



## Editores

Ricardo A. Cruz Hernández

Jorge Villamizar Morales

Giovanni E. Calderón Silva

Julio C. Carrillo Escobar

## Revisión

Julio C. Carrillo Escobar

Mónica Plata Villamizar

Harlinzon Sanabria Corzo

Universidad Industrial de Santander  
Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas

Facultad de Ciencias

Agosto de 2018



# COMITÉ ORGANIZADOR

Ricardo A. Cruz Hernández

**Decano Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas (2013 - 2017), Universidad Industrial de Santander**  
**Presidente del XI Congreso Colombiano de Métodos Numéricos**

Johann F. Petit Suárez

**Decano Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas (2017 - Actual), Universidad Industrial de Santander**

David A. Miranda Mercado

**Decano Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander**

Carlos Borrás Pinilla

**Profesor, Universidad Industrial de Santander**

Julio C. Carrillo Escobar

**Profesor, Universidad Industrial de Santander**

Jorge Villamizar Morales

**Profesor, Universidad Industrial de Santander**

Giovanni E. Calderón Silva

**Profesor, Universidad Industrial de Santander**

Julián E. Jaramillo Ibarra

**Profesor, Universidad Industrial de Santander**

Carlos J. Barrios Hernández

**Profesor, Universidad Industrial de Santander**

Guillermo Latorre Cortes

**Profesor, Universidad Industrial de Santander**

Jesús D. Villalba

**Profesor, Pontificia Universidad Javeriana**

Mónica Plata Villamizar

**Ingeniera Industrial, Universidad Industrial de Santander**

ISBN: 978-958-48-5477-3

Título: Métodos numéricos y sus aplicaciones

Autor-Editor: Cruz Hernández, Ricardo Alfredo

Materia: Ingeniería y operaciones a fines

Publicado: 2018-12-18

N° Edición: 1

Idioma: Español

Formato: PDF

# COMITÉ CIENTÍFICO

Abraham U. Zapata Múnera, Universidad EAFIT, Colombia.  
Alfredo Roa Narváez, Universidad de la Costa CUC, Colombia.  
Andrés L. González Mancera, Universidad de los Andes, Colombia.  
Carlos Borrás Pinilla, Profesor, Universidad Industrial de Santander.  
Carlos E. Mejía Salazar, Universidad Nacional de Colombia.  
Carlos F. Torres, Universidad de los Andes, Venezuela.  
Carlos J. Barrios Hernández, Profesor, Universidad Industrial de Santander.  
Carlos M. Piscal Arévalo, Universidad de La Salle, Colombia.  
Carlos R. Correa Cely, Universidad Industrial de Santander, Colombia.  
Carolina Quintero Ramírez, Universidad de Sao Paulo, Brasil.  
Claudio Careglio, Universidad Nacional de Cuyo, Argentina.  
Diego A. Garzón Alvarado, Universidad Nacional de Colombia.  
Edson Denner Leonel, Universidad de Sao Paulo, Brasil.  
Eduardo A. Orozco Ospino, Universidad Industrial de Santander, Colombia.  
Edwin A. Garavito Hernández, Universidad Industrial de Santander, Colombia.  
Edwin R. Villanueva Talavera, Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú.  
Efraín A. Domínguez Calle, Pontificia Universidad Javeriana, Colombia.  
Elder J. Villamizar Roa, Universidad Industrial de Santander, Colombia.  
Elkim F. Roa Díaz, Universidad Industrial de Santander, Colombia.  
Enrique Mejía Ospino, Universidad Industrial de Santander, Colombia.  
Fabián A. Lamus Báez, Pontificia Universidad Javeriana, Colombia.  
Fernando Ramírez Rodríguez, Universidad de los Andes, Colombia.  
Francisco Correa Zabala, Universidad EAFIT, Colombia.  
Gabriel Ordóñez Plata, Universidad Industrial de Santander, Colombia.  
Gabriel R. Pedraza Ferreira, Universidad Industrial de Santander, Colombia.  
Gerard Olivar Tost, Universidad Nacional de Colombia.  
Giovanni E. Calderón Silva, Universidad Industrial de Santander, Colombia.  
Heller G. Sánchez Acevedo, Universidad Industrial de Santander, Colombia.  
Henry Argüello Fuentes, Universidad Industrial de Santander, Colombia.  
Herbert Martins Gomes, Universidade Federal Do Rio Grande Do Sul, Brasil.  
Hugo H. Andrade Sosa, Universidad Industrial de Santander, Colombia.  
Jairo F. Useche Vivero, Universidad Tecnológica de Bolívar, Colombia.  
Javier Arias Osorio, Universidad Industrial de Santander, Colombia.  
Javier Rugeles Perez, Universidad Industrial de Santander, Colombia.  
Jessica G. Maradey Lazaro, Universidad Autónoma de Bucaramanga, Colombia.

Jesús A. García Sánchez, Universidad Federal de Itajubá, Brasil.  
Jesús D. Villalba Morales, Pontificia Universidad Javeriana, Colombia.  
Johan M. Redondo Ortégón, Universidad Nacional de Colombia.  
John F. Archila Díaz, Universidad Industrial de Santander, Colombia.  
Jorge A. Escobar Vargas, Pontificia Universidad Javeriana, Colombia.  
Jorge L. Palomino Tamayo, Universidade Federal Do Rio Grande Do Sul, Brasil.  
Jorge Villamizar Morales, Universidad Industrial de Santander, Colombia.  
José D. Muñoz Castaño, Universidad Nacional de Colombia.  
Jose D. Sanabria Gómez, Universidad Industrial de Santander, Colombia.  
José E. Laier, Universidad de Sao Paulo, Brasil.  
Juan D. Gómez Cataño, Universidad EAFIT, Colombia.  
Juan M. Mantilla González, Universidad Nacional de Colombia.  
Juan P. Casas Rodríguez, Universidad de los Andes, Colombia.  
Julián E. Jaramillo Ibarra, Universidad Industrial de Santander, Colombia.  
Julián G. Rodríguez Ferreira, Universidad Industrial de Santander, Colombia.  
Luis A. Nuñez de Villavicencio Martínez, Universidad Industrial de Santander, Colombia.  
Luis E. Zapata Orduz, Universidad Industrial de Santander, Colombia.  
Luis F. Prada Sarmiento, Pontificia Universidad Javeriana, Colombia.  
Marcelo Rubén Pagnola, INTECIN (Universidad de Buenos Aires - CONICET), Argentina.  
María E. Ascheri, Universidad Nacional de la Pampa, Argentina.  
María F. Maradei García, Universidad Industrial de Santander, Colombia.  
Miguel Abambres, Universidade de Coimbra, Portugal.  
Octavio A. González Estrada, Universidad Industrial de Santander, Colombia.  
Olga Vasileva, Universidad del Valle, Colombia.  
Omar D. López Mejía, Universidad de los Andes, Colombia.  
Oscar J. Begambre Carrillo, Universidad Industrial de Santander, Colombia.  
Patricia Ciano, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Argentina.  
Patricia Gómez Palacio, Universidad EAFIT, Colombia.  
Pedro. J. Díaz Guerrero, Universidad Industrial de Santander, Colombia.  
Ricardo A. Cruz Hernández, Universidad Industrial de Santander, Colombia.  
Rita G. Toscano, Compañía SIM&TEC, Argentina.  
Rodolfo Gallo Fonseca, Universidad de los Andes, Venezuela.  
Rodolfo Villamizar Mejía, Universidad Industrial de Santander, Colombia.  
Rodrigo Ribeiro Paccola, Universidad de Sao Paulo, Brasil.  
Rolando E. Guzmán Gómez, Universidad Pontificia Bolivariana, Colombia.  
Sergio A. Villalba Morales, Universidad Federal de Alfenas, Brasil.  
Soledad Espezuza, Universidade de Sao Paulo, Brasil.  
Tulia E. Rivera Flórez, Universidad Industrial de Santander, Colombia.  
Vladimir E. Merchán Jaimés, Universidad Industrial de Santander, Colombia.  
Whady F. Flórez Escobar, Universidad Pontificia Bolivariana, Colombia.  
Wilson Rodríguez Calderón, Universidade Federal Do Rio Grande Do Sul, Brasil.  
Yunguang Lu, Universidad Industrial de Santander, Colombia.

## CONFERENCISTAS

**Junuthula. N. Reddy** Texas A & M University, EE. UU.

La **autoridad** de la **mecánica aplicada**

El Dr. Reddy, es conocido a nivel mundial por sus significativas contribuciones en el análisis de elementos finitos, métodos variacionales, mecánica continua y análisis funcional aplicado.



**Enrique Zuazua** Universidad Autónoma de Madrid, España

El **embajador** de las **matemáticas**

Su actividad científica se enmarca en el área de Matemática Aplicada, con importantes contribuciones en ecuaciones en derivadas parciales, control de sistemas, análisis numérico, y aplicaciones a la modelización, simulación, diseño y control de diversos fenómenos naturales y procesos industriales.



**Carlos Castillo** Arizona State University, EE. UU.

El **erudito** de la **matemática aplicada** en las **Ciencias Naturales y Sociales**

Su investigación se centra en las matemáticas y ciencias naturales, con énfasis en propagación de enfermedades, interacción entre portador y evolución de enfermedades, y el impacto de los cambios de comportamiento humano y los factores epidemiológicos en las estructuras sociales.



