] (Universidad Politécnica de Madrid).
- Guillermo, A., 2020. Locker18. [En línea] Available at: <http://www.locker18.com/deslizamiento-de-tierra-sepulta-parte-de-una-autopista-de-taiwan/#more-3615> [Último acceso: 3 Marzo 2012].
- Hansen, A. G., 1971. Mecánica de fluidos. Primera edición ed. México D.F.: Editorial Limusa-Wiley, S.A.
- Harris, C., 2008. chris harris fotografer. [En línea] Available at: <http://www.chrisharris.com/newsletter/39/2008-oct.html> [Último acceso: 2 Marzo 2012].
- Hauke, G., 2008. An introduction to fluid mechanics and transport phenomena. Zaragoza: Springer Science+Business Media, B.V.
- Hayward, J., 2008. CBC news. [En línea] Available at: <http://www.cbc.ca/news/canada/british-columbia/story/2008/07/30/bc-highway-rockslide-whistler.html> [Último acceso: 2 Marzo 2012].
- Holton, J. R., 1992. An introduction to dynamic meteorology. Tercera ed. Washington: Academic Press, Inc.
- Hutchinson, J. N., 1986. A sliding-consolidation model for flow slides. Canadian Geotechnical Journal, Mayo, 23(2), p. 115–126.

- IDEAM, 2012. Instituto de hidrología, meteorología y estudios ambientales. [En línea] Available at: <http://www.pronosticosyalertas.gov.co/jsp/loader.jsf?lServicio=Publicaciones&lTipo=publicaciones&lFuncion=loadContenidoPublicacion&id=895> [Último acceso: 7 Marzo 2012].
- Instituto Geofísico Universidad Javeriana, 2002. Microzonificación sísmica del campus de la Pontificia Universidad Javeriana sede Bogotá-Colombia, Bogotá: Javegraf.
- Iverson, R. M., 1997. *The physics of debris flows*. Reviews of Geophysics, August, 35(3), pp. 245-296.
- Iverson, R. M., 2005. *Debris-flow mechanics*. En: Debris-flow hazards and related phenomena. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, pp. 105-134.
- Iverson, R. M. & Denlinger, R. P., 2001a. *Flow of variably fluidized granular masses across three-dimensional terrain 1. Coulomb mixture theory*. Journal of Geophysical Research, 10 January, 106(B1), pp. 537-552.
- Iverson, R. M. & Denlinger, R. P., 2001b. *Mechanics of debris flows and debris laden flash floods*. Reno, s.n., pp. 1-8.
- Iverson, R. M. & LaHusen, R. G., 1989. *Dynamic pore-pressure fluctuations in rapidly shearing granular materials*. Science, 10 Noviembre, Volumen 246, pp. 796-799.
- Jha, S. K. & Bombardelli, F. A., 2010. *Toward two-phase flow modeling of nondilute sediment transport*. Journal of Geophysical Research, 4 Agosto, 115(F3), pp. 1-28.
- Ji, Z.-G., 2008. *Hydrodynamics and water quality: modeling rivers, lakes and estuaries*. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.
- Kolecki, J. C., 2002. *An introduction to tensors for students of physics and engineering*. s.l. Patente nº NASA/TM-2002-211716.
- Liggett, J. A., 1994. *Fluid mechanics*. New York: McGraw-Hill, Inc.
- Mironer, A., 1979. *Engineering fluid mechanics*. New York: McGraw-Hill Book Company.
- Montserrat, S., Tamburrino, A. & Niño, Y., 2005. *Estudio experimental de la presencia de barreras en flujos detríticos*. Ingeniería del Agua, Septiembre, 12(3), pp. 1-14.
- Mott, R., 1996a. *Mecánica de fluidos aplicada*. Cuarta edición ed. México: Pearson Educación.
- Mott, R. L., 1996b. *Resistencia de materiales aplicada*. Tercera edición ed. México: Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A.
- Natural Resources Canada, 2007. Natural Resources Canada. [En línea] Available at: <http://atlas.nrcan.gc.ca/site/english/maps/environment/naturalhazards/landslides/1> [Último acceso: 3 Marzo 2012].

