

**REPÚBLICA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
DEPARTAMENTO DE ESTRUCTURAS**

**APLICACIÓN DE TÉCNICAS DE EXTRAPOLACIÓN EN EL
CÁLCULO DEL ERROR DE DISCRETIZACIÓN**

Por

Nestor Luis Guerrero Chávez

Mérida, Junio de 1999

APLICACIÓN DE TÉCNICAS DE EXTRAPOLACIÓN EN EL CÁLCULO DEL ERROR DE DISCRETIZACIÓN

Por

Nestor Luis Guerrero Chávez

Tesis presentada como requisito parcial para la obtención del grado de
Magister Scientiae en Ingeniería Estructural

Facultad de Ingeniería
Universidad de Los Andes

Junio 1999

Aprobada:

Prof. Héctor Febres Cedillo (Tutor)

Prof. Alexis López

Prof. Pether Inglessis

Msc. Ariel Alfredo Buenaño

INDICE GENERAL

Capítulo	Página
INDICE DE FIGURAS.....	vi
INDICE DE TABLAS.....	viii
I. INTRODUCCION.....	1
1.1. Objetivo general.....	6
1.2. Objetivos específicos.....	6
1.3. Utilidad del estudio.....	6
1.4. Limitaciones.....	7
II. MARCO TEORICO.....	8
2.1. Fuentes de error.....	8
2.1.1. Error del modelado matemático.....	8
2.1.2. Error computacional.....	9
2.1.3. Error debido a singularidades.....	9
2.1.4. Error de la aproximación del funcional.....	9
2.1.5. Error en la geometría.....	10
2.1.6. Error de discretización e índice de convergencia.....	11
2.2. Literatura sobre la extrapolación.....	13
2.2.1. Literatura matemática.....	13
2.2.2. Literatura en ingeniería.....	16
2.3. Teorías de extrapolación.....	16
2.3.1. Extrapolación escalar.....	17
2.3.2. Extrapolación de Richardson.....	21
III MARCO METODOLOGICO.....	25
3.1. Ejemplos numéricos.....	25
3.1.1. Problemas de esfuerzos planos.....	25
3.1.2. Problemas de flexión en placas.....	28

3.1.2.1. Placa cuadrada simplemente apoyada con una carga puntual en centro.....	28
3.1.2.2 Placa cuadrada con un borde empotrado. Con una carga puntual en una esquina.....	30
3.1.3. Problema de sólidos en general.....	32
3.1.3.1 Viga corta en voladizo con una carga de corte distribuida en el extremo libre.....	32
3.1.3.2 Viga con empotramiento defectuoso sometida a carga uniforme.....	34
3.1.3.3 Fundación aislada sometida a cargas combinadas...	36
3.2. Comparación de resultados.....	38
3.3. Predicción de resultados.....	38
3.3.1 Extrapolación h^n	38
3.4. Verificación del manejo de configuraciones consecutivas de mallas más adecuado en el proceso de extrapolación.....	39
IV ANÁLISIS DE RESULTADOS.....	41
4.1. Problema de esfuerzos planos.....	42
4.2. Problema de elementos de placa.....	54
4.2.1. Placa simplemente apoyada con carga concentrada en el centro.....	54
4.2.1. Placa empotrada con carga concentrada en una esquina.....	58
4.3. Problema de elementos de sólidos.....	62
4.3.1. Viga empotrada con carga distribuida en un extremo.....	62
4.3.2. Viga con empotramiento defectuoso sometida a carga uniforme.....	70
4.3.3 Fundación aislada sometida a cargas combinadas.....	74
CONCLUSIONES.....	78
REFERENCIAS.....	79

INDICE DE FIGURAS

Figura	Pagina
1.1 Gráfica de resultados y errores en soluciones de problemas por MEF.....	4
3.1 Factor de concentración de esfuerzos para un agujero central en una placa sometida a tensión.....	26
3.2. Viga empotrada sometida a carga axial en el extremo libre.....	27
3.3 Discretización de la viga del problema 1.....	27
3.4 Placa simplemente apoyada con una carga concentrada en el centro.....	29
3.5 Discretización de la placa del problema 2.....	29
3.6 Placa empotrada con una carga aplicada en una esquina.....	31
3.7 Discretización de la viga del problema 3.....	31
3.8 Viga empotrada con carga distribuida en el extremo libre.....	33
3.9 Discretización de la viga del problema 4.....	33
3.10 Viga con empotramiento defectuoso.....	35
3.11 Discretización de la viga del problema 5.....	35
3.12 Fundación aislada sometida a cargas combinadas.....	37
3.13 Discretización de la viga del problema 3.....	37
4.1 Longitud característica vs. Esfuerzo máximo σ_{xx}	44
4.2 Numero de nodos vs Esfuerzo máximo σ_{xx}	44
4.3 Curvas de convergencia del error relativo cometido en el cálculo del esfuerzo σ_{xx}	45
4.4 Longitud característica vs. Desplazamiento horizontal en el punto A.....	49
4.5 Curvas de convergencia del error relativo cometido en el cálculo de desplazamiento horizontal del punto A.....	49
4.6 Numero de nodos vs. Desplazamiento horizontal del punto A.....	50
4.7 Longitud característica vs. Desplazamiento horizontal del punto B.....	52
4.8 Curvas de convergencia del error relativo cometido en el cálculo de desplazamiento horizontal del punto B.....	52
4.9 Numero de nodos vs. Desplazamiento horizontal del punto B.....	53
4.10 Longitud característica vs. Flecha en el centro de la placa.....	56

4.11	Curvas de convergencia del error relativo cometido en el cálculo de la flecha en el centro de la placa.....	56
4.12	Numero de nodos vs. Flecha en el centro de la placa.....	57
4.13	Longitud característica vs. Flecha en el centro de la placa.....	60
4.14	Curvas de convergencia del error relativo cometido en el cálculo de la flecha en la esquina.....	60
4.15	Numero de nodos vs. Flecha en el centro de la placa.....	61
4.16	Longitud característica vs. Desplazamiento del punto A.....	64
4.17	Curvas de convergencia del error relativo cometido en el cálculo de desplazamiento del punto A.....	64
4.18	Numero de nodos vs. Desplazamiento del punto A.....	65
4.19	Longitud característica vs. Esfuerzo máximo en B.....	68
4.20	Curvas de convergencia del error relativo cometido en el cálculo del esfuerzo máximo en B.....	68
4.21	Numero de nodos vs. Esfuerzo máximo en B.....	69
4.22	Longitud característica vs. Desplazamiento del punto A.....	72
4.23	Curvas de convergencia del error relativo cometido en el cálculo de desplazamiento del punto A.....	72
4.24	Numero de nodos vs. Desplazamiento del punto A.....	73
4.25	Longitud característica vs. Desplazamiento del punto A.....	76
4.26	Curvas de convergencia del error relativo cometido en el cálculo de desplazamiento del punto A.....	76
4.27	Numero de nodos vs. Desplazamiento del punto A.....	77

INDICE DE TABLAS

Tabla		Pagina
2.1	Resumen de los esquemas de interpolación en dimensión uno.....	24
4.1	Numero de nodos en función de la longitud característica.....	43
4.2	Resultados obtenidos en cada discretización y en cada extrapolación.....	43
4.3	Error cometido en cada discretización y en cada extrapolación.....	43
4.4	Resultados de desplazamiento del punto A obtenidos en cada discretización y en cada extrapolación.....	48
4.5	Error cometido en el desplazamiento del punto A en cada discretización y en cada extrapolación.....	48
4.6	Resultados de desplazamiento del punto B obtenidos en cada discretización y en cada extrapolación.....	51
4.7	Error cometido en el desplazamiento del punto B en cada discretización y en cada extrapolación.....	51
4.8	Numero de nodos en función de la longitud característica.....	55
4.9	Resultados de la flecha en el centro obtenidos en cada discretización y en cada extrapolación.....	55
4.10	Error cometido en el cálculo de la flecha en el centro de la placa en cada discretización y en cada extrapolación.....	55
4.11	Numero de nodos en función de la longitud característica.....	55
4.12	Resultados de la flecha en la esquina de la placa obtenidos en cada discretización y en cada extrapolación.....	59
4.13	Error cometido en el cálculo de la flecha en la esquina de la placa en cada discretización y en cada extrapolación.....	59
4.14	Numero de nodos en función de la longitud característica.....	63
4.15	Resultados del desplazamiento del punto A obtenidos en cada discretización y en cada extrapolación.....	63
4.16	Error cometido en el desplazamiento del punto A en cada discretización y en cada extrapolación.....	63
4.17	Resultados del esfuerzo máximo en el punto B obtenidos en cada discretización y en cada extrapolación.....	67
4.18	Error cometido en el cálculo del esfuerzo máximo en B en cada discretización y en cada extrapolación.....	67
4.19	Numero de nodos en función de la longitud característica.....	71
4.20	Resultados del desplazamiento del punto A obtenidos en cada discretización y en cada extrapolación.....	71
4.21	Error cometido en el desplazamiento del punto A en cada discretización y en cada extrapolación.....	71

4.22	Numero de nodos en función de la longitud característica.....	75
4.23	Resultados del desplazamiento del punto A obtenidos en cada discretización y en cada extrapolación.....	75
4.24	Error cometido en el desplazamiento del punto A en cada discretización y en cada extrapolación.....	75

**APLICACIÓN DE TÉCNICAS DE EXTRAPOLACIÓN EN EL
CÁLCULO DEL ERROR DE DISCRETIZACIÓN
NESTOR L. GUERRERO.
UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL LISANDRO ALVARADO**

RESUMEN

Los resultados obtenidos por medio del método de los elementos finitos (MEF) raramente son exactos. Entre otras razones se encuentran: error del modelado matemático, error computacional, dividir una estructura en elementos cuyos campos de desplazamientos excluyen muchos de los posibles modos de deformación. Por lo tanto el análisis de estructura por medio de elementos finitos arroja una solución con un error de discretización desconocido. En este trabajo se aplican técnicas de extrapolación basadas en el método de Richardson con el cual se pueden predecir resultados o chequear errores en el análisis de estructuras por medio de elementos finitos. Los modelos matemáticos seleccionados corresponden a problemas de esfuerzos planos, placas y de sólidos en general; los cuales se discretizan con un patrón similar pero con diferentes números de elementos, luego se comparan estos resultados con la solución “exacta” determinando el error cometido en cada discretización. Con los resultados obtenidos en cada malla se aplican las ecuaciones de extrapolación y se verifica el manejo de configuración de mallas más adecuado. Adicionalmente se emplea la extrapolación basada en polinomios de interpolación. El proceso de extrapolación nos reduce notablemente el número de elementos empleados en las discretizaciones para obtener resultados dentro del margen de tolerancia aceptable y así evitar realizar mallas más finas, por lo tanto reducir tiempo y exigencia computacional al resolver un número menor de ecuaciones. En los problemas estudiados es posible la aplicación del proceso de extrapolación con una suficiente aproximación a la solución exacta, considerando que el error cometido es inversamente proporcional al número de elementos. Las curvas de convergencia de los desplazamientos presentan una tendencia monótonica de tipo parabólico hacia la solución exacta con pendientes cada vez menores, por lo que los polinomios interpolantes arrojan buenos resultados cuando h tiende a 0. Se concluye que las técnicas de extrapolación pudieran combinarse con procesos de refinamientos adaptativos en lugar de aplicar refinamientos uniformes.

CAPITULO I

INTRODUCCIÓN

Los resultados obtenidos por medio del método de los elementos finitos (MEF) raramente son exactos. Entre otras razones se encuentran: error del modelado matemático, error computacional, dividir una estructura en elementos cuyos campos de desplazamientos excluyen muchos de los posibles modos de deformación. El tipo, número y funciones de contorno de elementos pueden ser escogidos entre un amplio rango de posibilidades, y algunos son mejores que otros, es decir que el proceso de discretización (división de un continuo en elementos o subregiones apropiadas de comportamiento idealizados), depende de la persona que realiza el análisis. Por lo que cualquier solución es una aproximación. Se estima, según Zienkiewicz y Taylor [1], que esta aproximación proporcionará la solución exacta en el limite, si el tamaño de los elementos se va haciendo cada vez más pequeño. El análisis de estructura por medio de elementos finitos arroja una solución con un error de discretización desconocido.

Existe coincidencia entre varios autores como: Cook [2] y Weaver [3] que determinan el procedimiento a seguir para el análisis por el método de los elementos finitos de estructuras cuyos pasos se enumeran a continuación:

- 1.) Seleccionar una malla inicial.
- 2.) Formular las propiedades de cada elemento.

- 3.) Ensamblaje de los elementos para obtener el modelo en elementos finitos de la estructura.
- 4.) Aplicar las cargas conocidas y especificar como está soportada la estructura.
- 5.) Resolver las ecuaciones algebraicas lineales para determinar el valor de las incógnitas nodales.
- 6.) Analizar el comportamiento del modelo evaluando mediciones del error de discretización relativo.
- 7.) Seleccionar una nueva malla refinada en regiones de error máximo.
- 8.) Repetir el proceso hasta que la diferencia de dos análisis sucesivos este dentro de una tolerancia permitida.

Existen dos problemas asociados con este proceso. El primer problema se genera al realizar discretizaciones en discretizaciones ó mallas muy finas por lo que el número de grados de Libertad se incrementa a medida que las mallas se van refinando. En general dada una discretización del dominio del problema, las relaciones entre: Número de grados de libertad (GDL), número de nodos (N_n), número de elementos (N_e) y el tamaño del elemento (h) están dadas por [4]:

$$\begin{aligned} \text{GDL} &= kN_n \\ N_n &\propto N_e \propto 1/h^m \end{aligned} \quad (1.1)$$

Donde:

k = Valor dado por el número de GDL por nodo

m = Valor dado por la dimensión en la cual se trabaja:

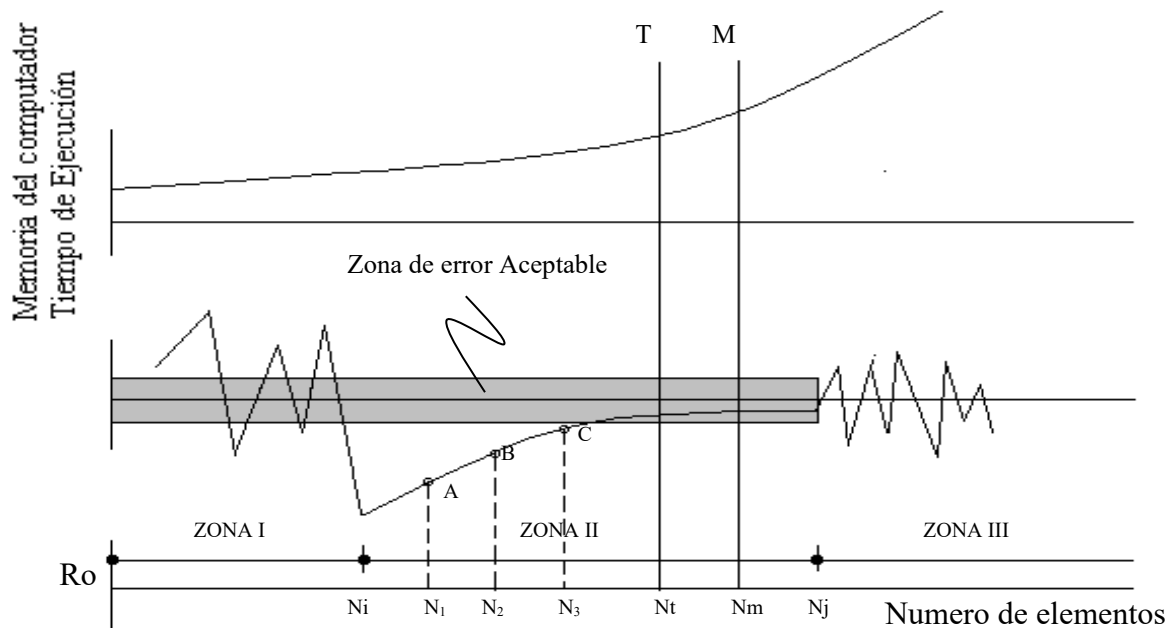
Modelos planos: $m=2$

Modelos espaciales: $m=3$

El sistema de ecuaciones lineales también se incrementará a medida que la malla sea refinada. Aún con una óptima numeración de las incógnitas nodales, la malla de elementos finitos pronto tendrá un tamaño impracticable desde el punto de vista computacional en términos de tiempo y almacenamiento. Las variaciones de los resultados con el incremento del número de elementos se muestran en la Figura 1.1 y muestra la existencia de tres zonas [5]:

- a) Cuando el número de elementos es pequeño ($N_e < N_i$) los resultados no son confiables, esta zona se ha denominado zona de representación impropia (zona I).
- b) El incremento en el número de elementos por encima de N_i lleva a una gradual convergencia de los resultados. Esta zona se conoce como zona de representación propia (Zona II).
- c) El incremento del número de elementos por encima de N_j conlleva la acumulación de errores por redondeo, y en consecuencia los resultados se desvían de los resultados correctos en lugar de haber convergido (zona III).