**José E. Castillo** San Diego State University, EE. UU.

El **investigador** más influyente de la **matemática computacional**

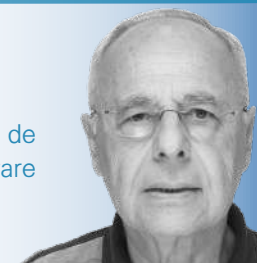
Su investigación en métodos de discretización mimética se han aplicado a problemas en la exploración petrolífera, modelización oceánica y filtración de carbono. Sus intereses también abarcan las matemáticas aplicadas con énfasis en la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales, computación científica y modelización.



**Victor Pereyra** Stanford University, EE. UU.

El **científico experto** en **recursos energéticos y geofísica**

Sus estudios destacan soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales con condiciones de frontera, trazado de rayos sísmicos en cuencas sedimentarias, así como el desarrollo de software para la solución de problemas con interfaces discontinuas y parámetros algebraicos.



**Isidoro Gitler** Centro de Investigación y Estudios Avanzados CINVESTAV, México

El **científico más destacado** en **matemáticas discretas**

Ha sido investigador principal y co-responsable en distintos proyectos de Conacyt así como de otros proyectos científicos y educativos. Fue miembro fundador del International Workshop on Combinatorial and Computational Aspects of Optimization, Topology and Algebra (ACCOTA).





## PREFACIO

La Facultad de Ingenierías Físico-Mecánicas y la Facultad de Ciencias de la Universidad Industrial de Santander tienen el honor de presentar las memorias con los trabajos científicos sustentados durante el XI Congreso Colombiano de Métodos Numéricos 2017, evento que se desarrolló del 16 al 18 de agosto de 2017 en la Universidad Industrial de Santander, en el campus de la sede Bucaramanga.

Este XI CCMN, con su slogan *Simulación en Ciencias y Aplicaciones Industriales*, se diseñó con el propósito de presentar y socializar los avances en materia de investigación sobre el estado del arte, desarrollo y aplicación de los métodos numéricos bajo los siguientes ejes temáticos: Modelado matemático, Optimización HPC y programación en paralelo, Evolución y desarrollo de los métodos numéricos (Análisis numérico, Técnicas adaptativas en métodos numéricos, Estimaciones de error, Métodos de simulación), Aplicaciones de los métodos numéricos a la mecánica de sólidos, materiales y estructuras, Sistemas dinámicos y control, Bioingeniería, Fenómenos de transporte, Electromagnetismo y electrónica, Economía y finanzas, Física clásica y cuántica y Problemas y aplicaciones industriales

Durante el Congreso, el Comité Organizador ofreció los siguientes cursos: Métodos de discretización mimética dictado por el profesor José Castillo, la Ecuación de Ondas en Geofísica por el profesor Victor Pereyra, Control y Simulación Numérica- Avances recientes y desafíos por el profesor Enrique Zuazua y Nonlinear Finite Element Analysis por el profesor J.N. Reddy, a quienes expresamos nuestro agradecimiento por su apoyo, respaldo y participación en este evento. La programación incluyó la presentación de ponencias y pósteres de investigadores y estudiantes de diferentes partes del país y del exterior.

Así mismo, expresamos nuestro agradecimiento al Comité Organizador y al Comité Científico. Sin su incasable trabajo no hubiese sido posible la evaluación de algo más de 180 resúmenes y trabajos en extenso. Igualmente, especial agradecimiento a las empresas que patrocinaron nuestro congreso y a todos los voluntarios (estudiantes de la UIS) que asumieron el reto de colaborar por el buen desarrollo del Congreso. Finalmente nuestro reconocimiento a la profesional Mónica Plata Villamizar, coordinadora de la organización, por su invaluable dedicación y compromiso, y al profesional Harlinzon Sanabria, diseñador de nuestros logos, página web, folletos, etc.

RICARDO ALFREDO CRUZ HERNANDEZ  
Presidente del Comité Organizador





Con el apoyo de:



Super Computación y  
Cálculo Científico UIS



Consejo Profesional  
Nacional de Ingenierías  
Eléctrica, Mecánica  
y Profesiones Afines



Vicerrectoría Administrativa  
Vicerrectoría de Investigación y Extensión  
Bienestar Universitario  
Escuela de Ingeniería Civil  
Escuela de Ingeniería Mecánica  
Escuela de Matemáticas

Organizó:



Universidad Industrial de Santander  
Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas  
Facultad de Ciencias  
Cra. 27 - Calle 9, Ciudad Universitaria  
E-mail: ccmn2017@saber.uis.edu.co  
Bucaramanga, Colombia



## TABLA DE CONTENIDOS

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>PONENCIAS EN EXTENSO</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 1   |
| <b>Diseño de un área de almacenamiento óptima para un almacén de operación manual bajo estrategia</b><br>David E. Puentes, Edwin A. Garavito .....                                                                                                                                                                                                                                                              | 3   |
| <b>Portfolio Optimization Through Finite Elements and Kusuoka's Representation</b><br>Y. Herrera, W. González, J. Solano, R. Restrepo.....                                                                                                                                                                                                                                                                      | 11  |
| <b>Simulación del rotor de un cuadricóptero en hover utilizando el método de red de vórtices no-estacionario</b><br>A. Pérez, O. López, J. Escobar, S. Preidikman .....                                                                                                                                                                                                                                         | 19  |
| <b>Methods for Treating Damage in Composite Materials, an Application to Pipes</b><br>J. León, A. González, A. Pertuz .....                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 29  |
| <b>Subsurface Reflector Map Via Compress Sensing</b><br>Miguel A. Dumett .....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 35  |
| <b>Metodología de análisis de mecanismos y uso de software para su implementación</b><br>Edgar A. Torre, Jerisson X. León, María L. Pinto .....                                                                                                                                                                                                                                                                 | 41  |
| <b>Mimetic Discretization of the Eikonal Equation with Sonar Boundary Conditions</b><br>Miguel A. Dumett, Jorge E. Ospino .....                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 51  |
| <b>Numerical Simulation Through the Discrete Element Method (DEM) and the Finite Volume Method (FVM) of the Crushing and Filtering Processes for the Production of Vegetable Extracts by the Matrix Solid-Phase Dispersion (MSPD)</b><br>Elena Stashenko, Omar Armando Gelvez Arocha, Jairo René Martínez Morales,<br>Diego Camilo Durán García, Juan David Argüello Plata, Óscar Alfonso Gómez Sepúlveda ..... | 57  |
| <b>Avances en la implementación de métodos espectrales para fluidos no Newtonianos</b><br>Mario G. Trujillo, Jorge A. Escobar, Alfonso M. Ramos .....                                                                                                                                                                                                                                                           | 69  |
| <b>Implementación y estudio de un algoritmo con refinamiento de malla fijo (FMR) para ecuaciones diferenciales parciales (EDP) hiperbólicas en 1D</b><br>Yuber Galeano, Anamaria. Navarro, Fabio Lora .....                                                                                                                                                                                                     | 77  |
| <b>Formalización de modelos numéricos, modelos y sistemas a través de un análisis semántico aplicado a la mecánica de fluidos computacional</b><br>Joseph J. Moore, Jorge A. Escobar .....                                                                                                                                                                                                                      | 85  |
| <b>Comparación de métodos discontinuos de alto orden en el contexto de la ecuación unidimensional de Burger</b><br>N. Reyes, B.P. Rengifo, D.R. Suarez, J.A. Escobar .....                                                                                                                                                                                                                                      | 91  |
| <b>Evaluación paramétrica de vigas perforadas con rigidizadores sujetos a cargas cortantes</b><br>Nelson Loaiza, Alejandro Jaramillo, Carlos Graciano, Euro Casanova .....                                                                                                                                                                                                                                      | 107 |
| <b>Metodología para la detección de fallos en estructuras metálicas tipo offshore usando vibraciones mecánicas</b><br>E.A. Osorio, J.R. Tarazona, H.G. Sánchez .....                                                                                                                                                                                                                                            | 113 |
| <b>Simulación de un sistema de aislamiento de vibraciones usando un modelo de dos grados de libertad</b><br>Manuel Guzmán, Ricardo Moreno, y Diego Giraldo .....                                                                                                                                                                                                                                                | 123 |
| <b>Evaluación de modelos computacionales en CFD para la predicción del comportamiento del viento alrededor de edificios</b><br>Carlos G. Ramírez R., Andrés L. González M .....                                                                                                                                                                                                                                 | 142 |