- Oertel, H., 2001. Introduction to fluid mechanics fundamentals and applications. *karlsruhe: Universitätsverlag karlsruhe.*
- Pedraza, A. F., 2012. Colombia en imágenes. [En línea] Available at: <http://colombiaenimagenes.blog.terra.com.co/tag/represa-de-betania/> [Último acceso: 2 Marzo 2009].
- Perálvarez, J. d., Chacón, J., El Hamdouni, J. & Irigaray, C., 2008. Análisis de susceptibilidad a los movimientos de ladera mediante un SIG en la cuenca vertiente al embalse de Rules, Granada. *Madrid, s.n., pp. 15-27.*
- Petley, D., 2009. The land slide blog. [En línea] Available at: <http://www.landslideblog.org/2009/09/small-collection-of-interesting.html> [Último acceso: 1 Marzo 2012].
- Prochaska, A. B., Santi, P. M. & Higgins, J. D., 2008. Relationships Between Size and Velocity for Particle Within Debris flows. *Canadian Geotechnical Journal, Diciembre, 45(12), pp. 1778-1783.*
- Pudasaini, S. P., Wang, Y. & Hutter, K., 2005. Modelling Debris Flows Down General Channels. *Natural Hazards and Earth System Sciences, 26 Octubre, Volumen 5, pp. 799-819.*
- Purcell, E. J., Varberg, D. & Rigdon, S. E., 2007. Calculo diferencial e integral. Novena edición ed. *Naucaplan de Juárez: Pearson Educación.*
- Quan Luna, B. y otros, 2011. The application of numerical debris flow modelling for the generation of physical vulnerability curves. *Natural Hazards and Earth System Science, 25 Julio, 11(7), pp. 2047-2060.*
- Quan Luna, B. y otros, 2012. Analysis of Debris Flows Behavior with a one Dimensional run-out Model Incorporating Entrainment. *Engineering Geology, 9 Marzo, Volumen 128, pp. 63-75.*
- Rickenmann, D., 1999. Empirical relationships for debris flows. *Natural Hazards, 2 Febrero, Volumen 19, pp. 47-77.*
- Rickenmann, D., Laigle, D. M. B. W. & Hübl, J., 2006. Comparison of 2D Debris-Flow Simulation Models with Field Events. *Computational Geosciences, Marzo, 10(2), pp. 241-264.*
- Rodríguez, J. V., 2009. Sabor estereo. [En línea] Available at: <http://sabor-stereo.blogspot.com/2009/07/creciente-del-caudal-del-rio-suaza-en.html> [Último acceso: 2 Marzo 2012].
- Rubin, H. & Atkinson, J., 2001. Environmental fluid mechanics. *New York: Marcel Dekker, Inc.*
- Savage, S. B., 1984. The mechanics of rapid granular flows. *Adv. Appl. Mech, p. 289–366.*
- Savage, S. B. & Hutter, K., 1989. The motion of a finite mass of granular material down a rough incline. *Journal of Fluid Mechanics, Volumen 199, pp. 177-215.*

- Shrestha, B. B., Nakagawa, H., Kawaike, K. & Baba, Y., 2008. Numerical simulation on debris-flow deposition and erosion processes upstream of a check dam with experimental verification. *Annual of Disas. Prev. Res. Inst., Issue 51 B*, pp. 613-623.
- Spalletti, L., Brea, J. D., Hopwood, H. J. & Spalletti, P., 2005. Conceptos y aplicaciones sobre flujos densos en la hidráulica de ríos. *Ingeniería del agua*, 12(3), pp. 189-200.
- Spiegel, M. R., 1963. Theory and problems of advanced calculus. *Primera ed.* New York: McGraw Hill.
- Spivak, M., 2008. Calculus. *Cuarta ed.* Houston(Texas): Publish or Perish, Inc.
- Streeter, V. L., Wylie, E. B. & Bedford, K. W., 2000. Mecánica de fluidos. *Novena edición ed.* Bogotá D.C.(Cundinamarca): McGraw-Hill Interamericana, S.A.
- Suarez, J., 1998. Deslizamientos y estabilidad de taludes en zonas tropicales. *Bucaramanga(Santander): Universidad Industrial de Santander.*
- Tan, W., 1992. Shallow water hydrodynamics: mathematical theory and numerical solution for a two dimensional systems of shallow water equations. *Hong Kong: Beijing.*
- Uoane, T. R., 2011. Lattice Boltzmann methods for shallow water flow applications. [Arte] (University of the Witwatersrand).
- Vargas, J. E., 2002. Políticas públicas para la reducción de la vulnerabilidad frente a los desastres naturales y socio-naturales. *Santiago de Chile: Publicación de las Naciones Unidas.*
- Vargas, M. L., 2009. Geología ambiental. [En línea] Available at: <http://mayrambiental.es.tl/FEN%D3MENOS-DE-REMOCI%D3N-EN-MASA.htm#> [Último acceso: 2 Marzo 2012].
- Vargas, R. A., 2000. Seminario estudios de riesgos por fenómenos de remoción en masa. Bogotá D.C.(Cundinamarca): Dirección de Prevención y Atención de Emergencias de Santa Fe De Bogotá.
- Villacorta, S. y otros, 2007. Análisis de la susceptibilidad a los movimientos de ladera en la cuenca del río Llaminchán (Cajamarca, Perú). *Revista del Instituto de Investigaciones FIGMMG*, 10(19), pp. 103-112.
- Vreugdenhil, C. B., 1994. Numerical methods for shallow-water flow. *Boston: Kluwer Academic Publishers.*
- Wang, C., Li, S. & Esaki, T., 2008. GIS-Based Two-Dimensional Numerical Simulation of Rainfall-Induced Debris Flow. *Natural Hazards and Earth System Sciences*, 4 Febrero , Volumen 8, pp. 47-58.

Weisstein, E. W., 2012. Wolfram mathworld. [En línea]
Available at: <http://mathworld.wolfram.com/LeibnizIntegralRule.html>
[Último acceso: 28 Marzo 2012].

White, F. M., 2004. Mecánica de fluidos. Quinta edición ed. Madrid: McGraw-Hill/Interamericana de España, S.A.U.

Wu, W., 2008. Computational river dynamics. Mississippi: Taylor & Francis Group, London, UK.

Young, H. D. & Freedman, R. A., 2008. University physics with modern physics. 12th Edition ed. New York: Addison Wesley.

Zemansky, M. W. & Dittmann, R. H., 1986. Calor y termodinámica. Sexta ed. Naucalpan de Juárez: McGraw-Hill, Inc..