El número de elementos mínimo requeridos para un error aceptable es desconocido, por lo tanto la aplicación de los pasos para el análisis en elementos finitos anteriormente mencionado se aplica a un número indeterminado de mallas pero manteniendo un patrón de discretización similar hasta lograr que la variación en los resultados no sea mayor que la tolerancia prefijada. Esto requiere incrementar el tiempo de ejecución y exige más capacidad computacional. El segundo problema es la deducción en la exactitud por la concordancia de dos resultados de análisis consecutivos. En principio, la concordancia es



Zona I	Zona de representación impropia
Zona II	Zona de representación apropiada
Zona III	Zona de acumulación de error de redondeo
Ni	Numero de elementos en el cual comienza la convergencia hacia el resultado correcto
Nj	Numero de elementos en el cual comienzan la acumulación de errores comienza
M	Restricción por memoria del computador
T	Restricción por tiempo del computador
Nm	Numero máximo de elementos debido a memoria del computador
Nt	Numero máximo de elementos debido a tiempo de ejecución
Ro	Resultado correcto
N1,N2,N3	Numero de elementos en cada discretización

Figura. 1.1 Gráfica de resultados y errores en soluciones de problemas por MEF

posible cuando el error por redondeo anula en el error de discretización, en este caso los resultados, que son muy erróneos, pueden ser asumidos como precisos.

Por esta razón es deseable un método que permita estimar en forma confiable el error de discretización dentro de tolerancia aceptable y así evitar realizar discretizaciones con mallas muy finas. En este trabajo se plantea desarrollar un algoritmo basado en las técnicas de extrapolación de Richardson con el cual se pueda predecir resultados o chequear errores en análisis con elementos finitos y aplicar la calibración a los resultados del análisis. De este modo se obtiene la exactitud estimada del error de discretización en los resultados en los análisis por elementos finitos. La calibración involucra el proceso de agregar datos a los resultados del análisis de elementos finitos, que midan el error de discretización. La calibración en extrapolación implica el uso de dos ó más análisis para proveer medidas de la exactitud de resultados de un análisis particular por elementos finitos.

Los modelos involucran análisis elástico y estático de los elementos estudiados. Es de esperar que el proceso de calibración sea aplicable cualquier continuo, para casos estáticos, dinámicos y posiblemente problemas no lineales.

Bajo estas premisas se pudiera preguntar lo siguiente: ¿ sería posible conocer si los resultados obtenidos en una discretización se encuentran dentro de los límites de tolerancia aceptable?. ¿ Es posible predecir resultados de discretizaciones más finas o de la solución exacta por medio de configuraciones de mallas consecutivas?.

Las repuestas a estas interrogantes se pretenden responder con el desarrollo de la siguiente investigación por lo que se plantean los siguientes objetivos.

1.1 OBJETIVO GENERAL

Desarrollar un algoritmo de extrapolación basado en el método de Richardson con el cual se pueden predecir resultados o chequear errores en el análisis de estructuras por medio de elementos finitos, aplicando la calibración a los resultados de los análisis y discriminando el manejo de configuraciones de mallas más adecuado.

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1.2.1. Realizar modelos matemáticos de problemas de esfuerzos planos, placas y sólidos en general para discretizarlos con un patrón similar pero con diferentes números de elementos.

1.2.2. Comparar los resultados en cada tipo de problema planteado con una solución “exacta” determinando el error cometido en cada discretización.

1.2.3. Predecir resultados aplicando el método de extrapolación por medio de manejo de configuraciones consecutivas de mallas.

1.2.4. Verificar el manejo de configuraciones consecutivas de mallas más adecuado en el proceso de extrapolación.

1.3 UTILIDAD DEL ESTUDIO.

El proceso de extrapolación nos reduce notablemente el número de elementos empleados en las discretizaciones para obtener resultados dentro del margen de tolerancia aceptable y así evitar realizar discretizaciones de mallas más finas, por lo tanto reducir tiempo y exigencia computacional al resolver un número menor de ecuaciones, y por ultimo, se pudiera aplicarse a procesos de refinación adaptativos.

1.4 LIMITACIONES.

El número máximo de elementos a procesar en cada problema estará limitado por la capacidad del hardware ó software empleado para el análisis.

CAPITULO II

MARCO TEORICO

En este capitulo se describen los tipos de errores que se desarrollan en los problemas analizados por el método de elementos finitos para comprender la gran cantidad de factores involucrados al analizar un modelo estructural por MEF y las teorías de extrapolación para elementos finitos en general.

2.1 FUENTES DE ERROR

Según Cook [2] y Buenaño[6] un resumen de los tipos y fuentes de errores es el siguiente:

2.1.1 ERROR DEL MODELADO MATEMÁTICO

El error del modelado matemático puede ser definido como la diferencia entre las cantidades medidas del sistema físico y las cantidades obtenidas del modelo matemático. El análisis, numérico o analítico se lleva a cabo en el modelo matemático, el cual contiene una serie de suposiciones hechas en orden de simplificarlo, tales como: la definición de la geometría del dominio de la solución, las incógnitas envueltas en la solución, leyes de comportamiento, modelado de las condiciones de apoyo y límites de la magnitud de la respuesta entre otras. Este error es principalmente inherente a la ecuación diferencial que controla el modelo y no está relacionado con el error producido por la aproximación en elementos finitos.

2.1.2 ERROR COMPUTACIONAL.

Este error está dividido en dos tipos:

2.1.2.1 Error por redondeo.

Es aquel causado por el uso de un número finito de bits o dígitos para representar números reales. Otro factor de error que debe considerarse es el truncado o aproximación que se realiza al último dígito retenido.

2.1.2.2 Error por manipulación.

Son errores de redondeo introducidos por el algoritmo del programa empleado, dependiendo del tipo de operaciones a realizar y de la precisión numérica empleada.

2.1.3 ERROR DEBIDO A SINGULARIDADES

Este error debido a razones geométricas (tales como esquinas entrantes), cambios súbitos en las condiciones de apoyo, cambios repentinos en las cargas (fuerzas concentradas) y cambios bruscos en las propiedades de los elementos. La aproximación de elementos finitos es susceptible a este tipo de singularidad, por lo cual en estas zonas la malla debe estar adecuadamente refinada para evitar la aparición de grandes gradientes locales.

2.1.4 ERROR DE LA APROXIMACIÓN DEL FUNCIONAL

La solución aproximada de elementos finitos requiere que el campo de desplazamiento sea rigurosamente continuo en un orden menor que la derivada de mayor

orden del funcional, C^{m-1} , mientras que para satisfacer la ecuación diferencial es necesaria la continuidad de las derivadas hasta un orden de $2m-1$. Esto es debido a que las condiciones de borde esenciales involucran derivadas de orden **cero** a $m-1$, y las no esenciales derivadas de orden m hasta $2m-1$. Esta diferencia de los requerimientos de continuidad entre la aproximación de elementos finitos y la ecuación diferencial gobernante resulta en un error de la solución, la cual es exhibida por la discontinuidad en las condiciones no esenciales. Como se menciona anteriormente, la aproximación del campo de desplazamiento tiende hacia la solución exacta mientras el tamaño de los elementos decrece.

2.1.5 ERROR EN LA GEOMETRÍA.

Este error proviene de las discrepancias entre el dominio del problema físico y el representado por el sistema discreto de elementos finitos. Este sucede generalmente cuando las fronteras del dominio están formada por curvas o superficies más complejas que la de los elementos.

Este error puede ser minimizado mediante la refinación de los elementos en la frontera o por elementos con fronteras curvas. La solución de elementos finitos puede contener serios errores si las condiciones de compatibilidad entre la frontera de los elementos no son satisfechas, por lo tanto los solapamientos no son admisibles.

2.1.6 ERROR DE DISCRETIZACIÓN E ÍNDICE DE CONVERGENCIA

En la representación de un continuo matemático por elementos finitos, se selecciona el número, tipo y contorno de los elementos, localización de cargas y la representación de los apoyos restringiendo ciertos grados de libertad. La aproximación inherente en este proceso es llamada error de discretización. Una discretización desfavorable puede provocar dificultades numéricas posteriores.

Una simple regla para representar adecuadamente un continuo matemático, es que el volumen de la estructura discretizada debe ser correcto, esto es, si una región circular es modelada por un polígono de elementos de lados rectos, el polígono no debe ser ni inscrito ni circunscrito, esto quiere decir que los lados de los elementos deben interceptar al círculo de tal manera que el área del polígono sea igual al área del círculo.

La aproximación de los desplazamientos representados por la ecuación :

$$\mathbf{u} \cong \hat{\mathbf{u}} = \sum \mathbf{N}_i \mathbf{a}_i^e = [\mathbf{N}_i, \mathbf{N}_j, \dots] \{ \mathbf{a}_i \}^e = \mathbf{N} \mathbf{a}^e \quad (2.1)$$

Donde

$\mathbf{u}$ = Campo de desplazamientos.

$\hat{\mathbf{u}}$ = Campo de desplazamientos discretizados

$\mathbf{N}$ = Matriz de funciones de posición

$\mathbf{a}^e$ = Vector de desplazamiento nodales del elemento

Nos proporcionará la solución exacta en límite, si el tamaño de los elementos se va haciendo cada vez más pequeño la explicación se basa en :

a) Dado que el desarrollo es capaz de reproducir en el cualquier en el límite cualquier distribución de desplazamiento concebible dentro del continuo, y además, como

la solución de cada aproximación es única, aquél debe proporcionar en él límite, cuando $h \rightarrow 0$, la solución exacta.

b) La solución exacta puede alcanzarse con un número finito de subdivisiones (Incluso con un solo elemento) si el desarrollo polinómico utilizado para ese elemento puede ajustarse exactamente a la solución correcta.

Dado que la solución exacta puede desarrollarse en serie polinómica en las proximidades de cualquier punto i :

$$u_i = u_i + \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] (x - x_i) + \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right] (y - y_i) + \dots \quad (2.2)$$

Si en el interior de un elemento de tamaño h se emplea un desarrollo polinómico de grado p , este podrá ajustarse localmente al desarrollo de Taylor hasta dicho grado y, como X e Y son del orden de magnitud de h , el error en u será del orden $O(h^{p+1})$.

Mediante un argumento similar, las deformaciones (o las tensiones) que vienen dadas por las derivadas m -ésimas de los desplazamientos, convergerán con un error de $O(h^{(p+1-m)})$. La energía de deformación que viene dada por el cuadrado de las tensiones exhibirá un error de $O(h^{2(p+1-m)})$.

La determinación del grado de convergencia basta para extrapolar la solución hasta el resultado correcto. Esta metodología fue introducida originalmente por Richardson y es de gran utilidad si la convergencia es monotónica [1].

2.2 LITERATURA SOBRE LA EXTRAPOLACIÓN

Esta sección revisa la literatura que pertenece a la extrapolación, tomando como referencia las investigaciones realizadas por Bolkhir [7]. En la primera parte se revisa la historia y la teoría moderna de extrapolación. Se concluye acerca de la aplicación de algoritmos de extrapolación a problemas específicos.

En la segunda parte se hace un análisis de la extrapolación a los resultados de análisis por medio de elementos finitos.

2.2.1 LITERATURA MATEMÁTICA.

Joyce indica que Arquímedes usó la extrapolación en 250 a.C., para obtener límites de π , para calcular los perímetros de polígonos regulares, inscribiendo y circunscribiendo un círculo de diámetro de unidad. El también revisa literatura matemática inglesa, Alemana y francesa y reporta que Aryabhata en 530, Viète en 1.579, Romanus en 1.593, y Furgón Ceulen en 1.610, emplearon el método de Arquímedes para mejorar la aproximación de π .

Richardson y Gaunt describen un método de extrapolación polinómica para acelerar la convergencia de soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Los otros investigadores muestran aplicaciones del método de Richardson a procesos de aproximación diferentes. Henrici muestra que Romberg usó el método de Richardson para desarrollar un algoritmo de extrapolación para una integración numérica. Bolton y Scoins describen un método de extrapolación para sucesiones generales. Gratt

investiga los fundamentos de la extrapolación de Richardson, y describe algoritmos de extrapolación para problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias con valores iniciales.

Hartare y Womersley sugieren un método para resolver ecuaciones diferenciales parciales de tipo parabólica usando método de diferencias finitas y mejoran las soluciones aproximadas con extrapolación polinómica.

Wason, Fox y Mayers, Salvadori y Barón informan experimentación numérica y sacan conclusiones sobre la extrapolación de polinómica. Wason indica que las extrapolaciones son sensibles al error cerca del frontera e indica que esa exactitud puede variar significativamente dependiendo de la fórmula de extrapolación empleada cerca de la frontera. Fox y Mayers observan que la validez de extrapolación depende de la forma de la ecuación diferencial así como también su solución. Salvadori y Barón aplican extrapolación polinómica a valores de contorno y problemas de autovalores en ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales. Ellos observan que la extrapolación no debería usarse cuando los acercamientos consecutivos no se acercan al verdadero valor monotónicamente, en tal caso, los términos más altos de la serie de error, no puede despreciarse.

Richardson, Henrici, Gragg, y Romberg dan contribuciones importantes a la teoría de extrapolación de polinómica. Cada uno prueba que los errores, para cada ecuación diferencial particular y método de discretización, varían asintóticamente. Richardson demuestra que el uso de diferencias centrales en la discretización de algunos problemas de frontera conduce a una expansión del error asintótico. Henrici demuestra que un método de discretización de orden p se usa para resolver los problemas de valores iniciales en ecuaciones diferenciales ordinarias bajo ciertas condiciones de continuidad y diferenciabilidad, el error en la solución aproximada tiene un comportamiento asintótico en

el límite. Gragg describe la "regla del punto medio" en la discretización de problemas de valores iniciales en ecuaciones diferenciales ordinarias para demostrar la existencia de expansión del error asintótico en potencias de h^2 . Henrici demuestra que la aproximación trapezoidal de Romberg tiene una expansión del error en potencias del tamaño del paso (h), bajo suposiciones apropiadas de regularidad de los integrandos de una integral definida. Bulirsch y Stoer aplican extrapolación polinómica racional para obtener límites superiores e inferiores de una integral definida. Ellos demuestran la extrapolación con base en las funciones racionales darán frecuentemente resultados más precisos que los basados en funciones polinómicas.

Jacobs discute los métodos de extrapolación más eficiente para resolver problemas iniciales y de fronteras en ecuaciones diferenciales ordinarias.

Así, la literatura da a conocer, que:

- (1) Las funciones de Polinomio proveen la base de casi toda la investigación.
- (2) Problemas de valores iniciales y de fronteras en ecuaciones diferenciales son el blanco primario de las aplicaciones de método de extrapolación.
- (3) Las aplicaciones indican que el éxito de extrapolación depende del tipo del problema, naturaleza de la discretización, y la elección de las bases de la extrapolación.
- (4) Los desarrollos teóricos enfocan en probar que la forma del error es una serie asintótica para un problema particular y método de discretización.