|                                                                                                                                                       |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Respuesta estructural en puentes sometidos a carga móvil, usando el método de los elementos finitos y representación en espacio de estados</b>     |     |
| Erik Fabián Becerra Rivera, Carlos Borrás Pinilla, Gustavo Chio Cho .....                                                                             | 155 |
| <b>Ubicación de la trayectoria de fisura en el concreto mediante un modelo bidimensional simplificado de elementos finitos</b>                        |     |
| J. Ochoa-Avenidaño, D.A. Garzón-Alvarado, D.L. Linero .....                                                                                           | 169 |
| <b>The Behavior of Eigenvalues in Impact Problems Related to Stability of Algorithms in Nonlinear Dynamics</b>                                        |     |
| J.A.G. Sánchez .....                                                                                                                                  | 175 |
| <b>Análisis de fisuras en una viga a partir de las curvaturas de la deflexión y la forma modal</b>                                                    |     |
| Rubén Darío Forero Carrillo .....                                                                                                                     | 187 |
| <b>Implementación de un modelo bidimensional de una turbina hidráulica Darrieus en OpenFoam</b>                                                       |     |
| N. Vargas, O. Lopez, S. Lain .....                                                                                                                    | 199 |
| <b>Diseño y análisis hidráulico de una turbina de flujo cruzado para generación de energía eléctrica a pequeña escala</b>                             |     |
| L. Velásquez, E. Chica, S. Agudelo, W. Enriquez .....                                                                                                 | 209 |
| <b>Modelado de la interacción fluido estructura (FSI) para el diseño de una turbina eólica Hawt</b>                                                   |     |
| K. Molina, D. Ortega, M. Martínez, O. González-Estrada .....                                                                                          | 219 |
| <b>Diseño y simulación de una turbina hidrocínética de flujo cruzado tipo H-Darrieus para picogeneración</b>                                          |     |
| D. Ramirez, E. Chica .....                                                                                                                            | 233 |
| <b>Diseño y simulación del rotor de una turbina hidrocínética de eje horizontal con aspa multi-elemento</b>                                           |     |
| J. Aguilar, E. Chica .....                                                                                                                            | 241 |
| <b>Incidencia del perfil aerodinámico del álabe en la eficiencia de una turbina de flujo cruzado tipo Michell Banki</b>                               |     |
| Yhon L. Castañeda, Jorge A. Sierra, Adrián M. Pérez .....                                                                                             | 249 |
| <b>Rehabilitación sísmica de estructuras aporricadas de concreto reforzado: Una estrategia para la localización óptima de amortiguadores viscosos</b> |     |
| J.D. Villalba, O.J. Begambre, J.J. Marín, J.R. Galvis .....                                                                                           | 259 |
| <b>Modelo para el control de inundaciones utilizando dos Embalses en Paralelo</b>                                                                     |     |
| Rafael E. Fragozo D, Víctor H. Bedoya R., Jesús M. López L. ....                                                                                      | 271 |
| <b>Sistematización del diseño de los motores de combustión interna</b>                                                                                |     |
| Edison Heano, Carlos Romero, Héctor Quintero .....                                                                                                    | 279 |
| <b>Modelado numérico para flujos en un medio poroso homogéneo</b>                                                                                     |     |
| M. Duran, J. Páez, P. García .....                                                                                                                    | 291 |
| <b>Calibración de un modelo CFD para estudiar las propiedades hidrodinámicas en un tanque de mezcla mecánica</b>                                      |     |
| Angélica Salgado Ramos, Andrés Gómez-Giraldo .....                                                                                                    | 297 |
| <b>Diseño de quemador para llama laminar premezclada, difusiva en coflujo y en contraflujo usando CFD</b>                                             |     |
| Diego F. Cortés, Juan M. Mantilla .....                                                                                                               | 307 |
| <b>Identificación de las condiciones óptimas de separación de fluidos no miscibles en microhidrosistemas mediante simulación numérica</b>             |     |
| J. Chavarro, E. González, J. Escobar, N. Obregón .....                                                                                                | 321 |
| <b>Cuantificación de las propiedades mecánicas y coeficiente de fricción de la piel humana en contacto con polipropileno</b>                          |     |
| Juan Diosa, Ricardo Moreno, Edwin Chica, Junes Villarraga .....                                                                                       | 335 |
| <b>Corrección en las mediciones de los sensores del horno H-201 por medio de reconciliación de datos</b>                                              |     |
| A. Cáceres, G. Morales .....                                                                                                                          | 345 |
| <b>Predicción de formación de gotas de condensado de gas natural mediante simulación por Monte Carlo</b>                                              |     |
| J. Fuentes, A. Chaves, G. Moreno .....                                                                                                                | 357 |