La fortaleza de la tecnología de extrapolación es que a pesar de poca teoría, hay la evidencia considerable de uso exitoso de extrapolación polinómica en problemas de valores de frontera.

2.2.2 LITERATURA EN INGENIERÍA.

Melosh y Merritt aplican extrapolación para mejorar la exactitud de resultados del análisis por elementos finitos. Ellos extrapolan las deflexiones de una viga cajón, sobre la suposición que el error es proporcional a h^2 . Entonces el error en los resultados de los análisis se reduce de 1.5% a 0.8%.

Heise aplica extrapolación a soluciones de elementos finitos en problemas de torsión. Basados en soluciones exactas conocidas, él presentó los errores relativos en momentos torsionantes y esfuerzos cortantes en secciones: rectangulares, forma L y secciones en cruz. El error en los resultados por elementos finitos, los cuales están basados en elementos cuadráticos, se asume que son proporcionales a h^2 y h para momentos torsionantes esfuerzos cortantes respectivamente. Sus resultados muestran que mejoraron exactitud de la solución (a ciertos puntos en la frontera) usando extrapolación.

Zienkiewicz, Kelly, Gago y Babushka informa sobre la identificación del error de discretización en una solución de elemento finito y definición del proceso de refinamiento optimo. Ellos muestran error local estimado para los esfuerzos en una membrana con un hoyo circular. Estos errores estimados se basan en soluciones obtenidas en mallas refinadas y extrapolación h^2 de Richardson.

Zienkiewicz indica que la mera determinación del orden de que convergencia frecuentemente basta para extrapolar la solución los resultados correctos. Él provee datos no experimentales para apoyar esta conclusión.

Melosh y Utku concluyen que la extrapolación puede proveer razones obligadas para el uso de mallas regulares. Ellos, usando las experimentaciones numéricas, también concluyen que son necesarios más de dos análisis para obtener una exactitud deseada, la extrapolación hace mallas regulares más eficientes que el desarrollo de los resultados por cualquier otra malla.

Melosh prueba que la convergencia monotónica de las soluciones por elementos finitos (energía de deformación) debe ocurrir para varios tipos de elementos.

Melosh y Lobitz describen las bases para una prueba para convergencia monotónica de cualquier modelo de elemento finito. La idea esencial de esta prueba, es que si un elemento subdividido puede dar la misma predicción de la respuesta en cualquier lado en el dominio como en el elemento subdividido, entonces la convergencia monotónica de la norma energética está garantizada.

2.3 TEORÍAS DE EXTRAPOLACIÓN

En esta sección se describen las teorías de extrapolación para elementos finitos en general. La primera sección presenta una teoría general de extrapolación escalar y luego la teoría de extrapolación de Richardson.

2.3.1 EXTRAPOLACIÓN ESCALAR

Supongamos que $\mathcal{O}(h)$ denota el valor aproximado de una función obtenida por un método de discretización numérica con un paso de longitud $h \neq 0$. El valor exacto $\mathcal{O}(0)$ es

aproximado por el valor extrapolado $\varnothing_m(0)$ de una interpolación polinómica $\varnothing_m(h)$ satisfaciendo:

$$\varnothing_m(h_j) = \varnothing(h_j). \quad J = 0, 1, 2, \dots, m \quad (2.3)$$

Y por una secuencia de h_j con tamaño de paso que tienden a 0.

El grado de exactitud con la cual una función puede ser aproximada por un polinomio, depende en el cumplimiento de la condición de Lipschitz. Esta condición establece que una función real evaluada $\varnothing$ de una variable real satisface la condición de Lipschitz con constante k en un conjunto de A sí, para cada h_1, h_2 y un elemento de A

$$ABS\{[\varnothing(h_1) - \varnothing(h_2)]/[h_1 - h_2]\} < k \text{ para } h_1 \neq h_2 \quad (2.4)$$

Sí una función satisface la condición de Lipschitz, entonces la continuidad uniforme está garantizada. Por esta razón las funciones polinómicas dan buenas aproximaciones para esta función.

2.3.1.1 Teoría general de extrapolación escalar.

Si asumimos que la función a ser considerada es aproximada por un polinomio en la forma:

$$\varnothing(h) = \varnothing(0) + \sum_{j=1}^{\infty} a_j h^{\lambda_j} \quad J = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.5)$$

$\varnothing(0)$ = Valor de la función en $h = 0$

a_j = Constante desconocida independiente de h

λ_j = Un entero

El lado izquierdo de la ecuación representa la diferencia entre el valor aproximado de la función y el valor de la función con $h = 0$, si asumimos que los λ_j son conocidos, y $\varnothing(h)$ es evaluada para dos diferentes valores de h (h_1 y h_2) tal que $h_1 > h_2$ se tiene que:

$$\begin{aligned}\varnothing(h_1) - \varnothing(0) &= \sum_{j=1}^{\infty} a_j h_1^{\lambda_j} & J = 0, 1, 2, 3, \dots \\ \varnothing(h_2) - \varnothing(0) &= \sum_{j=1}^{\infty} a_j h_2^{\lambda_j} & J = 0, 1, 2, 3, \dots\end{aligned}\quad (2.6)$$

Si los términos con potencia más grande que λ_1 son despreciables con los términos comparados con potencia λ_1 la ecuación se reduce a:

$$\begin{aligned}\varnothing(h_1) - \varnothing(0) &= a_1 h_1^{\lambda_1} \\ \varnothing(h_2) - \varnothing(0) &= a_2 h_2^{\lambda_1}\end{aligned}\quad (2.7)$$

Resolviendo las ecuaciones (2.5) se obtiene:

$$\varnothing(0) = \frac{h_1^{\lambda_1} \varnothing(h_2) - h_2^{\lambda_1} \varnothing(h_1)}{h_1^{\lambda_1} - h_2^{\lambda_1}}\quad (2.8)$$

si se considera:

$$\rho = \frac{h_1}{h_2} = \frac{h_i + 1}{h_i} \quad \rho < 1\quad (2.9)$$

Se tiene una ecuación más cómoda

$$\varnothing(0) = \frac{\varnothing(h_2) - \rho^{\lambda_1} \varnothing(h_1)}{1 - \rho^{\lambda_1}}\quad (2.10)$$

En algunos casos, se obtiene mejores aproximaciones considerando términos de potencia λ_1 y λ_2 . En este caso el valor extrapolado se obtiene resolviendo tres ecuaciones lineales con longitud de paso h_1, h_2 y h_3 , por lo tanto

$$\begin{aligned}\varnothing(h_1) - \varnothing(0) &= a_1 h_1^{\lambda_1} + a_2 h_1^{\lambda_2} \\ \varnothing(h_2) - \varnothing(0) &= a_1 h_2^{\lambda_1} + a_2 h_2^{\lambda_2} \\ \varnothing(h_3) - \varnothing(0) &= a_1 h_3^{\lambda_1} + a_2 h_3^{\lambda_2}\end{aligned}\tag{2.11}$$

Resolviendo estas ecuaciones se obtienen valores extrapolados de la función en los siguientes términos

$$\varnothing(0) = \frac{\varnothing(h_2, h_3) - \rho^{\lambda_2} \varnothing(h_1, h_2)}{1 - \rho^{\lambda_2}}\tag{2.12}$$

donde

$$\varnothing(h_1, h_2) = \frac{\varnothing(h_2) - \rho^{\lambda_1} \varnothing(h_1)}{1 - \rho^{\lambda_1}}\tag{2.13}$$

$$\varnothing(h_2, h_3) = \frac{\varnothing(h_3) - \rho^{\lambda_1} \varnothing(h_2)}{1 - \rho^{\lambda_1}}\tag{2.14}$$

En general, el procedimiento puede ser usado para evaluar las constantes de ajuste para cualquier número de términos retenidos en las series, el resultado toma la forma siguiente:

$$\begin{aligned}\varnothing(0) &= \frac{\varnothing(h_2, h_3, \dots, h_{m+1}) - \rho^{\lambda_m} \varnothing(h_1, h_2, \dots, h_m)}{1 - \rho^{\lambda_m}} \\ \varnothing(h_2, h_3, \dots, h_{m+1}) &= \frac{\varnothing(h_2, h_3, \dots, h_m) - \rho^{\lambda_{m-1}} \varnothing(h_2, h_3, \dots, h_m)}{1 - \rho^{\lambda_{m-1}}}\end{aligned}\tag{2.15}$$

$$\varnothing(h_1, h_2, \dots, h_m) = \frac{\varnothing(h_2, h_3, \dots, h_m) - \rho^{\lambda_{m-1}} \varnothing(h_1, h_2, \dots, h_{m-1})}{1 - \rho^{\lambda_2}}$$

y m es el número de términos retenidos en la s series.

Obsérvese que la ecuación (2.5) da las bases para el ajuste, tan preciso como desee, para cualquier función continua de error. Esto quiere decir que la función $\varnothing$ no necesita ser un polinomio, pero la función de error si es considerada como un polinomio de términos de h.

2.3.2 EXTRAPOLACIÓN DE RICHARDSON

Richardson observa que el uso de formulas de diferencia central para derivadas en los métodos de diferencia finita llevan a menudos a errores en la solución aproximada, los cuales pueden ser expresados en la forma siguiente:

$$E(h) = a_2 h^2 + a_4 h^4 + a_6 h^6 + \dots \quad (2.16)$$

El también sugiere que como los coeficientes son despreciables cuando h es lo suficientemente pequeño entonces $E(h) = a_2 h^2$ es una buena aproximación para la sumatoria al infinito de la ecuación anterior.

El valor extrapolado es expresado en la forma

$$\varnothing(0) = \frac{h_1^2 \varnothing(h_2) - h_2^2 \varnothing(h_1)}{h_1^2 - h_2^2} \quad (2.17)$$

Otro tipo de extrapolación de Richardson se obtiene combinando tres aproximaciones con tres valores diferentes de h de la forma siguiente:

$$\varnothing(h_1) - \varnothing(0) = a_2 h_1^2 + a_4 h_1^4 \quad (2.18)$$

$$\varnothing(h_2) - \varnothing(0) = a_2 h_2^2 + a_4 h_2^4$$

$$\varnothing(h_3) - \varnothing(0) = a_2 h_3^2 + a_4 h_3^4$$

la solución de ese sistema de ecuaciones da el valor extrapolado de una función de la siguiente forma.

$$\varnothing(0) = \frac{\varnothing(h_1)h_2^2 h_3^2(h_2^2 - h_3^2) - \varnothing(h_2)h_1^2 h_3^2(h_1^2 - h_3^2) + \varnothing(h_3)h_1^2 h_2^2(h_1^2 - h_2^2)}{(h_1^2 - h_3^2)(h_2^2 - h_3^2)(h_1^2 - h_2^2)}$$

Este tipo de extrapolación es conocida como extrapolación h^4 .

2.4 FUNCIONES DE INTERPOLACIÓN

Una función de interpolación es aquella que pasa a través de puntos dados como datos, los cuales se muestran usualmente en forma tabular [8]. Existen diferentes métodos para lograr determinar esta función, siempre y cuando la función sea continua y de una variable independiente [9].

La interpolación de los datos puede hacerse mediante un polinomio, función trigonométrica, funciones spline o las series de Fourier entre otras posibles formas. El caso más simple a estudiar es el de un polinomio de grado n .

Entre las ventajas del uso de polinomios como funciones aproximantes se encuentran:

1. Son fácilmente evaluables y sus sumas, productos y diferencias siguen siendo polinomios.

2. Los polinomios pueden ser derivables e integrables fácilmente y los resultados siguen siendo polinomios.
3. Si el origen de coordenadas es cambiado o si la escala de la variable independiente es cambiada, el resultado sigue siendo un polinomio, es decir, $P_n(x)$ es un polinomio, también lo serán $P_n(x+a)$ y $P_n(ax)$.

El criterio de que la función interpolante debe tener un valor igual a la función tabular dada significa, que el polinomio $P_n(x)$ de grado n debe reproducir exactamente a la función $f(x)$ en los $n+1$ argumentos para cuando $x = x_i$, siendo $i = 0, \dots, n$. El polinomio es siempre de un grado menor que el número de puntos por donde pasa.

La Tabla 2.1 da un resumen de los diferentes esquemas de interpolación.

La extrapolación polinómica es exactamente igual a la interpolación polinómica, excepto que el polinomio ajustado se utiliza fuera de los dos puntos extremos de los datos.

En el dominio donde no se conoce la función, pero se cree que está bien representada, se utiliza la extrapolación extendiendo el uso de una fórmula de interpolación.

Al utilizar una extrapolación, hay que decidir el orden del polinomio a utilizar y que tanto se extenderá la extrapolación. La extrapolación funciona de manera confiables si un análisis teórico de la función por extrapolar indica un orden en particular a emplear.

En general, el error de extrapolación crece al alejarse el punto de interés de los puntos dados. Si se utiliza una interpolación de orden superior para la extrapolación sin tener una base teórica, los errores pueden crecer rápidamente al aumentar el orden del polinomio.

Esquema de interpolación	Ventajas	Desventajas
Interpolación de Lagrange	Forma conveniente. Fácil de programar.	Difícil de manejar para los cálculos manuales
Interpolación de Newton	El orden del polinomio puede cambiarse sin problemas. La evaluación del error es fácil.	Se debe preparar una tabla de diferencias o de diferencias divididas.
Interpolación de Lagrange mediante puntos de Chebyshev	Los errores se distribuyen más uniformemente que en la malla que presenta igual separación.	Los puntos de la malla no están distribuidos de manera uniforme.
Interpolación de Hermite	Alta precisión debido a que el binomio se ajusta también a las derivadas.	Necesita los valores de las derivadas.
Spline cúbico	Aplicable a cualquier número de datos.	Se necesitan resolver ecuaciones simultáneas.

Tabla 2.1 Resumen de los esquemas de interpolación en dimensión uno.

CAPITULO III

MARCO METODOLOGICO

En este capítulo se indicará el procedimiento a utilizar para lograr los objetivos de esta investigación, enfatizando en los elementos que conforman dicho proceso.

3.1 EJEMPLOS NUMÉRICOS.

Para lograr el objetivo específico planteado No. 1, se escogerán tres tipos de problemas para el análisis, estos son: Problema de esfuerzos planos, problemas de placas y problemas de sólidos tridimensional. En la selección de estos problemas se considera el conocer la solución matemática o “exacta” para analizar el orden de la convergencia de cada discretización y del proceso de extrapolación.

En cada problema se realizarán discretizaciones en donde, los elementos de cada una de ellas, servirán de base para la siguiente discretización y se mantiene un patrón, tal que pueda obtenerse resultados para comparar con la anterior.

3.1.1 PROBLEMA DE ESFUERZOS PLANOS.

El problema numérico escogido en esta clasificación, es el de una viga empotrada con un agujero central, sometida a una carga distribuida a tracción en el extremo libre. Debido al cambio de sección, se genera una distribución de esfuerzos no uniforme con un valor máximo en las proximidades del agujero, en donde la relación entre el esfuerzo normal máximo y normal medio se llama factor de concentración de esfuerzos y se designa con K_T [10], esto es

$$K_T = \sigma_{\max} / \sigma_{\text{med}} \quad (3.1)$$

Donde σ_{med} se refiere al esfuerzo normal medio en la sección a través del agujero, o sea, al valor calculado con base en el área reducida. El valor del factor de concentración de esfuerzos depende del tamaño del agujero respecto a ancho de la viga y se puede obtener de la gráfica en la Figura 3.1.

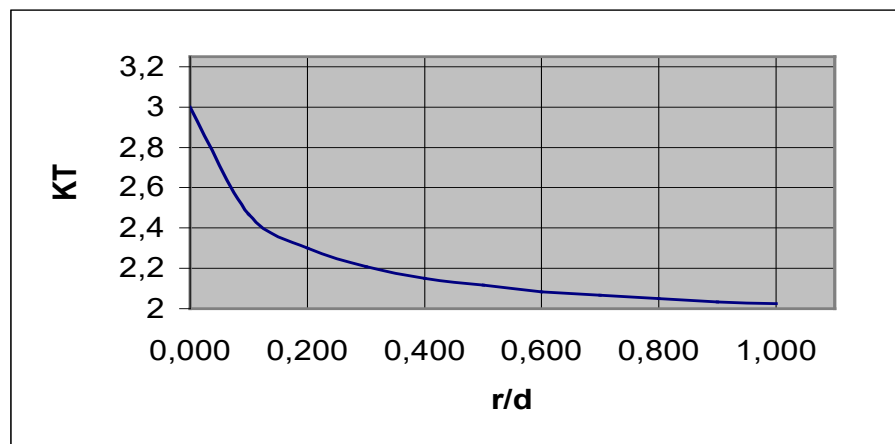


Figura. 3.1 Factor de concentración de esfuerzos para un agujero central en una placa sometida a tensión. r = radio del agujero, d = altura efectiva

El parámetro que rige en el valor de K_T es la relación r/d . El valor máximo ocurre para un agujero pequeño ($r/d \rightarrow 0$) y es aproximadamente igual a 3.0. Para un agujero grande ($r \approx d$), K_T es aproximadamente igual 2.0.

Las características del material son: modulo de elasticidad $E=1 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$ y modulo de Poisson $\mu = 0.25$. La carga distribuida $p= 10.00 \text{ Kg./cm}$. Las dimensiones de la viga son: $l=16.00 \text{ cm}$ $b=0.10 \text{ cm}$, $h=6.00 \text{ cm}$ y el agujero tiene un radio $r=2.00 \text{ cm}$. Se plantea analizar el comportamiento del esfuerzo normal en la parte superior del agujero, el desplazamiento horizontal del punto ubicado en el centro del extremo libre (punto A) y el desplazamiento del punto B, ubicado en el contorno del agujero.

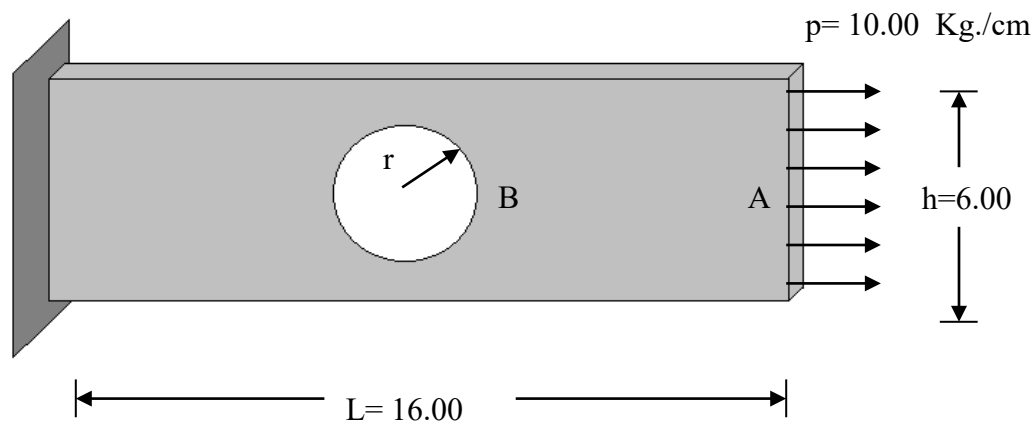


Figura. 3.2. Viga empotrada sometida a carga axial en el extremo libre

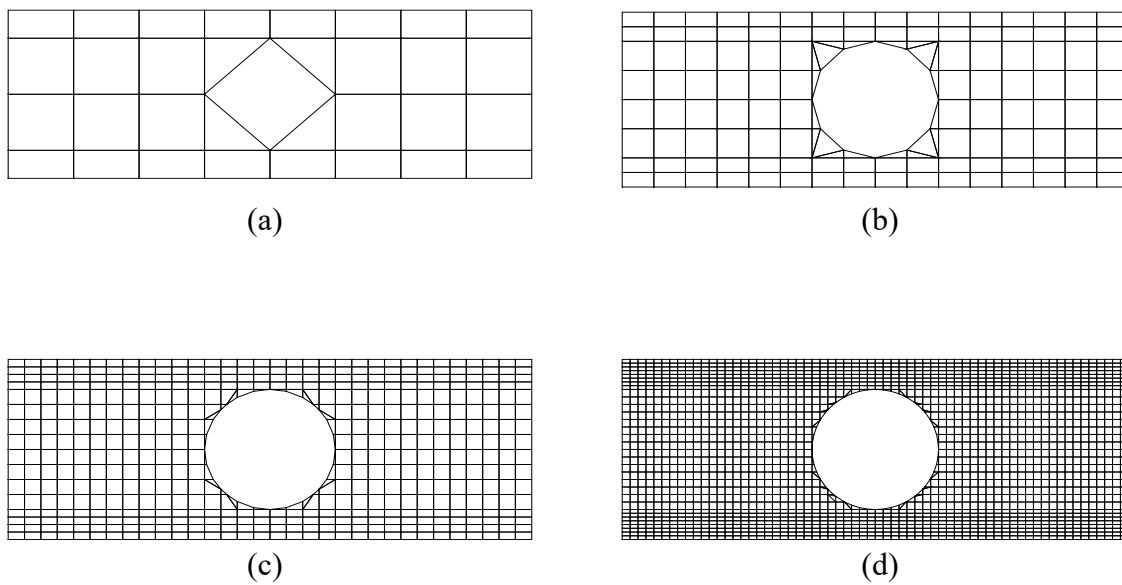


Figura. 3.3. Discretización de la viga del problema 1: (a) malla 1; (b) malla 2; (c) malla 3; (d) malla 4

El patrón de discretización a seguir comenzará con una malla de solo 44 nodos y 32 elementos (malla 1), la segunda malla tendrá 152 nodos y 132 elementos (malla 2), la tercera 540 nodos y 488 elementos (malla3) y la ultima será de 2008 nodos y 2000 elementos (malla4).

3.1.2 PROBLEMA DE FLEXIÓN EN PLACAS.

3.1.2.1 Placa cuadrada simplemente apoyada Con una carga puntual en el centro.

Se escoge una placa cuadrada de 20 cm x20 cm y de espesor $h= 0.20$ cm, con una carga concentrada $P = 1000$ Kg aplicada en el centro. La solución exacta de la flecha máxima viene dada por la expresión $\omega = \alpha P a^2 / D$ [11]. Donde α es un factor que está en función de las dimensiones de la placa, P es la magnitud de la carga concentrada, a es el ancho de la placa y D es la rigidez a flexión de la placa y está dada por la expresión:

$$D= Eh^3 / [12(1-\mu^2)] \quad (3.2)$$

Las características del material son: modulo de elasticidad $E=2.1 \times 10^6$ y el modulo de Poisson $\mu = 0.25$. En este caso se analizará el desplazamientos en el punto de aplicación de la carga y se verificará con el valor exacto. La discretización comenzará con una malla inicial de 2x2, luego 4x4 y así sucesivamente hasta llegar 32x32 elementos.

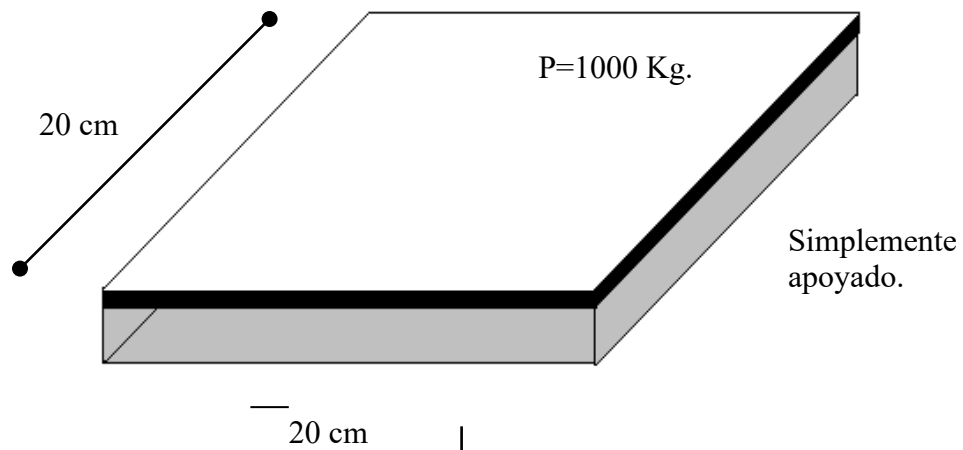


Figura. 3.4 Placa simplemente apoyada con una carga concentrada en el centro.

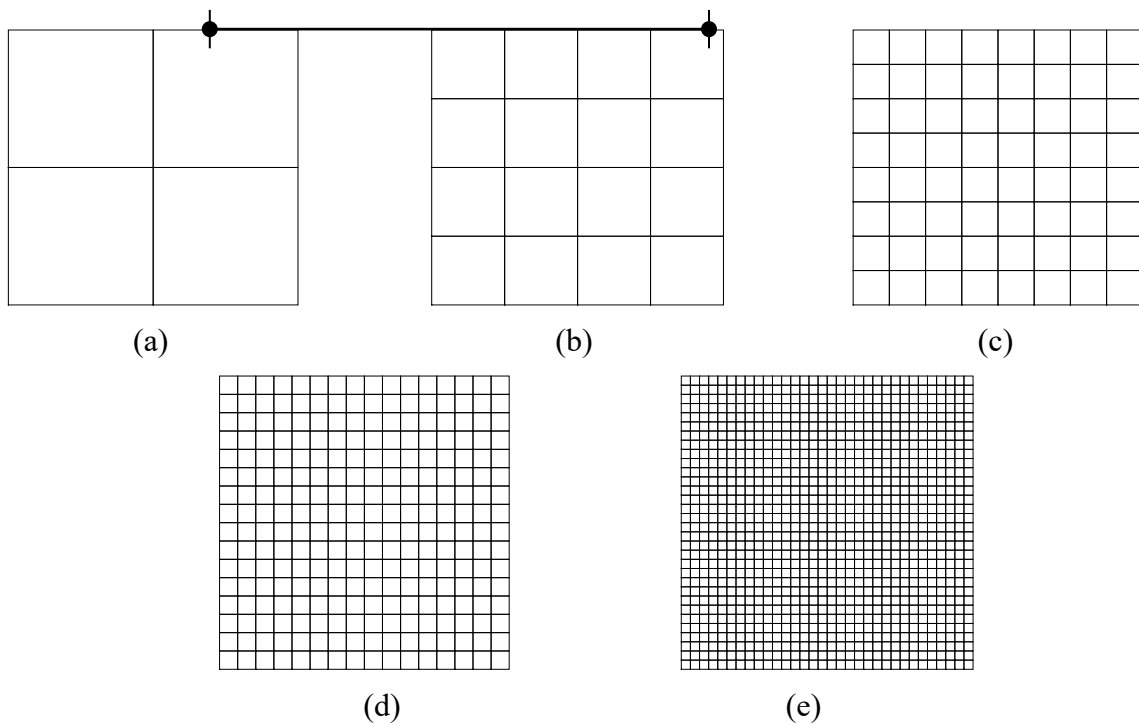


Figura. 3.5 Discretización de la placa del problema 2: (a) malla 1; (b) malla 2; (c) malla 3; (d) malla 4 y (e) malla 5.

3.1.2.2 Placa con un borde empotrado y el resto libre. Con una carga puntual en una esquina.

Se tiene una placa cuadrada de 20 cm x 20 cm y espesor $h=0.50$ cm con un borde empotrado y el resto libre, a la que se le aplica una fuerza concentrada $P=1000$ kg en una esquina. El material tiene las siguientes características: modulo de elasticidad $E=2.1 \times 10^6$ kg/cm² y modulo de Poisson $\mu = 0.25$.

En este caso el valor exacto del desplazamiento en cualquier punto no se conoce, por lo tanto se considerará como valor “exacto” los resultados obtenidos en la malla de mayor refinamiento. Se analizará el desplazamientos vertical del punto de aplicación de la fuerza.

La discretización comenzará con una malla inicial de 1x1, luego 2x2 y así sucesivamente hasta llegar 32x32 elementos.

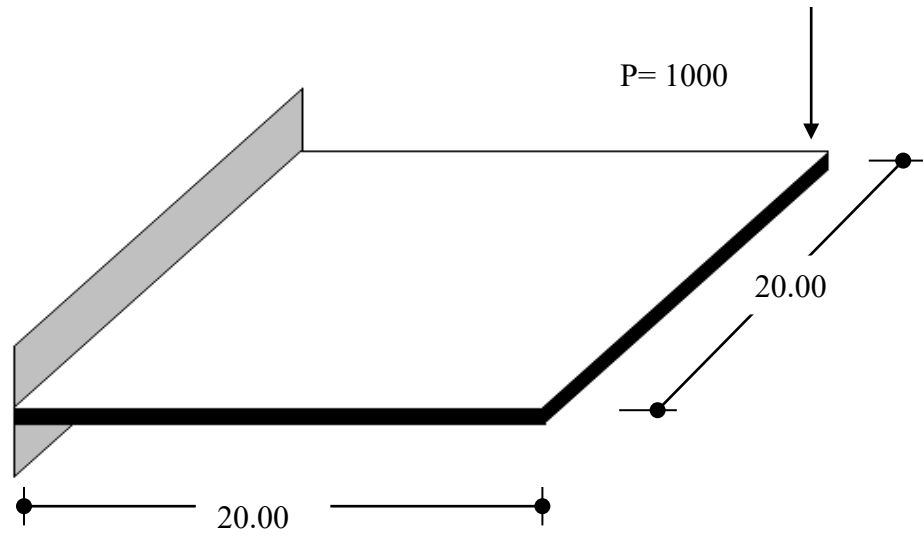


Figura. 3.6 Placa empotrada con una carga aplicada en una esquina.

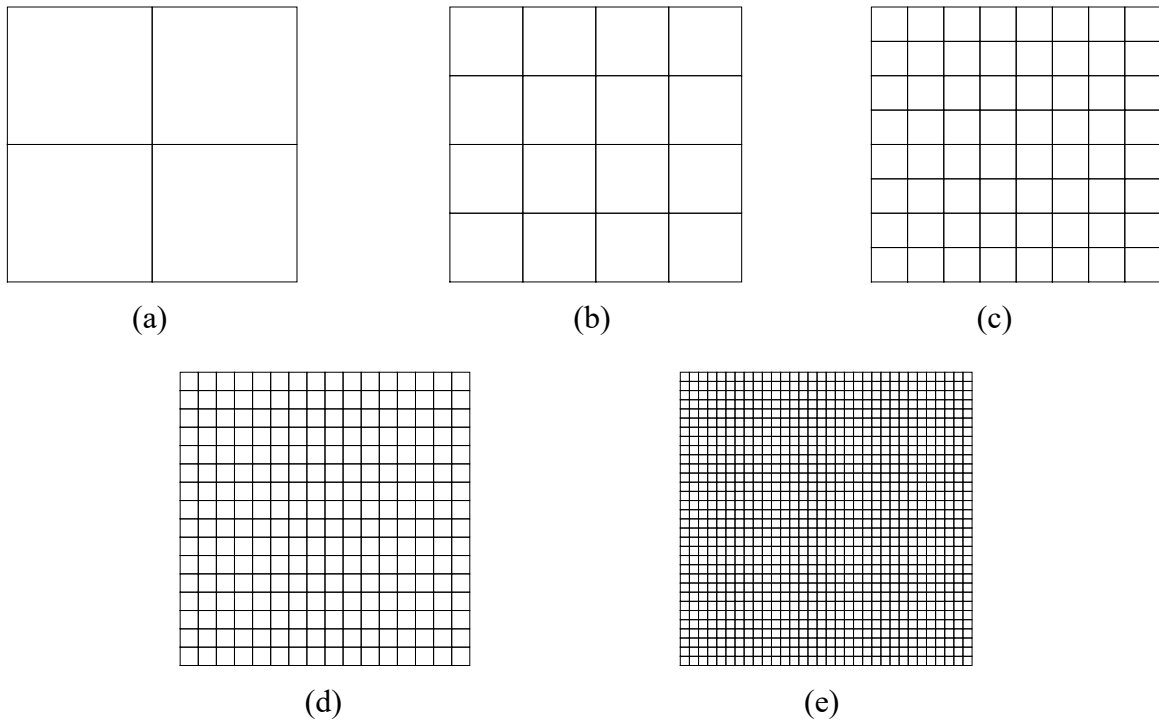


Figura. 3.7 Discretización de la placa del problema 3: (a) malla 2; (b) malla 3; (c) malla 4; (d) malla 5 y (e) malla 6.