|                                                                                                                                                                     |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Modelos no lineales con soluciones caóticas de variables dinámicas de celdas de combustible</b>                                                                  |     |
| J.L. Cruz, R.M. Gutiérrez, A.I. Hernández .....                                                                                                                     | 369 |
| <b>Modelado de un actuador de potencia tipo Langevin usando un elemento finito piezoeléctrico unidimensional</b>                                                    |     |
| Lemos D. Alberto, Franco G. Ediguer E. ....                                                                                                                         | 377 |
| <b>Predicción de zonas de esfuerzos críticos en bombas centrífugas por efecto de cavitación, empleando la técnica de interacción fluido-estructura (FSI)</b>        |     |
| Felipe Romero Consuegra, Eduardo Gomez, Gustavo Valle Tamayo, Juan Daniel Esteban Rincón .....                                                                      | 387 |
| <b>Modelado numérico de flujo en canales cruzados con intercambio de calor al ambiente</b>                                                                          |     |
| William S. Jaimes, David A. Fuentes .....                                                                                                                           | 395 |
| <b>Construcción numérico-matemática del fenómeno de difusión de fármacos liberados por el torrente sanguíneo</b>                                                    |     |
| S. Aristizábal, G. Suárez, J. Bustamante, R. Valencia .....                                                                                                         | 407 |
| <b>Modelo dinámico y diseño de estrategias de control para un actuador no lineal hidráulico</b>                                                                     |     |
| Carlos Borrás Pinilla, José L. Sarmiento, Juan F. Ortiz .....                                                                                                       | 411 |
| <b>Convolución fraccionaria como una herramienta de modelado y filtrado de trazas sísmicas</b>                                                                      |     |
| Daniel D. Torres, Rafael A. Torres .....                                                                                                                            | 421 |
| <b>Simulation of Surface Seismic Waves Propagation by 2D Finite-Difference Elastic Wave Modeling in the Presence of Complex Surface Topography</b>                  |     |
| Iván Sánchez, Daniel Sierra, César Duarte, William Agudelo .....                                                                                                    | 429 |
| <b>Análisis aerodinámico de un rotor eólico de eje horizontal basado en un diseño biomimético por medio de OpenFoam</b>                                             |     |
| Jorge E. Gaitán Aroca, Fabio E. Sierra Vargas, Diana P. Meneses Salazar .....                                                                                       | 441 |
| <b>Evaluación de SU2 y OpenFOAM mediante dos casos de verificación</b>                                                                                              |     |
| Carlos F. Urrego, Luis D. Bedoya, A. Matiz-Chicacausa, Jaime A. Escobar .....                                                                                       | 455 |
| <b>¿Cómo la función de reajuste de Nash genera equilibrio(s) en juegos estratégicos finitos?</b>                                                                    |     |
| Solón E. Losada H., Néstor O. Forero y Carlos Ruiz P. ....                                                                                                          | 465 |
| <b>Three-dimensional Model of Contracting Skeletal Muscle: Passive Tissue and Fibers</b>                                                                            |     |
| C.Q. Ramírez, R.R. Paccola, H.B. Coda .....                                                                                                                         | 475 |
| <b>Simulation of the Human Swallowing Process from the Geometry of a Healthy Adult</b>                                                                              |     |
| N. Ramírez, J. Ladino, F. Casanova, N. Hermant .....                                                                                                                | 483 |
| <b>Construcción de biomodelos y caracterización hemodinámica de arterias carótidas sin y con aneurismas, mediante ingeniería inversa y simulación computacional</b> |     |
| Sebastián Torres M, Raúl A. Valencia, Miguel Bernal Ry John Bustamante Osorno .....                                                                                 | 491 |
| <b>Métodos numéricos aplicados a la biomecánica de la columna vertebral</b>                                                                                         |     |
| Jairo Enrique Contreras Blanco .....                                                                                                                                | 503 |
| <b>Aplicación de MATLAB en la industria: Modelado cinético del proceso de oxidación avanzada UV/H<sub>2</sub>O<sub>2</sub></b>                                      |     |
| A. Rubio-Clemente, E. Chica, y G.A. Peñuela .....                                                                                                                   | 511 |
| <b>Balances macroscópicos y poblacionales para describir la dinámica de sitios activos de un catalizador sólido durante una reacción química</b>                    |     |
| C. Cruz-Cardona, D. Barragán .....                                                                                                                                  | 519 |
| <b>Nuevos estudios para el cálculo de la reactividad</b>                                                                                                            |     |
| Emilse Cabrera Capera, Daniel Suescún Díaz y Natalia Rodríguez Narváez .....                                                                                        | 527 |
| <b>Simulación numérica de la combustión en hornos usando mezclas de gases con poder calorífico variable</b>                                                         |     |
| Sergio A. Morales, Daniel R. Barragán, V. Kafarov .....                                                                                                             | 533 |
| <b>Análisis de la racionalidad en los mercados bursátiles a partir de sesgos conductuales, un estudio comparativo entre Colombia, Estados Unidos y España</b>       |     |
| Jose A. Caballero M., Juan B. Duarte D., Katherine J. Sierra .....                                                                                                  | 539 |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Modelo de simulación basado en métodos numéricos para determinar el crecimiento diario y costos de producción de la tilapia roja en estanques artificiales en el Municipio de San Vicente de Chucurí, Santander</b>                                                                                           |            |
| Juan Carlos Reyes Figueroa, Óscar Gómez Gómez .....                                                                                                                                                                                                                                                              | 549        |
| <b>Modelos económicos y sistemas caóticos: Estudio mediante dinámica de sistemas</b>                                                                                                                                                                                                                             |            |
| Giampaolo Orlandoni Merli, Josefa Ramoni Perazzi .....                                                                                                                                                                                                                                                           | 557        |
| <b>Solución numérica de la ecuación de onda con coeficiente estocástico</b>                                                                                                                                                                                                                                      |            |
| O. Cuervo, Juan Galvis .....                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 565        |
| <b>Solución de problemas de desgaste superficial mediante el método de los elementos finitos</b>                                                                                                                                                                                                                 |            |
| E. Rodríguez, A. Ramirez .....                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 575        |
| <b>Optimización de muros de contención vía Algoritmo Simulated Annealing Modificado</b>                                                                                                                                                                                                                          |            |
| C. Millán, J. Arrieta, A. Matoski, R. Catai .....                                                                                                                                                                                                                                                                | 583        |
| <b>PONENCIAS PUBLICADAS, RESÚMENES</b>                                                                                                                                                                                                                                                                           | <b>591</b> |
| <b>Multiresolution-based Reconstruction for Compressive Spectral Video Sensing using a Spectral Multiplexing Sensor</b>                                                                                                                                                                                          |            |
| Kareth León, Laura Galvis, Henry Arguello .....                                                                                                                                                                                                                                                                  | 593        |
| <b>Estimación de errores y adaptatividad en esquemas miméticos para un problema de tipo parabólico</b>                                                                                                                                                                                                           |            |
| Giovanni E. Calderón S., Julio C. Carrillo E., Jorge Villamizar M., Carlos F. Torres M. ....                                                                                                                                                                                                                     | 593        |
| <b>Lagrangian-Eulerian Approximation Methods for Balance Laws and Hyperbolic Conservation Laws</b>                                                                                                                                                                                                               |            |
| Eduardo Abreu, John Pérez, Arthur Santo .....                                                                                                                                                                                                                                                                    | 594        |
| <b>Estudio numérico del campo de microondas en una cavidad resonante cilíndrica <math>TE_{111}</math> para el calentamiento de un plasma ECR utilizando el método de Yee</b>                                                                                                                                     |            |
| Eduardo A. Orozco, Valeriy Dougar-zhabon, Alex Estupiñán .....                                                                                                                                                                                                                                                   | 594        |
| <b>Modelado numérico del proceso de secado solar de manzanas en el municipio de nuevo Colón-Boyacá</b>                                                                                                                                                                                                           |            |
| Pedro Julián García, Jersson X. Leon-Medina, Leydi J. Cardenas-Flechas, J.F. Giraldo .....                                                                                                                                                                                                                       | 595        |
| <b>Ensamble de estructuras a nivel mesoscópico: Formación de trímeros no-simétricos</b>                                                                                                                                                                                                                          |            |
| A. Arango-Restrepo, D. Barragán .....                                                                                                                                                                                                                                                                            | 595        |
| <b>Análisis de sensibilidad y de estabilidad numérica en el cálculo de factores de intensidad de tensiones en un caso de mecánica de fractura</b>                                                                                                                                                                |            |
| Wilson Rodríguez Calderón, Rosangel Rojas Agüero, José Rafael Yépez Aguirre, Myriam Rocío Pallares Muñoz .....                                                                                                                                                                                                   | 596        |
| <b>Diseño de un módulo de control electrónico para la crianza automatizada de peces mediante el modelado matemático multiparamétrico u optimización a través de software que simule las condiciones básicas necesarias para la crianza en estanques artificiales en función de los parámetros fisicoquímicos</b> |            |
| Hernán Darío, Yezid Rolando Vargas Gómez .....                                                                                                                                                                                                                                                                   | 597        |
| <b>Aplicación de campos estocásticos en problemas de geotécnia</b>                                                                                                                                                                                                                                               |            |
| Jorge Luis Palomino Tamayo, Armando Miguel Awruch, Wilson Rodríguez Calderón .....                                                                                                                                                                                                                               | 598        |
| <b>Parameters Estimation Strategy Through the Associated Inverse Problem Using Global Optimization Algorithms</b>                                                                                                                                                                                                |            |
| D. Matajira-Rueda, J.M. Cruz-Duarte, J.G. Avina-Cervantes, C.R. Correa-Cely .....                                                                                                                                                                                                                                | 598        |
| <b>Efecto del radio de redondeo de la carina en el desarrollo del flujo a través de un modelo sintético de vías respiratorias</b>                                                                                                                                                                                |            |
| Santiago Espinosa Moreno, Carlos Duque-Daza .....                                                                                                                                                                                                                                                                | 599        |
| <b>Influencia de las condiciones de carga en la generación de úlceras por presión en amputados transfemorales</b>                                                                                                                                                                                                |            |
| Carlos A. Mejía Blandón, Liliana M. Bustamante Goez, Junes A. Villarraga Ossa .....                                                                                                                                                                                                                              | 599        |
| <b>Análisis y simulación del modelo térmico y viscoso del proceso de <i>melt spinning</i></b>                                                                                                                                                                                                                    |            |
| Marcelo Barone, Francisco Barceló, Jairo Useche, Axel Larreteguy, Marcelo Pagnola .....                                                                                                                                                                                                                          | 600        |



|                                                                                                                                                                                                                                                                                      |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Diseño concepto en CAD de una camilla cuchara liviana a base de Guadua Angustifolia Kunth</b><br>Sebastián Casas Sánchez, Sebastián García Velandia, Yolanda Torres Pérez,<br>Nelson Iván Villamizar Cruz, Alonso Hernández Molano .....                                          | 603 |
| <b>Cálculo de bifurcaciones usando Dsamala Toolbox</b><br>Angélica M. Atehortúa, Beatriz Rojas García, José Carlos Valverde .....                                                                                                                                                    | 603 |
| <b>Algoritmos genéticos y PSO aplicados a un problema de generación distribuida</b><br>Edgar Dario Obando-Paredes .....                                                                                                                                                              | 604 |
| <b>Modelado unidimensional de transductores ultrasónicos para ensayos no destructivos</b><br>Samuel E. Toro, Ediguer E. Franco .....                                                                                                                                                 | 604 |
| <b>Optimización por PSO para zapatas aisladas de concreto reforzado</b><br>Paula Tole, Julian Gordillo, Jesús Villalba .....                                                                                                                                                         | 604 |
| <b>Optimización de armaduras utilizando elementos finitos y arquitectura paramétrica</b><br>Ma. Del Pilar Revuelta M., Jesús D. Francisco Chávez G., Jesús D. Villalba .....                                                                                                         | 605 |
| <b>Análisis de los esfuerzos y las deformaciones causados por la interacción fluido estructura en los alabes de un impulsor centrífugo</b><br>Juan José Gutierrez, Iván Darío Díaz, Octavio Andrés González .....                                                                    | 605 |
| <b>Métodos de elemento finito y elemento finito mixto para un problema elasto-estático lineal</b><br>Carlos de Oro Aguado, Ricardo Prato Torres .....                                                                                                                                | 606 |
| <b>Método de Runge-Kutta de cuarto orden aplicado a la solución numérica del modelo dinámico de un cohete hidráulico</b><br>Luis Jorge Díaz, Omar Salazar .....                                                                                                                      | 606 |
| <b>Propagación espacio temporal de señales químicas: Formación de patrones de Liesegang</b><br>Andrés Arango-Restrepo, Daniel Barragán .....                                                                                                                                         | 607 |
| <b>Algoritmos de optimización en la estimación de propiedades termodinámicas en tiempo real durante el tratamiento térmico de materiales con microondas</b><br>Edgar García, Iván Amaya, Rodrigo Correa .....                                                                        | 607 |
| <b>Optimización topológica de estructuras sometidas a cargas horizontales utilizando el software GENESIS</b><br>M. Hernández, J. Villalba .....                                                                                                                                      | 608 |
| <b>El método de elementos finitos para problemas de difusión con dos fases: XFEM y XFEM+</b><br>Paola Vielma, Giovanni E. Calderón, Felipe Cordero .....                                                                                                                             | 608 |
| <b>Simulación de diferentes ángulos de cuchilla de un cangilón Pelton para incrementar la potencia generada por la rueda Pelton</b><br>David A. Gómez, Edwin C. Quintana, Sebastián V. García, Alejandro R. Sánchez, Yhon L. Castañeda .....                                         | 609 |
| <b>Análisis del efecto de la corrosión tipo picadura en los esfuerzos de una tubería para transporte de hidrocarburos utilizando el software de simulación ANSYS</b><br>W.M. Salamanca, S. Medina, O. González .....                                                                 | 609 |
| <b>Construcción y modelado matemático de un prototipo de central térmica</b><br>Fabio Alberto Reyes Varon, Pedro Rene Hernandez Villalba,<br>Yebrail Ortiz Ayala, Pedro Julian Garcia Guarín .....                                                                                   | 610 |
| <b>Diseño de concepto de CAD de una camilla cuchara liviana a base de guadua Angustifolia Kunth</b><br>Sebastián Casas Sánchez, Sebastián García Velandia, Yolanda Torres Pérez,<br>Nelson Iván Villamizar, Alonso Hernández Molano .....                                            | 610 |
| <b>Análisis del índice bancario de referencia, rendimientos y pronósticos fractales con rango reescalado</b><br>Dúwang Prada, Alejandro Acevedo, Helio Fernández, Fergie Pertúz, Paula Arias .....                                                                                   | 611 |
| <b>Análisis numérico de la influencia en la geometría del tanque para la generación de potencia en una turbina de vórtice gravitacional</b><br>Alejandro Ruiz Sánchez, Yhon L. Castañeda Ceballos, Jorge A. Sierra Del Rio,<br>Adrián Martínez Pérez, Alejandro Posada Montoya ..... | 611 |

|                                                                                                                                                                                                                                                                          |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Análisis del comportamiento mecánico de elementos de máquinas con entallas superpuestas utilizando el método de elementos de contorno</b>                                                                                                                             |     |
| Wilmer Silva, Nicolás Gomez, Juan Baez .....                                                                                                                                                                                                                             | 612 |
| <b>Reducción de los esfuerzos y las deformaciones de un álabe de turbina eólica de eje vertical por medio de refuerzos estructurales internos</b>                                                                                                                        |     |
| Dayal B. Castro, Rubén P. Güiza, Iván A. Ortega .....                                                                                                                                                                                                                    | 612 |
| <b>Análisis bidimensional del crecimiento de grieta en una biela mediante (BEM)</b>                                                                                                                                                                                      |     |
| Ruben D. Güiza, Omar A. Fuentes, Dayal Castro .....                                                                                                                                                                                                                      | 613 |
| <b>Estudio en la integración de los dispositivos de telefonía móvil a fin de establecer patrones de comportamiento de fallo, mediante análisis estadístico multivariante, orientado al diseño de un dispositivo para la optimización de las labores de mantenimiento</b> |     |
| Yezid Vargas, Hernán Díaz .....                                                                                                                                                                                                                                          | 613 |
| <b>Análisis comparativo de algoritmos de evolución diferencial con adaptación de parámetros</b>                                                                                                                                                                          |     |
| Luis D. Medina-Zuluaga, Jesús D. Villalba .....                                                                                                                                                                                                                          | 614 |
| <b>Aplicación de los métodos de volúmenes finitos en modelado de fluidos</b>                                                                                                                                                                                             |     |
| Juliana Cortés M., Karen Rubio O., Jesús Villalba .....                                                                                                                                                                                                                  | 614 |
| <b>Simulación de los sistemas de calentamiento de agua para piscinas por medio de bombas de calor</b>                                                                                                                                                                    |     |
| William Quitiaquez, César Isaza, Fernando Toapanta, Patricio Quitiaquez, Luis Andrango .....                                                                                                                                                                             | 615 |
| <b>Parallel Programming as an Approach for Cellular Automata Modeling</b>                                                                                                                                                                                                |     |
| Aurelio Vivas, Arturo Argüelles .....                                                                                                                                                                                                                                    | 615 |
| <b>Método numérico por diferencias divididas para solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias</b>                                                                                                                                                           |     |
| Solón E. Losada H., Néstor O. Forero, Johans C. Prada L. ....                                                                                                                                                                                                            | 616 |
| <b>Desarrollo de una GUI en Matlab para la implementación de los métodos numéricos mas representativos</b>                                                                                                                                                               |     |
| Diego Lozano, Michael Vargas, Daniela Rodríguez .....                                                                                                                                                                                                                    | 616 |
| <b>Análisis de persistencia en movimiento armónico mediante coeficiente de Hurst</b>                                                                                                                                                                                     |     |
| Dúwang Alexis Prada Marín, Fernando Durán Flórez .....                                                                                                                                                                                                                   | 617 |
| <b>Estimación de velocidades mediante tomografía basada en trazado de rayos sísmicos</b>                                                                                                                                                                                 |     |
| Cristhian Zuluaga Herrera, Juan Carlos Muñoz, Hebert Montegranario R. ....                                                                                                                                                                                               | 617 |
| <b>Techos verdes en estructuras aporricadas como alternativa para la reducción de la respuesta sísmica</b>                                                                                                                                                               |     |
| Daniel Rodríguez G., Jesús Villalba D. ....                                                                                                                                                                                                                              | 617 |
| <b>Evaluación del desempeño de un Algoritmo Recocido Simulado Alterado en problemas de optimización con restricciones</b>                                                                                                                                                |     |
| Jesús Suárez, Carlos Millán .....                                                                                                                                                                                                                                        | 618 |
| <b>Using LU Factorization as the Initialization for a Matrix Completion: Algorithm Applied to Image Recovery</b>                                                                                                                                                         |     |
| Carlos Estévez, Sebastián Carrillo, Andres Ortíz, Tatiana Gelvez, Henry Argüello .....                                                                                                                                                                                   | 618 |
| <b>Modelado, simulación e implementación del oscilador caótico conmutado por tramos</b>                                                                                                                                                                                  |     |
| Nicolás Felipe Conde González, Harold Vacca González, Aldemar Fonseca Velázquez .....                                                                                                                                                                                    | 619 |
| <b>Análisis de crecimiento de grieta en 2D por el método de elementos de contorno</b>                                                                                                                                                                                    |     |
| O.R. Bohórquez, S.A. Ardila, C. Flórez Galvis .....                                                                                                                                                                                                                      | 619 |
| <b>Optimización por PSO para zapatas aisladas de concreto reforzado</b>                                                                                                                                                                                                  |     |
| Paula Tole, Julian Gordillo, Jesús Villalba .....                                                                                                                                                                                                                        | 620 |
| <b>Solución de las ecuaciones de Maxwell del campo electromagnético por medio del Método de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo (FDTD)</b>                                                                                                                      |     |
| Fernando Meza, Carlos Ramírez, Germán Guzmán .....                                                                                                                                                                                                                       | 620 |



|                                                                    |            |
|--------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>CURSILLOS</b>                                                   | <b>621</b> |
| <b>Nonlinear Finite Element Method</b>                             |            |
| J.N. Reddy .....                                                   | 623        |
| <b>Control y simulación numérica: Avances recientes y desafíos</b> |            |
| Enrique Zuazua .....                                               | 623        |
| <b>Métodos de discretización mimética</b>                          |            |
| José E. Castillo .....                                             | 623        |
| <b>La ecuación de ondas en Geofísica</b>                           |            |
| Victor Pereyra .....                                               | 624        |

# Avances en la implementación de métodos espectrales para fluidos no Newtonianos

Mario G. Trujillo<sup>1</sup>, Jorge A. Escobar<sup>1</sup>, Alfonso M. Ramos<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Facultad de Ingeniería, Pontificia Universidad Javeriana, Calle 7 No. 40-01, Bogotá, Colombia

<sup>2</sup> Instituto Geofísico Universidad Javeriana, Calle 7 No. 42-41, Bogotá, Colombia

correo-e: [mario.trujillo@javeriana.edu.co](mailto:mario.trujillo@javeriana.edu.co), [jorge-escobar@javeriana.edu.co](mailto:jorge-escobar@javeriana.edu.co), [a-ramos@javeriana.edu.co](mailto:a-ramos@javeriana.edu.co)

**Resumen:** Tanto en la naturaleza como en procesos creados por el hombre se genera transporte de sustancias mediante flujos. Una forma de representar el comportamiento de los materiales al fluir es mediante una relación constitutiva de esfuerzo de corte y tasa de deformación, y cuya proporción está dada por un parámetro conocido como viscosidad. La viscosidad puede presentar un comportamiento lineal y no lineal, dependiendo del tipo de fluido, y que típicamente se hace dependiente de la tasa de deformación cuando es no lineal [5]. Estas relaciones constitutivas son introducidas a las ecuaciones completas de momentum y también a sus versiones reducidas como aguas someras, con el fin de representar el movimiento de fluidos tanto Newtonianos como no Newtonianos. Con el fin de evaluar la potencialidad de los métodos espectrales para solucionar ecuaciones de conservación para fluidos no Newtonianos, en este trabajo se presenta los avances en la implementación de un modelo basado en las ecuaciones de aguas someras para fluidos no Newtonianos, utilizando una técnica llamada método penalizado de multidominios espectrales [3]. Se analizaron dos casos de prueba que son comúnmente utilizados para determinar las bondades de los métodos numéricos empleados en soluciones de las ecuaciones de aguas someras, como es el colapso de una Gaussiana y un cilindro vertical.