3.1.3 PROBLEMA DE SÓLIDOS EN GENERAL.

3.1.3.1 Viga corta en voladizo con una carga de corte distribuida en extremo libre.

El primer problema seleccionado con elementos de sólido, es una viga en voladizo con una carga de corte distribuida en el extremo libre. La viga posee las siguientes dimensiones: largo $l=2$ cm, ancho $a=0.5$ cm y alto $h=1$ cm. La solución exacta para el desplazamiento vertical en el extremo libre, debe tomar en cuenta, aparte del desplazamiento por flexión, el desplazamiento vertical por el cortante, de esta manera el desplazamiento total está dado por [10]:

Donde:

$$v_t(L) = -\frac{PL^3}{3EI} - \frac{PL}{KAG} \quad (3.3)$$

$$v_t(L) = -\left(\frac{PL^3}{3EI}\right)\left(1 + \frac{3EI}{kAGL^2}\right) \quad (3.4)$$

E = Modulo de elasticidad.

G = Modulo de corte.

A = Area de la sección.

I = Momento de inercia de la sección.

P = Carga actuante.

k = Factor que depende de la forma de la sección transversal.

Se considera el modulo de elasticidad $E= 2 \times 10^6$ y el modulo de poisson $\nu=0.20$ y $k= 5/6$ por ser de sección rectangular.

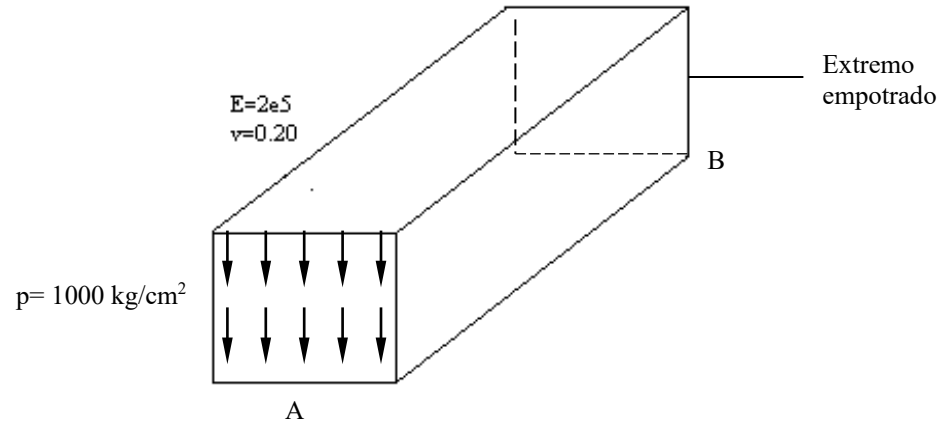


Figura. 3.8. Viga empotrada con carga distribuida en el extremo libre.

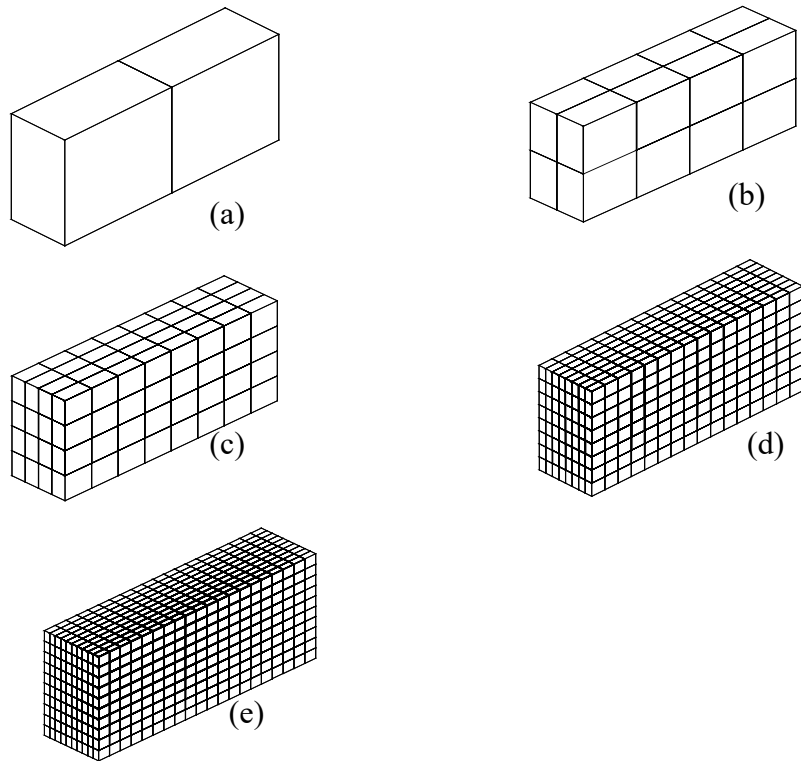


Figura. 3.9. Discretización de la viga del problema 4: (a) malla 1; (b) malla 2; (c) malla 3; (d) malla 4; (e) malla 5

En este caso se analizarán el desplazamiento en el punto A, el cual corresponde con la parte central de la arista inferior del extremo libre, para compararlo con el valor teórico y el esfuerzo máximo en el punto B.

El patrón de discretización a seguir comenzará con una malla de 9 nodos y 2 elementos (malla 1), la segunda malla tendrá 45 nodos y 16 elementos (malla 2), la tercera malla 225 nodos y 128 elementos (malla3), la cuarta malla 1377 y 1024 elementos (malla 4) y la ultima será de 9537 nodos y 8192 elementos (malla 5).

3.1.3.2 Viga con empotramiento defectuoso sometida a carga uniforme.

El segundo problema seleccionado con elementos de sólido, es una viga en voladizo que soporta una carga uniforme con condiciones de apoyo poco convencional, ya que el empotramiento es no es en toda la cara, como se muestra en la Figura. 3.9. Las dimensiones de la viga son: largo $l=2$ cm, ancho $a=0.5$ cm y alto $h=1$ cm.

En este caso el valor exacto del desplazamiento en cualquier punto no se conoce, por lo tanto se considerará como valor “exacto” los resultados obtenidos en la malla de mayor refinamiento. De igual manera que en el problema anterior se analizará el desplazamiento en el punto A.

El patrón de discretización a seguir comenzará con una malla de 9 nodos y 2 elementos (malla 1), la segunda malla tendrá 45 nodos y 16 elementos (malla 2), la tercera malla 225 nodos y 128 elementos (malla3), la cuarta malla 1377 y 1024 elementos (malla 4) y la ultima será de 2541 nodos y 2000 elementos (malla 5).

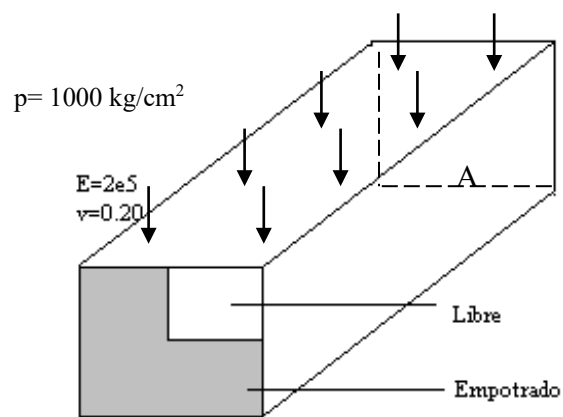


Figura. 3.10. Viga con empotramiento defectuoso sometida presión uniforme.

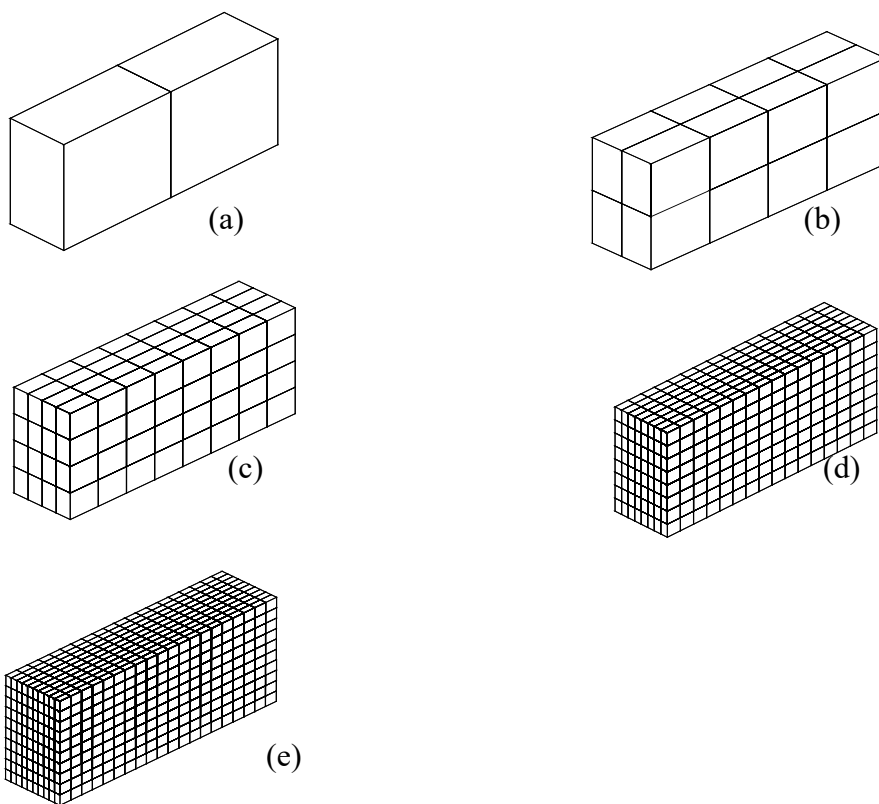


Figura. 3.11. Discretización de la viga del problema 5: (a) malla 1; (b) malla 2; (c) malla 3; (d) malla 4; (e) malla 5

3.1.3.3 Fundación aislada sometida a cargas combinadas.

El último problema de sólidos seleccionado, es una fundación aislada bajo la acción combinada de una carga axial uniforme y de una carga de corte repartida en la parte superior. La fundación se fija en la base y sus dimensiones se muestran en la Figura 3.11. Las líneas en la base la fundación y las líneas en unión de la columna y la fundación forman líneas de singularidad, debido a la presencia de esas líneas de singularidad, el problema tiene una mayor dificultad cuando lo comparamos con los ejemplos anteriores.

En este caso se analizará el comportamiento del desplazamiento horizontal y vertical del punto A, ubicado en una esquina del pedestal.

El patrón de discretización a seguir comenzará con una malla de 36 nodos y 10 elementos (malla 1), la segunda malla tendrá 165 nodos y 80 elementos (malla 2), la tercera malla 945 nodos y 640 elementos (malla3), la cuarta malla 1716 y 1250 elementos (malla 4) y la ultima será de 2821 nodos y 2160 elementos (malla 5).

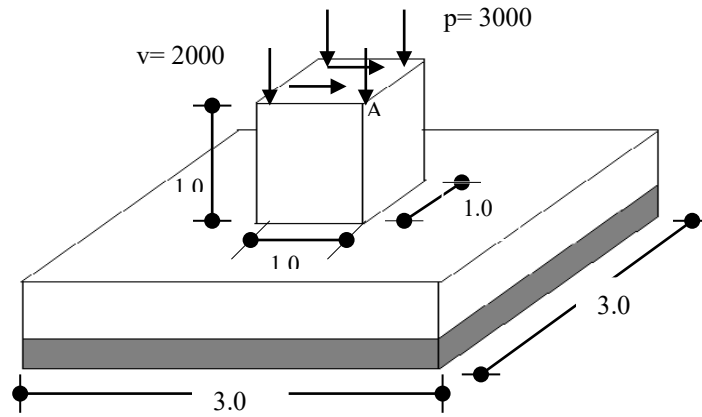


Figura. 3.12. Fundación aislada sometida a cargas combinadas..

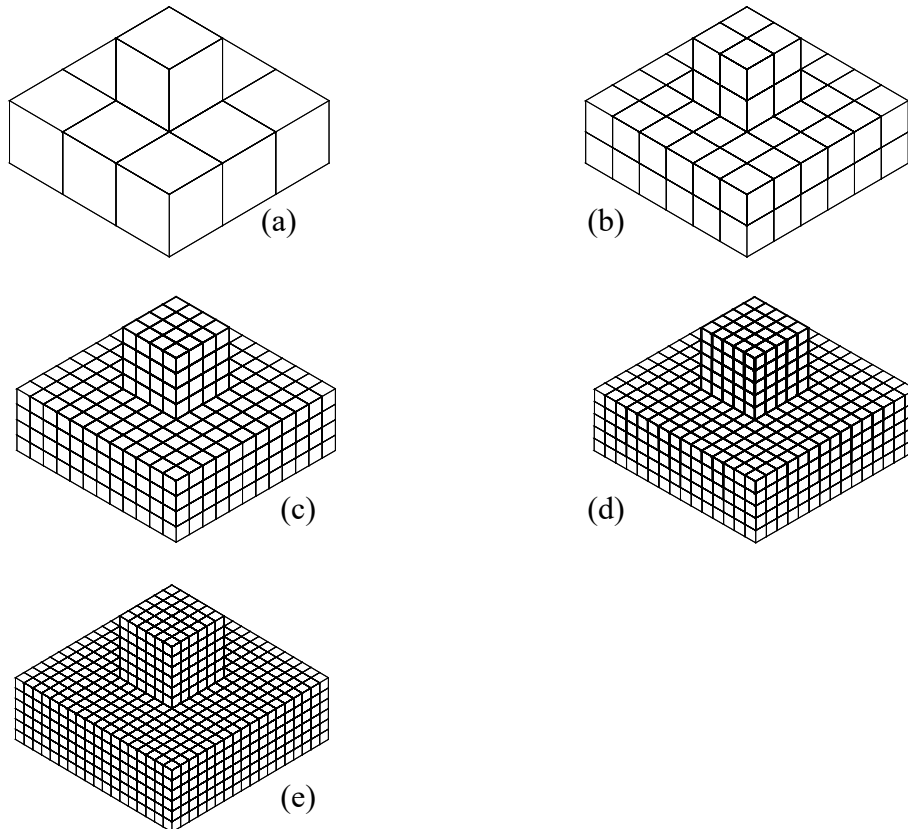


Figura. 3.13. Discretización de la viga del problema 6: (a) malla 1; (b) malla 2; (c) malla 3; (d) malla 4; (e) malla 5

3.2 COMPARACION DE RESULTADOS.

Para lograr el objetivo No. 2, se hará una comparación de resultados obtenidos en cada discretización con la solución exacta analítica mediante tablas y representación gráfica de discretización contra valor obtenido. En donde se pueda visualizar la curva de comportamiento de los resultados en la medida en que la discretización se hace cada vez mas fina. Adicionalmente se calculará el error cometido en cada malla respecto a la solución exacta y se graficará la curva de discretización contra error cometido.

3.3 PREDICCIÓN DE RESULTADOS.

Para el logro del objetivo No. 3 se hará una predicción de los resultados, para lo cual se emplearan las ecuaciones extrapolación h^2 y h^4 . Y adicionalmente se propone desarrollar una ecuación de extrapolación para cualquier número de términos retenidos en las series polinómicas de error para tomar en consideración cualquier número de mallas deseadas, y para considerar la posibilidad de un acercamiento o convergencia no monotónica.