**Palabras y frases claves:** Fluidos no Newtonianos, ecuaciones de aguas someras, métodos espectrales.

## 1. INTRODUCCIÓN

En la industria y en la naturaleza existe procesos conocidos como flujos, que consiste en un movimiento relativo de dos elementos adyacentes de material (deformación), es decir, un elemento se mueve con relación al otro [1]. Dependiendo del tipo de material se puede observar comportamientos diferentes el flujo, de modo que, existen múltiples modelos que permiten describir el comportamiento de cada tipo de material. Por ejemplo, si la relación esfuerzo tasa de deformación el lineal, entonces se dice que el modelo a emplear es Newtoniano. Mientras que, si dicha relación es no lineal, existen otros modelos que básicamente se describen como leyes de potencia sin y con un esfuerzo de fluencia, es decir un esfuerzo que debe ser superado para que el material fluya. El planteamiento de modelos no lineales es relevante para la descripción de flujos naturales como lodos y detritos. Estos modelos constitutivos son introducidos en la ecuación de la segunda ley de Newton para que permitan describir los esfuerzos sufridos por el fluido durante su movimiento. Para facilitar la solución a este tipo de problemas es común integrar las ecuaciones de masa momentum en la profundidad, y suponer que la presión actúa de forma hidrostática. En este trabajo se presentan las ecuaciones anteriormente descritas con un modelo constitutivo que relaciona esfuerzos con tasa de deformación y que sigue un comportamiento de ley de potencia. El sistema de ecuaciones es solucionado mediante un método espectral llamado método penalizado de multidominios espectrales (SMPM). La importancia del uso de esta técnica de discretización espacial está enmarcada en el bajo error numérico proporcionado en casos de referencia como se muestra en Escobar-Vargas et al., [2]. Aquí se probaron dos condiciones iniciales una en forma de campana Gaussiana y otra un cilindro vertical, con el fin de probar las bondades del método numérico para solucionar un fluido que sigue leyes de potencia. Los resultados muestran soluciones satisfactorias, ya que, para diferentes tipos de fluidos, es posible apreciar las diferencias en la solución en el mismo instante de tiempo.

## 2. ECUACIONES DE GOBIERNO

Para describir el movimiento del fluido se parte de las ecuaciones de conservación de masa y momentum en las siguientes subsecciones.

## 2.1. Ecuaciones de masa y momentum

Las ecuaciones que típicamente describen el flujo de un material son las ecuaciones de conservación de masa y momentum, para un fluido incompresible, en forma general son

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = \rho g_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \quad (2)$$

donde  $u_i = (u, v, w)$  representa el vector velocidad,  $x_j = (x, y, z)$  es el vector de dimensiones espaciales,  $g_i$  cada componente de la gravedad y  $\sigma_{ij}$  es el tensor de esfuerzo. Para describir el comportamiento del fluido es necesario introducir un modelo constitutivo, cuya estructura está regida por una ley de potencia

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu_0 I_2^{(n-1)} \varepsilon_{ij}, \quad (3)$$

donde  $p$  es el componente isotrópico,  $\mu_0$  es conocido como un índice de consistencia,  $n$  es el índice de ley de potencia,  $\varepsilon_{ij}$  es el tensor tasa de deformación, y  $I_2$  es la segunda invariante del tensor tasa de deformación. Si  $n = 1$  y  $\mu_0 = \mu$  entonces el fluido es Newtoniano. Al reemplazar el tensor tasa de deformación  $\varepsilon_{ij}$  se obtiene que

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu_0 I_2^{(n-1)} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (4)$$

## 2.2. Integración en la profundidad

Al suponer que las variables en el plano horizontal son mucho mayores que las variables en dirección vertical, y que la presión actúa de forma hidrostática, es posible promediar dichas propiedades en la profundidad bajo el siguiente concepto,

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{1}{h} \int_0^h u dz, & \bar{v} &= \frac{1}{h} \int_0^h v dz, & \beta \bar{u}^2 &= \frac{1}{h} \int_0^h u^2 dz, \\ \beta \bar{u} \bar{v} &= \frac{1}{h} \int_0^h u v dz, & \bar{\sigma}_{ij} &= \frac{1}{h} \int_0^h \sigma_{ij} dz \end{aligned} \quad (5)$$

donde la barra denota la propiedad promediada en la profundidad,  $\beta$  es un factor de corrección de momentum que da cuenta de la forma del perfil de velocidades que para este trabajo se tomó como la unidad, y  $h = H + \eta$  es la profundidad del flujo, siendo  $H$  una profundidad media y  $\eta$  el desplazamiento de la superficie libre. Si se promedia en la profundidad las ecuaciones de masa y momentum, empleando la regla de derivación bajo el signo de la integral de Leibniz y las ecuaciones presentadas en (5), entonces el sistema de ecuaciones resultante es

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial h \bar{v}}{\partial y} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial h \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial h \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial h \bar{u} \bar{v}}{\partial y} = g_x h + \frac{\partial h \bar{\sigma}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial h \bar{\sigma}_{xy}}{\partial y}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial h \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial h \bar{v} \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial h \bar{v}^2}{\partial y} = g_y h + \frac{\partial h \bar{\sigma}_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial h \bar{\sigma}_{yy}}{\partial y}. \quad (8)$$

Para obtener los esfuerzos promediados en la profundidad tal como aparece en la ecuación (6), la ecuación (3) debería ser integrada la profundidad, pero esta labor no es sencilla de desarrollar. De modo que en este trabajo empleamos el mismo enfoque propuesto en Quecedo et al., [4], donde se considera una ecuación constitutiva promediada en la profundidad siendo función de un tensor tasa de deformación promediado en la profundidad,

$$\bar{\sigma}_{ij} = -\bar{p}\delta_{ij} + \mu_0 \bar{I}_2^{(n-1)} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right), \quad (9)$$

donde  $i, j = 1, 2$ . Ahora el tensor tasa de deformación tiene solamente dos componentes, ya que se tiene un sistema bidimensional con variables integradas en la profundidad. También el segundo invariante que aparece en la ecuación (9), se define en función de dichas variables, y puede ser escrita de forma concisa como

$$\bar{I}_2 = \frac{1}{2} \text{tr}(\bar{\varepsilon}_{ij}^2) = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2 \right]. \quad (10)$$

Si se reemplaza el tensor tasa de deformación, las ecuaciones de masa y momentum integradas en la profundidad y con el término de la presión supuesta como hidrostática al lado izquierdo del sistema, entonces resulta que

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial h \bar{v}}{\partial y} = 0, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( h \bar{u}^2 + \frac{1}{2} g_z h^2 \right) + \frac{\partial h \bar{u} \bar{v}}{\partial y} = \\ = g_x h + \mu_0 \bar{I}_2^{(n-1)} h \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) + \mu_0 \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x} [h \bar{I}_2^{(n-1)}] + \mu_0 \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} [h \bar{I}_2^{(n-1)}], \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial h \bar{v} \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( h \bar{v}^2 + \frac{1}{2} g_z h^2 \right) = \\ = g_y h + \mu_0 \bar{I}_2^{(n-1)} h \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \right) + \mu_0 \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} [h \bar{I}_2^{(n-1)}] + \mu_0 \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial y} [h \bar{I}_2^{(n-1)}]. \end{aligned} \quad (13)$$

### 3. TÉCNICA DE DISCRETIZACIÓN

El sistema de ecuaciones planteado anteriormente puede ser reescrito en forma conservativa de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{q})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{q})}{\partial y} = \mathbf{S}(\mathbf{q}), \quad (14)$$

donde  $\mathbf{q}$  denota el vector de las variables conservativas,  $\mathbf{F}(\mathbf{q})$  y  $\mathbf{G}(\mathbf{q})$  representan los flujos horizontales en la dirección  $x$  y  $y$ , respectivamente, y  $\mathbf{S}(\mathbf{q})$  es el vector que contiene los términos fuente. Al descomponer este sistema de ecuaciones se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{q} = \begin{pmatrix} h \\ h \bar{u} \\ h \bar{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} h \bar{u} \\ h \bar{u}^2 + \frac{1}{2} g h^2 \\ h \bar{u} \bar{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} h \bar{v} \\ h \bar{v} \bar{u} \\ h \bar{v}^2 + \frac{1}{2} g h^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (15)$$

y

$$\mathbf{S}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ g_x h + \mu_0 \bar{I}_2^{(n-1)} h \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) \\ g_y h + \mu_0 \bar{I}_2^{(n-1)} h \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \right) \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Por problemas de estabilidad, en este trabajo se ha dado solución al sistema planteado anteriormente, ya que los dos últimos términos de las ecuaciones (12) y (13) dificultan la obtención de la solución estable.

### 3.1. Método espectral

Para la discretización espacial de las ecuaciones promediadas en la profundidad se emplea el método penalizado de multidominios espectrales (SMPM) desarrollado por Hesthaven y Gottlieb [3]. El SMPM consiste en un enfoque de colocación con múltiples elementos discontinuos rectangulares que no se superponen y están conectados por un término de penalización que asegura la estabilidad de la solución mediante la imposición de una continuidad débil en las interfaces subdominio [2, 3]. Debido a la discontinuidad intrínseca del método y la unión entre las caras, la formulación del SMPM se presenta en dos partes, el interior subdominio, y el tratamiento de las interfaces.