3.3.1 EXTRAPOLACIÓN h^n .

Sean las siguientes $m-1$ aproximaciones con valores diferentes de h .

$$\begin{aligned} \phi(h_1) - \phi(0) &= a_2 h_1^2 + a_4 h_1^4 + \dots + a_n h_1^n \\ \phi(h_2) - \phi(0) &= a_2 h_2^2 + a_4 h_2^4 + \dots + a_n h_2^n \\ \phi(h_3) - \phi(0) &= a_2 h_3^2 + a_4 h_3^4 + \dots + a_n h_3^n \\ &\vdots \\ \phi(h_{m-1}) - \phi(0) &= a_2 h_{m-1}^2 + a_4 h_{m-1}^4 + \dots + a_n h_{m-1}^n \end{aligned}$$

agrupando y resolviendo de similar forma que para h^2 y h^4 se obtiene que la forma general de la ecuación de extrapolación considerando un número de $m-1$ de discretizaciones es la siguiente:

$$\phi(0) = \sum_{j=1}^{m+1} (-1)^{m+j+1} L_j(h^2) \phi(j) \quad (3.5)$$

donde

$$L_j(h^2) = \frac{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m+1} h_i^2}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m+1} (h_i^2 - h_j^2)} \quad (3.6)$$

m = número de términos retenidos en el polinomio
 i, j = enteros que identifican una discretización dada.

3.4 VERIFICACIÓN DEL MANEJO DE CONFIGURACIONES CONSECUTIVAS DE MALLAS MÁS ADECUADO EN EL PROCESO DE EXTRAPOLACIÓN.

Para lograr el objetivo No. 4 se llevará a cabo una verificación para determinar con cual ecuación de extrapolación se obtienen menos errores en la predicción de resultados en cada ejemplo numérico, es decir, cual ecuación define con mayor rapidez la convergencia de los resultados hacia el valor exacto.

Adicionalmente, con los resultados obtenidos en cada malla se podrá definir la función del error de discretización como una función interpolante. En esta investigación y debido a sus ventajas, se considerará que es un polinomio de la forma:

$$R(h) = a_0 + a_1h + a_2h^2 + a_3h^3 + ... + a_nh^{n-1} \quad (3.7)$$

Donde n es el número de mallas consideradas.

Si la convergencia es monotónica, cuando h tiende 0 se debe obtener el valor de la solución exacta, es decir igual al termino independiente del polinomio.

CAPITULO IV

ANÁLISIS DE RESULTADOS

Para comenzar el análisis de los resultados de esta investigación, es conveniente definir algunos parámetros, previamente tratados en el marco teórico inciso 2.1.6; como son los siguientes:

h = “Longitud característica” aproximada de un elemento: Corresponde a la longitud de un elemento lineal ó la longitud del segmento recto más largo que conecta dos puntos en elementos planos ó elementos sólidos.

$q-1$ = grado del polinomio completo mas alto en el campo de desplazamiento.

$2m$ = orden de la derivada superior que gobierna la ecuación de equilibrio en términos de desplazamientos.

Para problemas planos con elemento bilineal y sólidos con elementos trilineal tal y como los analizados en esta investigación, $q-1 = 1$ y $2m = 2$. Para placas delgadas con 12 GDL. $q-1 = 3$ y $2m = 4$.

Debido a que el campo de desplazamiento de un elemento puede ser ajustado por un polinomio de grado $q-1$, posee por lo tanto, un error $O(h^q)$ respecto a la solución exacta. El error en deformaciones unitarias (y por lo tanto esfuerzos) es proporcional al error en la r -ésimas derivada del campo de desplazamiento, es decir que error en el esfuerzo es $O(h^{q-r})$. Para elementos planos y sólidos, $r=1$. Para elementos de vigas y elementos de placas, en los cuales los esfuerzos están definidos por las curvaturas, $r=2$.

4.1 PROBLEMAS DE ESFUERZOS PLANOS.

Los resultados generales son listados en las tablas 4.1 a la 4.7. En la Tabla 4.1 se tabula el número de nodos en función de la longitud característica. El valor correspondiente al esfuerzo máximo σ_{xx} en el contorno del agujero en cada discretización y los valores correspondientes a cada extrapolación se presenta en la Tabla 4.2 En la Tabla 4.3 se muestran los errores relativos respecto a la solución exacta, cometidos en cada discretización y en las extrapolaciones hechas con h^2 , h^4 y h^6 . La Figura 4.1 sirve para observar la evolución del esfuerzo σ_{xx} y el comportamiento de las curvas de extrapolación a medida que la longitud característica disminuye.

El valor exacto del esfuerzo máximo en contorno del agujero viene dado por la gráfica en la Figura 3.1, en la cual, para una relación de $r/d=1$ el esfuerzo σ_{xx} máximo es aproximadamente $2.05\sigma_{prom}$.

En las figuras 4.1 a la 4.3 se aprecian las curvas de convergencia de los resultados hacia la solución exacta en cada discretización y de las extrapolaciones, en la medida en que el elemento se hace cada vez más pequeño.

Discretización	Longitud característica	Número de Nodos
1	1	44
2	0.50	152
3	0.25	540
4	0.125	2008

Tabla 4.1 Número de nodos en función de la longitud característica

Malla	Esfuerzo máximo	Valor extrapolado utilizando dos mallas consecutivas (h^2)	Valor extrapolado utilizando tres mallas consecutivas (h^4)	Valor extrapolado utilizando cuatro mallas consecutivas (h^6)
1	158,09			
2	387,83	464,41		
3	542,46	594	602,64	
4	611,03	633,89	636,55	637,08
Solución exacta	615			

Tabla 4.2 Resultados obtenidos en cada discretización y en cada extrapolación.

Malla	Error cometido en cada Malla	Error cometido en la extrapolación (h^2)	Error cometido en la extrapolación (h^4)	Error cometido en la extrapolación (h^6)
1	-74,294			
2	-36,938	-24,486		
3	-11,795	-3,415	-2,010	
4	-0,646	3,072	3,504	3,590

Tabla 4.3 Error cometido en cada discretización y en cada extrapolación.

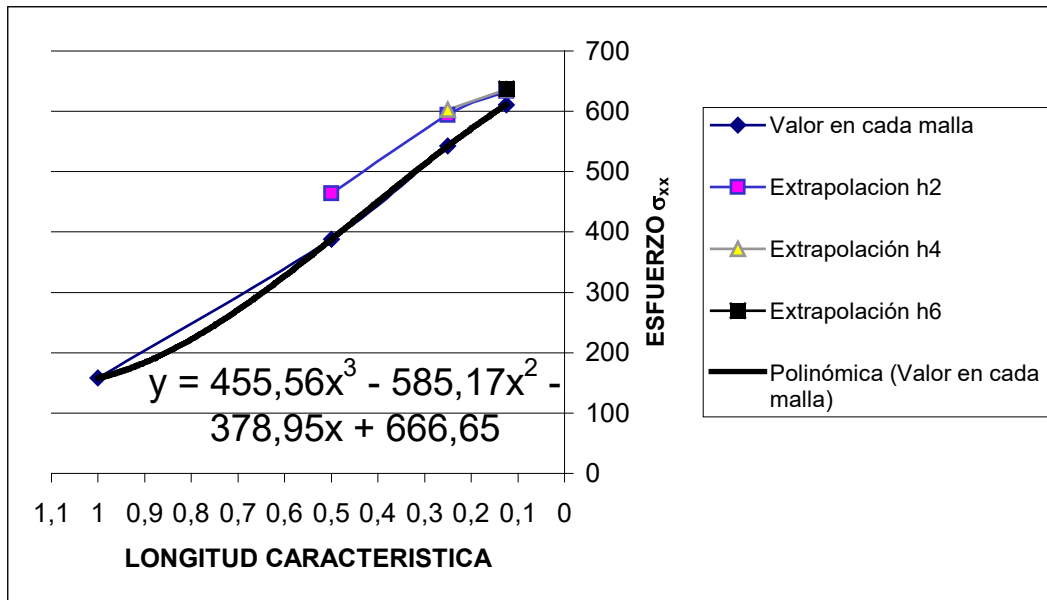


Figura. 4.1 Longitud característica vs. Esfuerzo máximo σ_{xx}

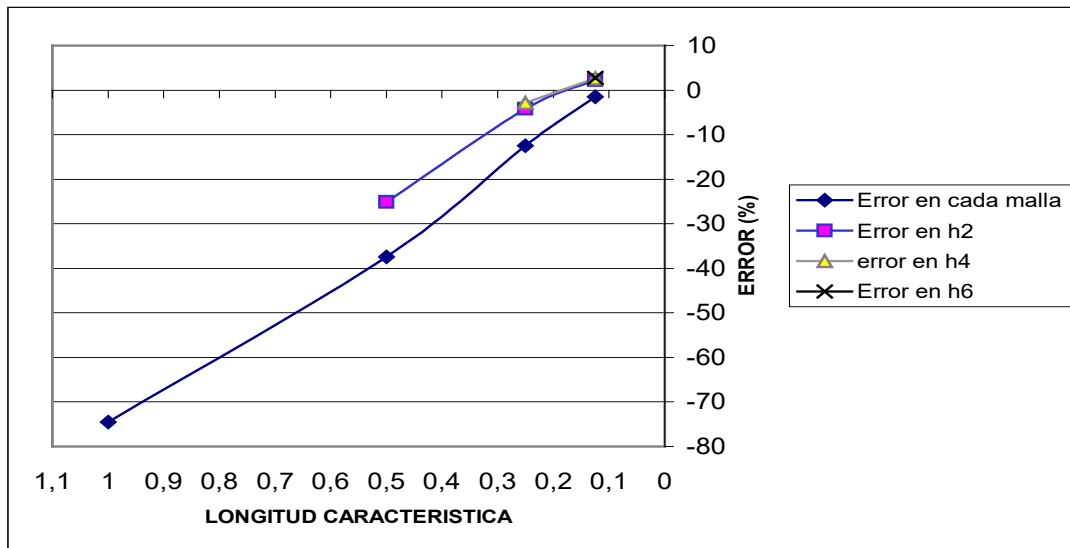


Figura. 4.2 Curvas de convergencia del error relativo cometido en el cálculo de esfuerzo σ_{xx} .

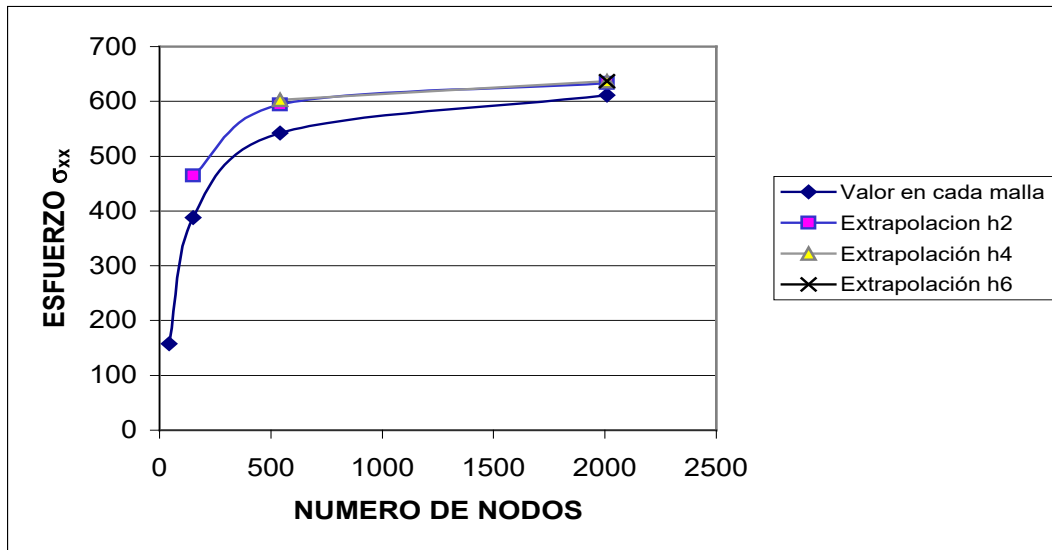


Figura. 4.3 Número de nodos vs esfuerzo σ_{xx}

Se puede observar que al aplicar las ecuaciones de extrapolación, los valores obtenidos pueden llegar a representar el 17.04% del valor obtenido en la última discretización involucrada en la extrapolación. Al extrapolar la segunda y tercera discretización (152 y 540 nodos cada una), se obtiene un valor bastante cercano a la solución exacta, con un error de -3.415% , mientras que en la tercera discretización se obtiene un error de -11.795% , y al aplicar la extrapolación h^4 se obtiene un error de -2.01% . Al incluir la última discretización en las ecuaciones de extrapolación se obtienen resultados con un error superior al 3% mientras que el error cometido en la última discretización es de solo el -0.646% . La gráfica de convergencia de los resultados de esfuerzo máximo (Figura 4.1) es una línea casi sin cambios de pendientes que tiende a la solución exacta por debajo (lower-bound solution). Se obtienen errores menores a 4% de error en el cálculo del esfuerzo respecto a la solución exacta, empleando 733 nodos (suma de nodos en la primera, segunda y tercera malla) en lugar de emplear los 2008 nodos de la cuarta malla.

Con los resultados en cada malla se obtiene el polinomio de interpolación, y haciendo $h=0$, se obtiene un error de 8.40% respecto a la solución exacta.

Debido a que no se conoce la solución exacta para el desplazamiento del punto A, ubicado en el centro del extremo libre y del punto B. Se asumirá como valor “exacto” para la comparación, el resultado obtenido en la última discretización.

Los desplazamientos de los puntos A y B tienen un patrón de comportamiento bastantes similares. Se observan mayores errores, tanto en las curvas de la discretización como en las curvas de extrapolación, en los resultados del punto B, al extrapolar con h^2 y con la primera y segunda discretización se obtiene casi la solución

“exacta”, en ambos puntos, 0.781% en el punto A y 0.882% en el punto B. Estos valores representan el 10.89% y 10.18% del valor obtenido en la segunda discretización. Extrapolar con la tercera discretización tanto en h^2 y h^4 se obtienen un cambio de signo en la curva de error, aunque en valor absoluto siguen siendo menores al resultado obtenido en la tercera discretización. La gráfica de convergencia de desplazamientos (Figura 4.4 y Figura 4.7) tiende hacia la solución “exacta” por debajo (lower-bound solution).

Empleando el polinomio de interpolación el error cometido en el cálculo del desplazamiento del punto A es 1.47%, mientras que el error cometido en el cálculo del desplazamiento del punto B es 1.62%.

Malla	Desplazamiento horizontal en el punto A	Valor extrapolado utilizando dos mallas consecutivas (h^2)	Valor extrapolado utilizando tres mallas consecutivas (h^4)
1	0,20078		
2	0,25304	0,27046	
3	0,26842	0,27355	0,27375
4	0,27259		

Tabla 4.4 Resultados de desplazamiento del punto A obtenidos en cada discretización y en cada extrapolación.

Malla	Error cometido cada malla respecto a la solución exacta	Error cometido en la extrapolación (h^2)	Error cometido en la extrapolación (h^4)
1	-26,342		
2	-7,170	-0,781	
3	-1,529	0,353	0,426

Tabla 4.5 Error cometido en el desplazamiento del punto A en cada discretización y en cada extrapolación.

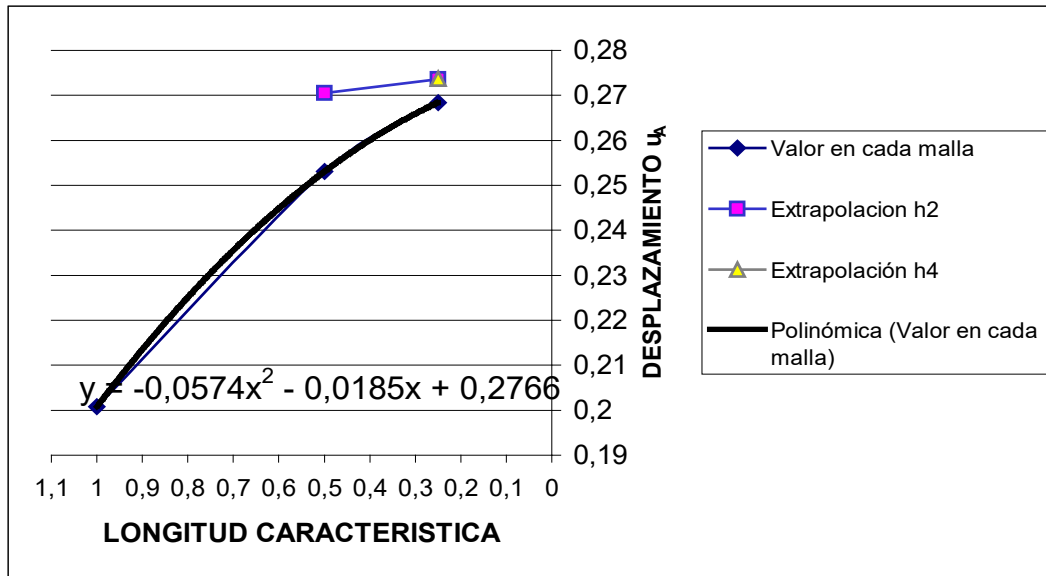


Figura. 4.4 Longitud característica vs. Desplazamiento horizontal en el punto A.

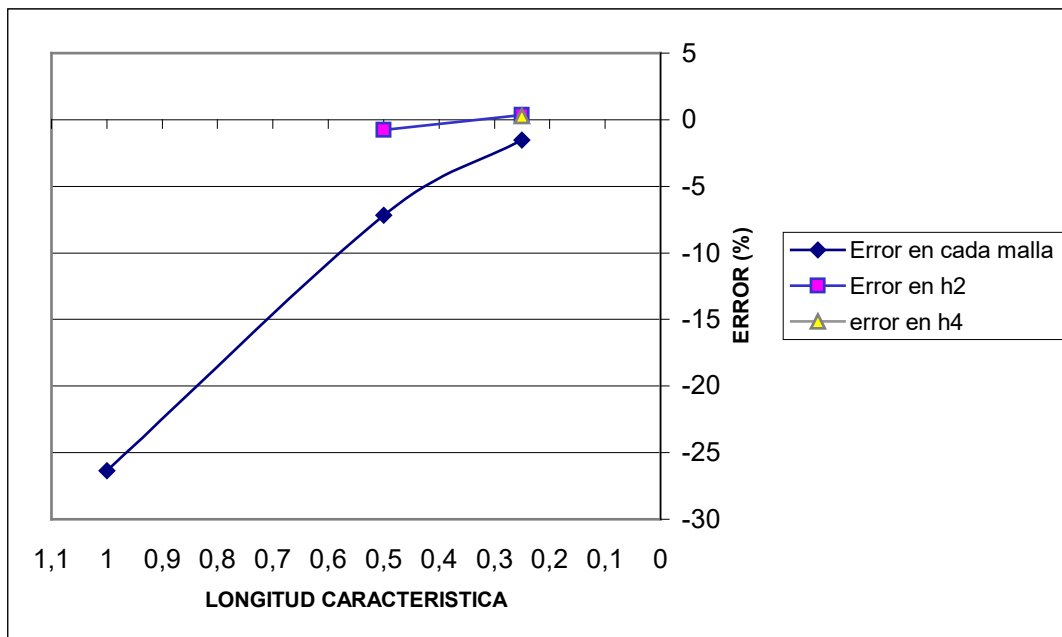


Figura. 4.5 Curvas de convergencia del error relativo cometido en el cálculo de desplazamiento horizontal del punto A.

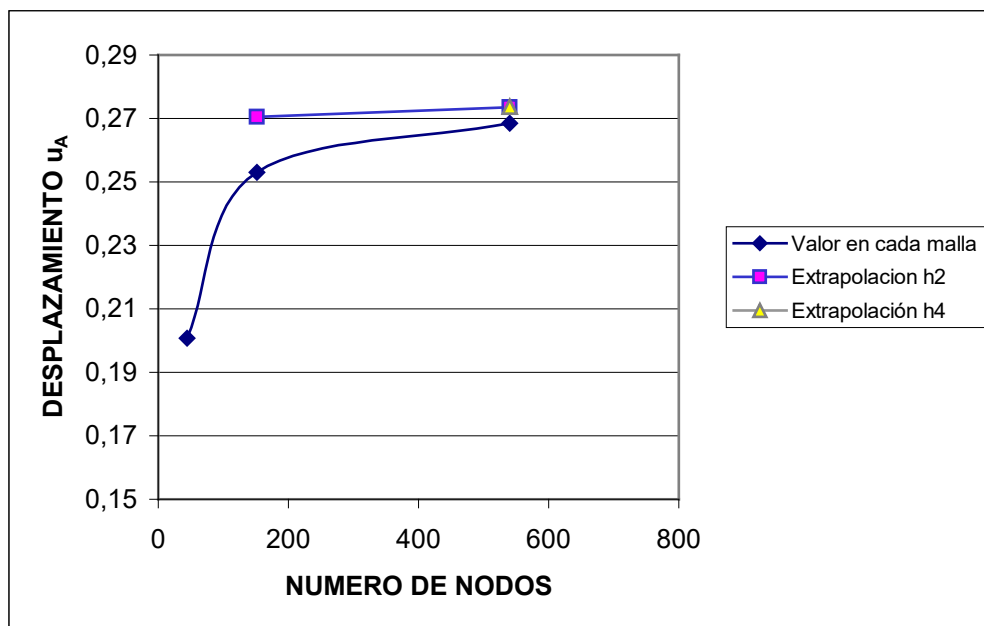


Figura. 4.6 Número de nodos vs. Desplazamiento horizontal del punto A

Malla	Desplazamiento horizontal en el punto B	Valor extrapolado utilizando dos mallas consecutivas (h^2)	Valor extrapolado utilizando tres mallas consecutivas (h^4)
1	0,16249		
2	0,21824	0,23683	
3	0,23441	0,23980	0,24000
4	0,23894		

Tabla 4.6 Resultados de desplazamiento del punto B obtenidos en cada discretización y en cada extrapolación.

Malla	Error cometido cada malla respecto a la solución exacta	Error cometido en la extrapolación (h^2)	Error cometido en la extrapolación (h^4)
1	-31,996		
2	-8,661	-0,882	
3	-1,893	0,362	0,445

Tabla 4.7 Error cometido en el desplazamiento del punto B en cada discretización y en cada extrapolación.

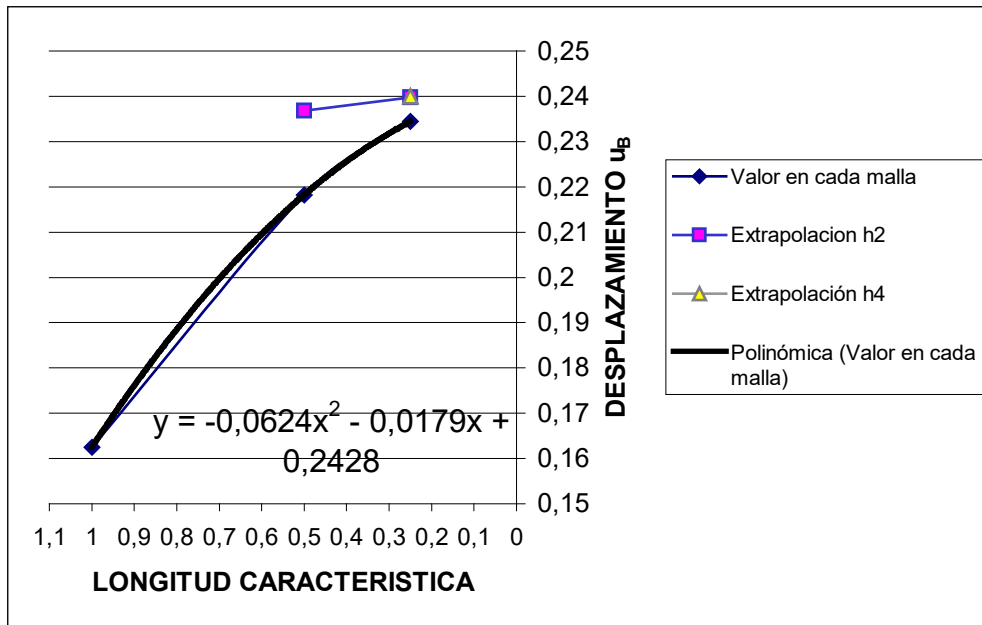


Figura. 4.7 Longitud característica vs. Desplazamiento horizontal del punto B

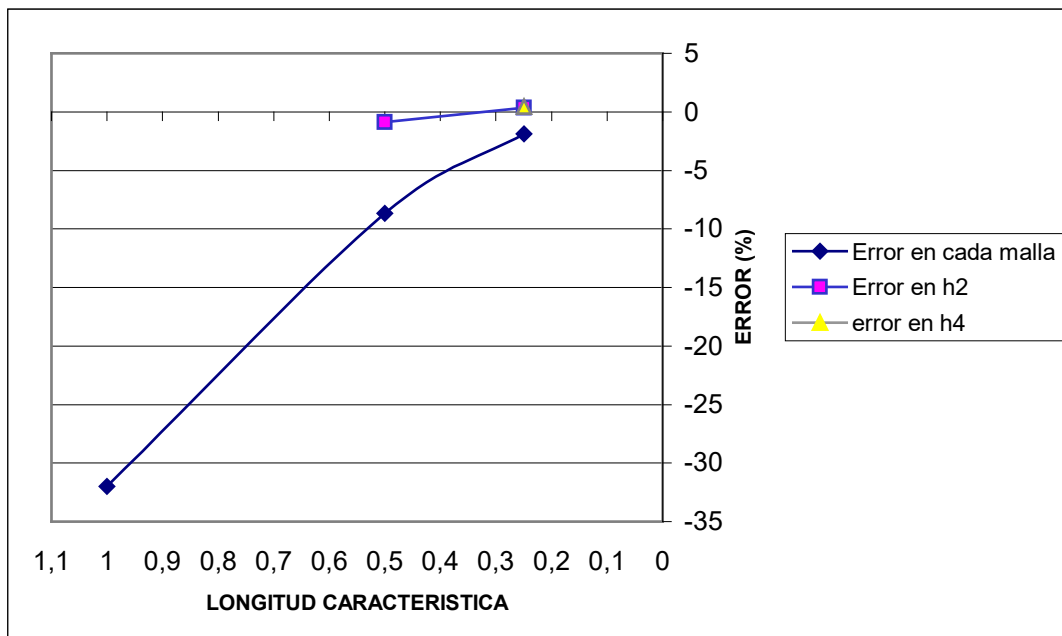


Figura. 4.8 Curvas de convergencia del error relativo cometido en el cálculo de desplazamiento horizontal del punto B.

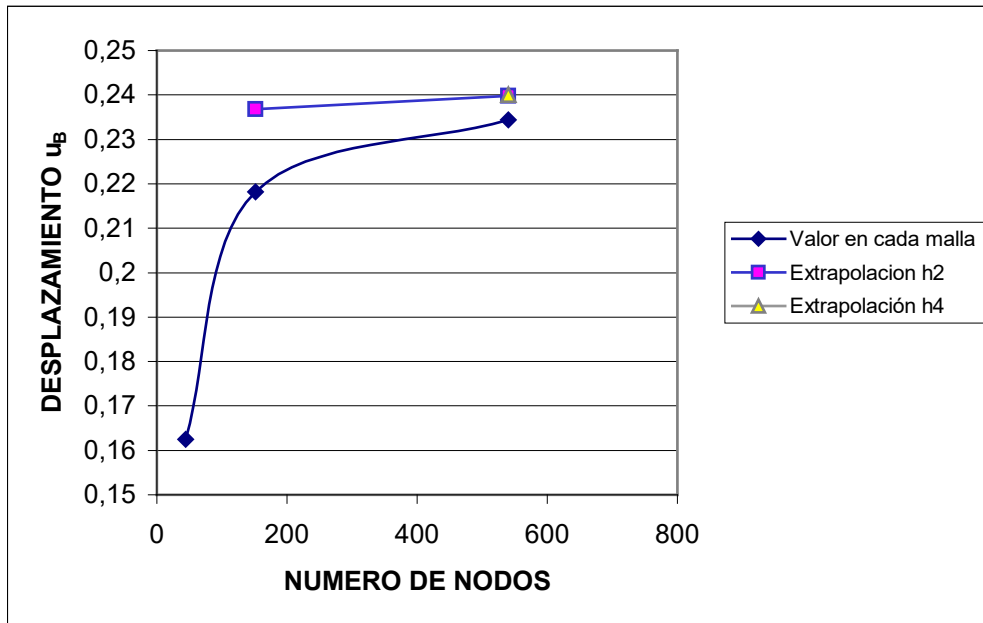


Figura. 4.9 Número de nodos vs. Desplazamiento horizontal del punto B

4.2 PROBLEMAS DE ELEMENTOS DE PLACA.

4.2.1 PLACA SIMPLEMENTE APOYADA CON CARGA CONCENTRADA EN EL CENTRO.

Los resultados generales son listados en las tablas 4.8, 4.9 y 4.10. En la Tabla 4.8 se encuentran tabulados el número de nodos en cada discretización en función de la longitud característica, en la Tabla 4.9, los valores correspondientes a la flecha en el centro de la placa en cada discretización y los valores extrapolados, y en la Tabla 4.10 el error relativo cometido con respecto a la solución exacta. El valor exacto para las condiciones de la placa ($\alpha=0.0116$) y una carga concentrada de 1000 kg es $w= 3.107$ cm. En la Figura 4.10, se aprecia la curva de convergencia de los resultados a medida que la longitud característica se hace más pequeña. En la Tabla 4.10 Se observa que al extrapolar las primeras dos discretizaciones se obtiene un valor con error de 2.34%, que representa 24.98% del resultado obtenido en la segunda discretización, y al considerar la tercera discretización se obtiene un resultado con 0.74% de error en h^2 y 0.634% en h^4 . La cuarta discretización arroja un error de 2.897% y en las extrapolaciones los errores son: 0.193% para h^2 , 0.157% para h^4 y 0.149% para h^6 . Al tomar en cuenta la quinta discretización el error cometido es 0.054% en h^2 , 0.044 en h^4 , 0.043% en h^6 y 0.042% en h^8 . La Figura 4.10 muestra la curva de convergencia de los resultados de la flecha en el centro de la placa y se puede observar que tiende hacia la solución exacta por debajo (lower-bound solution). Empleando el polinomio de interpolación el error cometido en el cálculo de la flecha en el centro es -0.032%

Malla	Longitud característica	Número de nodos
1	1.0000	9
2	0,5000	25
3	0,2500	81
4	0,1250	289
5	0,0625	1089

Tabla 4.8 Número de nodos en función de la longitud característica

Flecha en el centro	Valor extrapolado utilizando dos mallas consecutivas (h^2)	Valor extrapolado utilizando tres mallas consecutivas (h^4)	Valor extrapolado utilizando cuatro mallas consecutivas (h^6)	Valor extrapolado utilizando cinco mallas consecutivas (h^8)
-4,053				
-3,398	-3,17967			
-3,197	-3,13000	-3,12669		
-3,134	-3,11300	-3,11187	-3,11163	
-3,115	-3,10867	-3,10838	-3,10832	-3,10831
-3,107				

Tabla 4.9 Resultados de la flecha en el centro obtenidos en cada discretización y en cada extrapolación.

Error cometido cada malla respecto a la solución exacta	Error cometido en la extrapolación (h^2)	Error cometido en la extrapolación (h^4)	Error cometido en la extrapolación (h^6)	Error cometido en la extrapolación (h^8)
-30,447				
-9,365	-2,339			
-2,897	-0,740	-0,634		
-0,869	-0,193	-0,157	-0,149	
-0,2575	-0,054	-0,044	-0,043	-0,042

Tabla 4.10 Error cometido en el cálculo de la flecha en el centro en cada discretización y en cada extrapolación.