**3.1.1. Interior del subdominio.** El SMPM se basa en un enfoque de colocación en subdominios bidimensionales cuadriláteros y discontinuos, donde, dentro de cada subdominio cualquier función  $q(x, y, t)$  se puede aproximar mediante el uso de polinomios interpolación de Lagrange de  $N$ -ésimo orden en una malla de Gauss-Lobatto-Legendre (GLL) dado como [3],

$$q(x, y, t) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N q(x_i, y_j, t) l_i(x) l_j(y), \quad (17)$$

donde  $q(x, y, t)$  es el valor de la función en el punto discreto  $(x_i, y_j)$ , y  $l_i(x)$ ,  $l_j(y)$  son el  $i$ -ésimo polinomio de interpolación de Lagrange sobre la base de los puntos GLL en la dirección  $x$  y  $y$ , respectivamente.

**3.1.2. Tratamiento de las interfaces.** La forma penalizada de las ecuaciones en un punto de colocación situado en los límites de un subdominio requiere la adición de un término de penalización que permite establecer continuidad entre elementos contiguos [2], así:

$$\frac{\partial q^e}{\partial t} + \frac{\partial F^e}{\partial x} + \frac{\partial G^e}{\partial y} = S(q)^e + \sum_{i=1}^4 \hat{\tau}_e Q_e n^{(e,l)} \cdot [\mathfrak{F}^e - \mathfrak{F}^l], \quad (18)$$

donde  $n^{(e,l)}$  es el vector unitario que apunta hacia el exterior en la dirección del volumen de control de  $e$  a  $l$ ,  $Q_e$  es la función delta Dirac que no es cero solo en las interfaces de los subdominios, donde el término de penalización es activado,  $\mathfrak{F}^e$  y  $\mathfrak{F}^l$  representan los flujos positivos y negativos en los puntos de la malla en las interfaces específicas del subdominio en el subdominio bajo consideración y  $\hat{\tau}_e$  es el coeficiente de penalización descrito como  $\hat{\tau} \equiv |\tau| = 1/\omega \Delta s$  [2]. Los pesos de cuadratura  $\omega$  son asignados a los puntos de GLL a lo largo de las interfaces de la izquierda, derecha, abajo y arriba, que para un orden de aproximación polinómica uniforme  $N$ , se puede emplear un único valor en cada subdominio dado como  $\omega = 2/N(N+1)$ , y  $\Delta s = (\Delta x, \Delta y)$  en función de la orientación de las interfaces de subdominio [2].

Para mantener el orden de la precisión ofrecido por el método de discretización espacial se emplea un esquema Runge-Kutta de preservación de estabilidad fuerte (SSP-RK) para la discretización temporal [2].

## 4. CASOS DE PRUEBA

Para dar solución al sistema de ecuaciones, se realizaron pruebas con dos tipos de condiciones iniciales, una suave y otra discontinua. La función suave es representada por una campana Gaussiana (Figura 1), mientras que la función discontinua representada por un cilindro (Figura 2), y ambas funciones son liberadas de forma repentina para un  $t > 0$ .

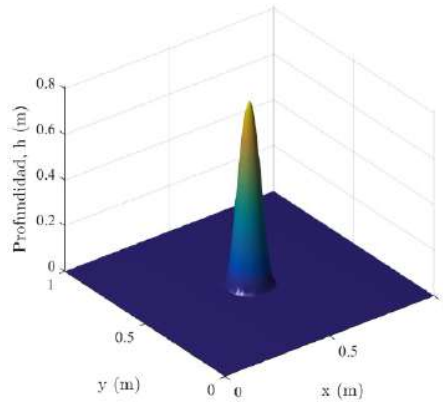


Figura 1: Condición inicial suave, campana Gaussiana.

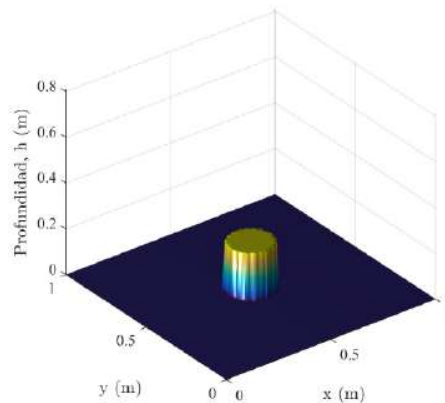


Figura 2: Condición inicial discontinua, cilindro vertical.

El dominio del experimento numérico está dado como:  $x = [0,0,1,0]\text{m}$ ,  $y = [0,0,1,0]\text{ m}$ , la altura media  $H = 1,0\text{m}$ , la amplitud de la Gaussiana es de  $h = 0,8\text{m}$ . Para el cilindro se tiene el mismo dominio computacional:  $x = [0,0,1,0]\text{m}$ ,  $y = [0,0,1,0]\text{m}$ , y la altura de cilindro es  $h = 0,2\text{m}$ . El radio tanto de la Gaussiana como del cilindro es  $R = 0,1\text{m}$ . El tiempo en el cual se desarrolla la simulación es: tiempo inicial  $t_0 = 0\text{s}$ , y el tiempo final  $t_f = 0,10\text{s}$ . En la discretización espacial se imponen 30 subdominios en cada dirección, para un total de 900 subdominios y dentro de los subdominios se imponen 6 puntos de integración en cada dirección, teniendo así 36 puntos dentro de cada subdominio para un total de 32400 puntos en todo el dominio. Por otra parte, las condiciones de frontera se imponen como reflectivas en los cuatro lados del dominio.

## 5. RESULTADOS

En las Figuras 3-5 se muestra la solución para la condición inicial de la Gaussiana, probando tres diferente valores del exponente de la ley de potencia ( $n = 0.6, 2.0$  y  $10.0$ ), es decir se está solucionado el sistema para tres diferentes tipos de fluidos, un fluido conocido como “shear thinning” y dos de tipo “shear thickening”. Bajo las mismas condiciones se puede apreciar en las tres figuras que para el mismo instante de tiempo, cada fluido presenta un comportamiento diferente.

Por otra parte la Figuras 6-8 se muestra la solución para la condición inicial del cilindro, probando tres los mismos valores del exponente de la ley de potencia ( $n = 0.6, 2.0$  y  $10.0$ ), que se emplearon en la Gaussiana. Aunque son los mismos tipos de fluidos empleados en la simulación, se puede apreciar que entre ellos tienen un comportamiento semejante a causa de la condición inicial. Además, la discontinuidad que presenta el cilindro es influyente en la estabilidad del método, ya que el tamaño de paso de tiempo más restrictivo para poder solucionar este caso, especialmente si el exponente  $n > 1$ . Los dos últimos términos que aparecen en las ecuaciones 12 y 13 permiten obtener solución solamente cuando  $n = 1$ , es decir cuando el fluido es Newtoniano.

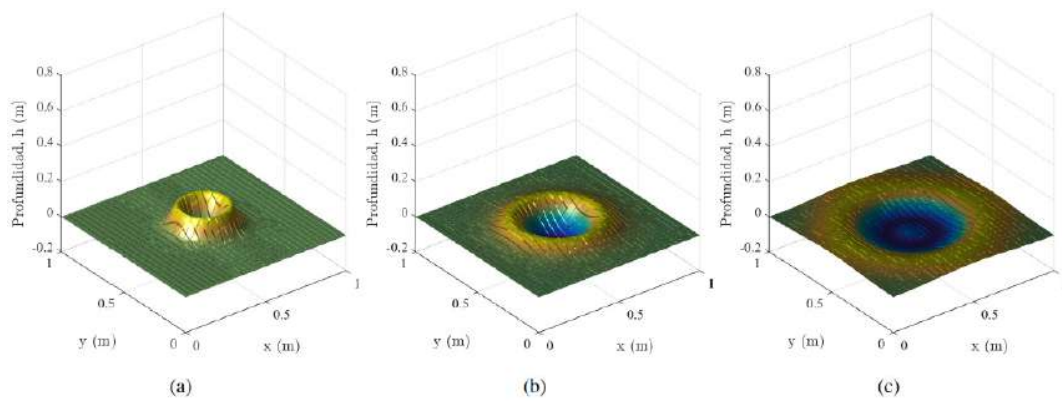


Figura 3: Caída de la Gaussiana con un valor de  $n = 0.6$  y  $\mu_0 = 5.0 \times 10^3$ , para tres instantes de tiempo  $t = 0.03$ ,  $0.06$  y  $0.1$  s, (a, b y c), respectivamente.

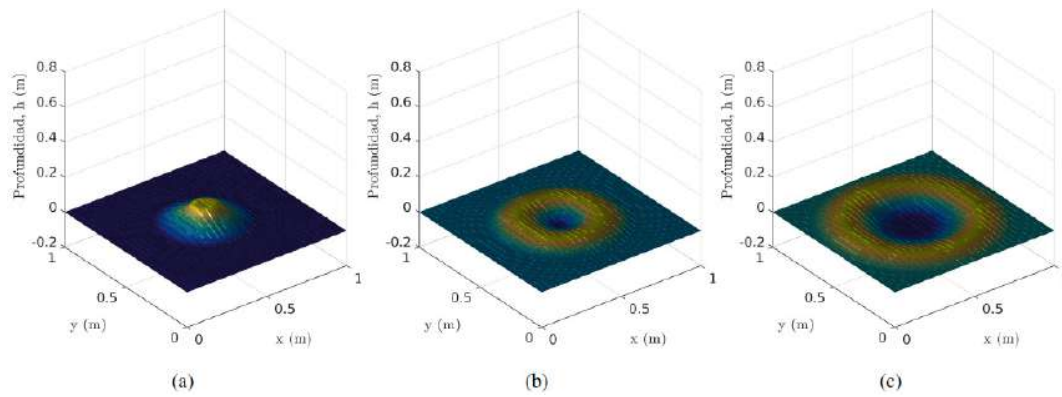


Figura 4: Caída de la Gaussiana con un valor de  $n = 2.0$  y  $\mu_0 = 5.0 \times 10^3$ , para tres instantes de tiempo  $t = 0.03$ ,  $0.06$  y  $0.1$  s, (a, b y c), respectivamente.

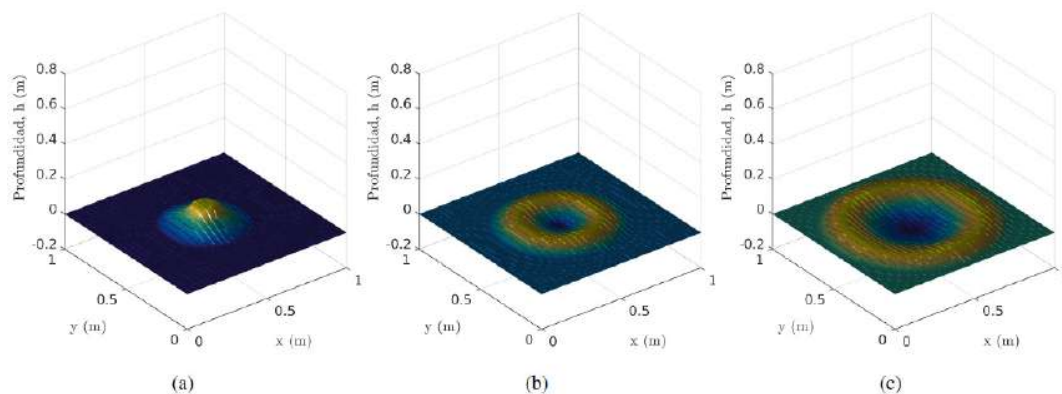


Figura 5: Caída de la Gaussiana con un valor de  $n = 10.0$  y  $\mu_0 = 5.0 \times 10^3$ , para tres instantes de tiempo  $t = 0.03$ ,  $0.06$  y  $0.1$  s, (a, b y c), respectivamente.



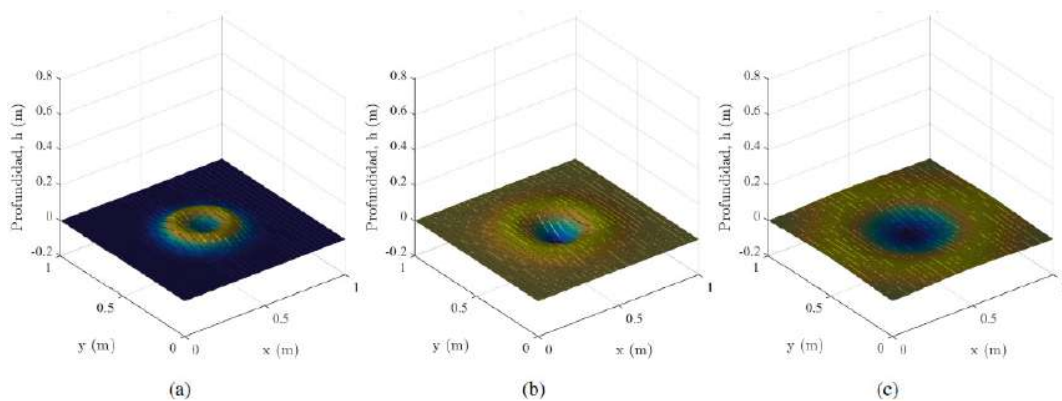


Figura 6: Caída del cilindro con un valor de  $n = 0.6$  y  $\mu_0 = 5.0 \times 10^3$ , para tres instantes de tiempo  $t = 0.03, 0.06$  y  $0.1$  s, (a, b y c), respectivamente.

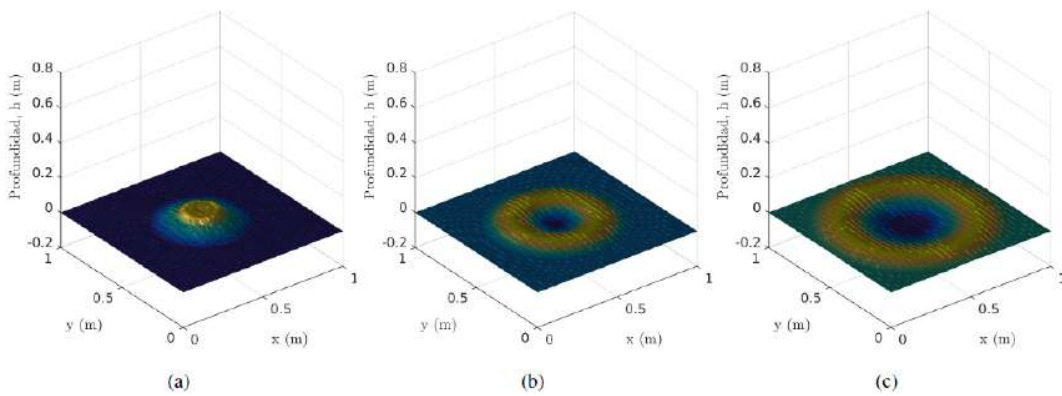


Figura 7: Caída del cilindro con un valor de  $n = 2.0$  y  $\mu_0 = 5.0 \times 10^3$ , para tres instantes de tiempo  $t = 0.03, 0.06$  y  $0.1$  s, (a, b y c), respectivamente.

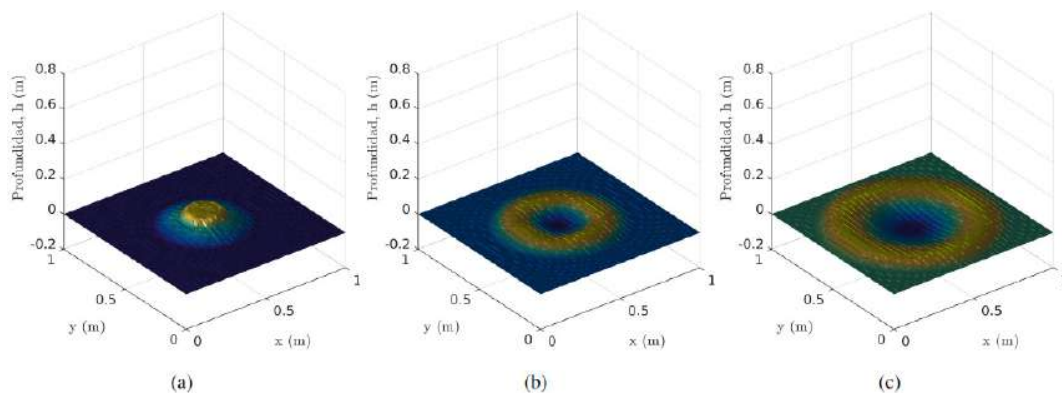


Figura 8: Caída del cilindro con un valor de  $n = 10.0$  y  $\mu_0 = 5.0 \times 10^3$ , para tres instantes de tiempo  $t = 0.03, 0.06$  y  $0.1$  s, (a, b y c), respectivamente.



## 6. CONCLUSIONES

En sistema de ecuaciones presentado en este escrito describe diferentes comportamientos dependiendo del índice de ley de potencia. Sin embargo, es necesario comparar con mediciones experimentales para determinar la efectividad del sistema de ecuaciones para representar el comportamiento de fluidos no Newtonianos.

El método numérico soluciona de forma satisfactoria parte de los términos planteados en el sistema de ecuaciones, pero la solución es inestable con los últimos dos términos de las ecuaciones de momentum (ver ecuaciones (12) y (13)). La imposición de una condición inicial discontinua dificulta la obtención de resultados de forma estable, y más aún bajo ciertas condiciones, por ejemplo, cuando el índice de ley de potencia es  $n > 10$ .

## AGRADECIMIENTOS

El primer autor agradece al Doctorado en Ingeniería de la Pontificia Universidad Javeriana y al Instituto Geofísico Universidad Javeriana por el apoyo brindado para presentar este trabajo.

## REFERENCIAS

- [1] H. A. Barnes. A handbook of elementary rheology. University of Wales, Institute of Non-Newtonian Fluid Mechanics Aberystwyth, 2000.
- [2] J. Escobar-Vargas, P. Diamessis, and F. Giraldo. High-order discontinuous element-based schemes for the inviscid shallow water equations: Spectral multidomain penalty and discontinuous galerkin methods. *Applied Mathematics and Computation*, 218(9):4825-4848, 2012.
- [3] J. S. Hesthaven and A. D. Gottlieb. A stable penalty method for the compressible navier-stokes equations: I. open boundary conditions. *Journal on Scientific Computing*, 17(3):579-612, 1996.
- [4] M. Quecedo, M. Pastor, M. Herreros, and J. Fernández Merodo. Numerical modelling of the propagation of fast landslides using the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*.
- [5] J. N. Reddy. An introduction to continuum mechanics. Cambridge university press, 2013.