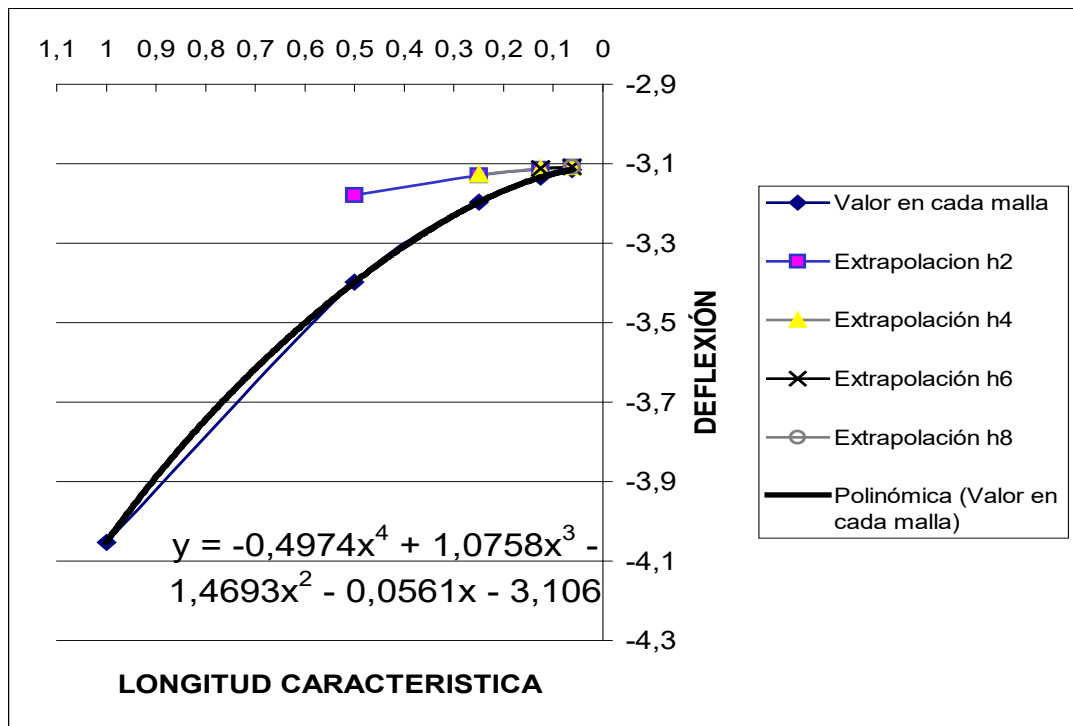


Figura. 4.10 Longitud característica vs. Flecha en el centro de la placa

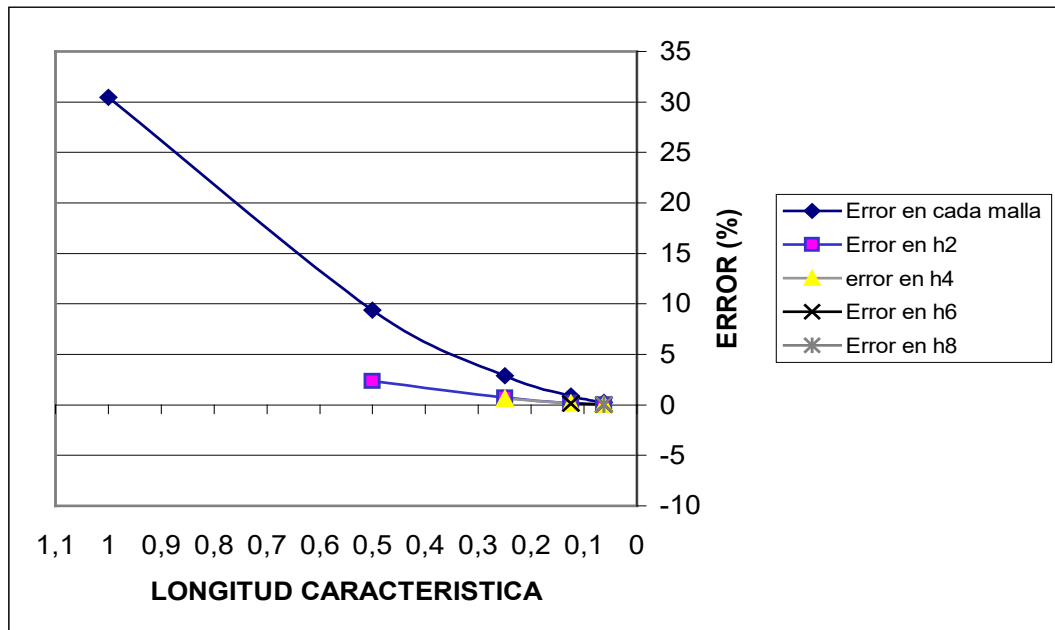


Figura. 4.11 Curvas de convergencia del error relativo cometido en el cálculo de la flecha en el centro de la placa.

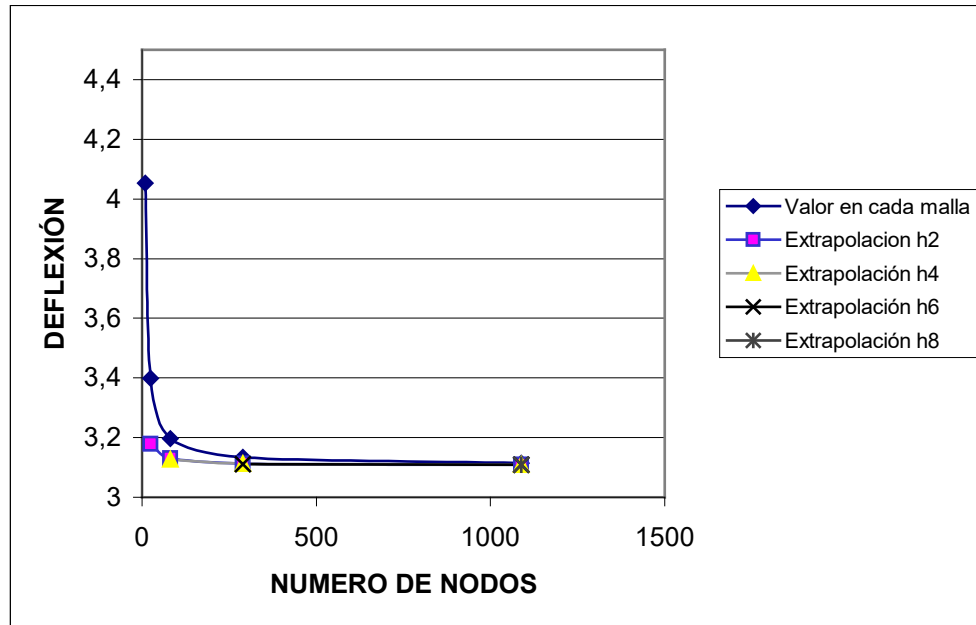


Figura. 4.12 Número de nodos vs. Flecha en el centro de la placa

4.2.2 PLACA EMPOTRADA CON CARGA CONCENTRADA EN UNA ESQUINA

Los resultados generales son listados en las tablas 4.11, 4.12 y 4.13. En la Tabla 4.11 se encuentran tabulados el número de nodos en cada discretización en función de la longitud característica, en la Tabla 4.12, los valores correspondientes a la flecha en el centro de la placa en cada discretización y los valores extrapolados, y en la Tabla 4.13 el error relativo cometido con respecto a la solución exacta. El valor exacto para las condiciones establecidas es desconocido, por lo tanto, el resultado obtenido en la ultima malla se considera como el valor “exacto”. En la Figura 4.13, se aprecia la curva de convergencia de los resultados a medida que la longitud característica se hace más pequeña. En la Tabla 4.13 Se observa que al extrapolar las primeras dos discretizaciones se obtiene un valor con error de -0.52% , que representa 83.87% del resultado obtenido en la segunda discretización, y al considerar la tercera discretización se obtiene un resultado con 0.052% de error en h^2 y 0.090% en h^4 . La cuarta discretización arroja un error de -0.015% y en las extrapolaciones los errores son: 0.019% para h^2 , 0.017% para h^4 y 0.016% para h^6 . Al tomar en cuenta la quinta discretización el error cometido es 0.004% en h^2 , 0.003 en h^4 , 0.003% en h^6 y 0.003% en h^8 . La Figura 4.13 muestra la curva de convergencia de los resultados de la flecha en la esquina y se puede observar que tiende hacia la solución exacta por arriba (upper-bound solution). Empleando el polinomio de interpolación el error cometido en el cálculo de la flecha es -0.0033%

Malla	Longitud característica	Número de nodos
1	1.0000	4
2	0,5000	9
3	0,2500	25
4	0,1250	81
5	0,0625	289

Tabla 4.11 Número de nodos en función de la longitud característica

Flecha en la esquina	Valor extrapolado utilizando dos mallas consecutivas (h^2)	Valor extrapolado utilizando dos mallas consecutivas (h^4)	Valor extrapolado utilizando dos mallas consecutivas (h^6)	Valor extrapolado utilizando dos mallas consecutivas (h^8)
-8,166007				
-8,190811	-8,199079			
-8,232309	-8,246142	-8,24928		
-8,240668	-8,243454	-8,243275	-8,2431799	
-8,241845	-8,24224	-8,242156	-8,242138	-8,242134
-8,24188				

Tabla 4.12 Resultados de la flecha en la esquina obtenidos en cada discretización y en cada extrapolación.

Error cometido cada malla respecto a la solución exacta	Error cometido en la extrapolación (h^2)	Error cometido en la extrapolación (h^4)	Error cometido en la extrapolación (h^6)	Error cometido en la extrapolación (h^8)
-0,9206				
-0,61962	-0,5193			
-0,11613	0,0517	0,0898		
-0,01471	0,0191	0,0169	0,0158	
-0,00042	0,0044	0,0033	0,0031	0,0031

Tabla 4.13 Error cometido en el cálculo de la flecha en la esquina en cada discretización y en cada extrapolación.

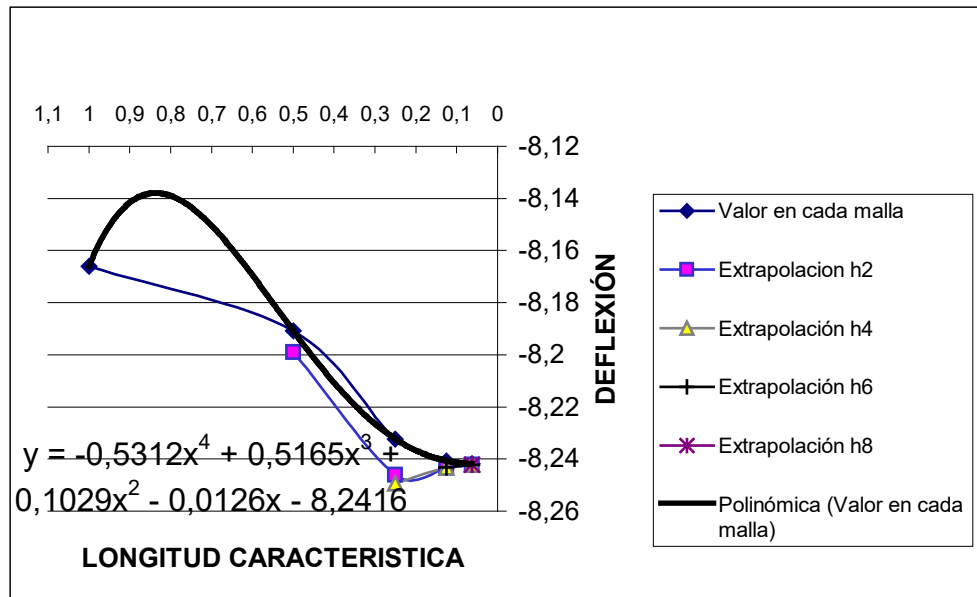


Figura. 4.13 Longitud característica vs. Flecha en la esquina de la placa

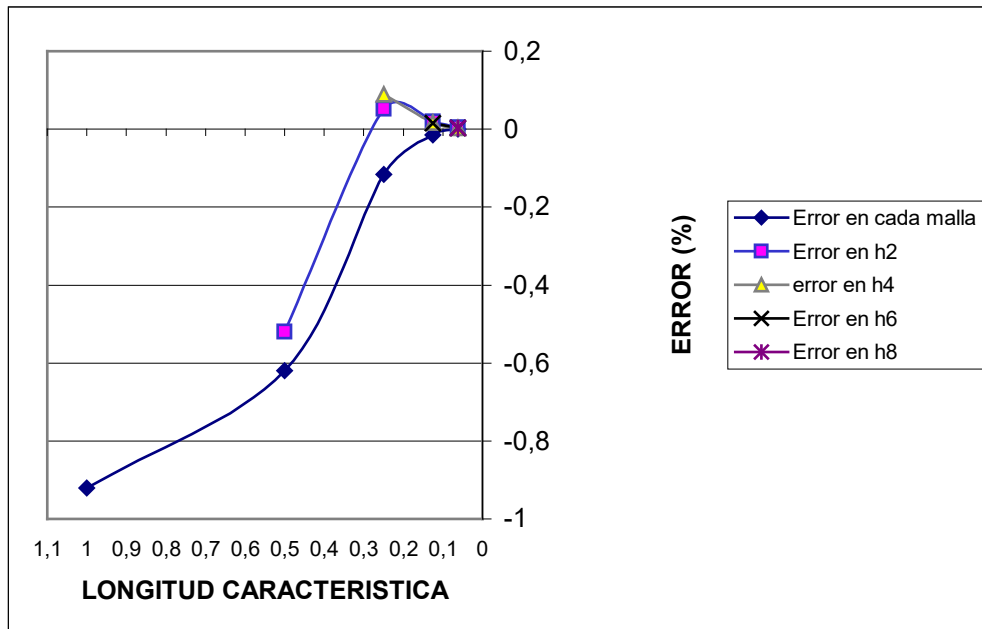


Figura. 4.14 Curvas de convergencia del error relativo cometido en el cálculo de la flecha en la esquina.

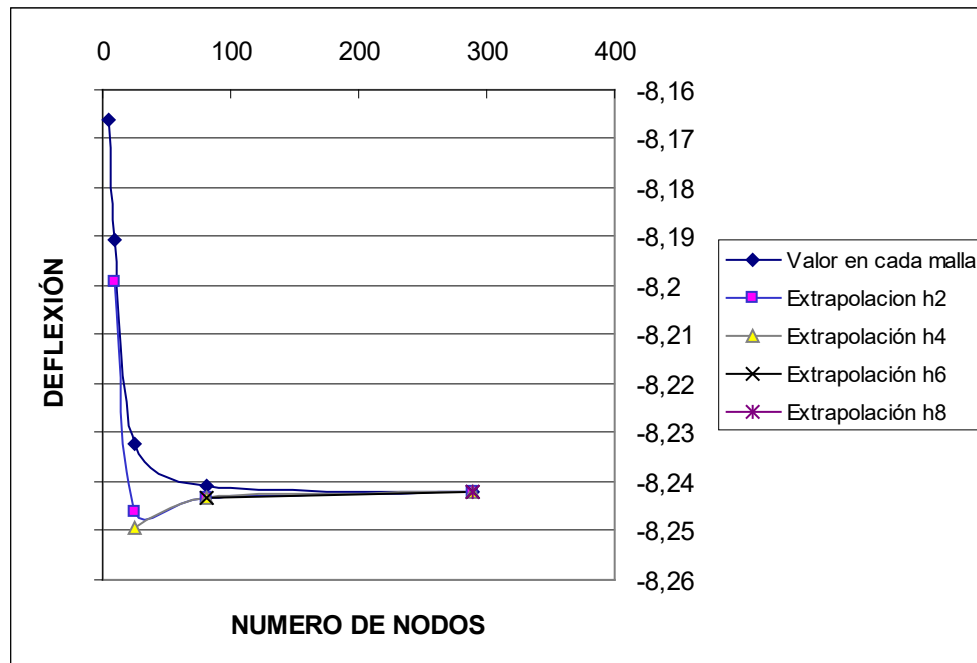


Figura. 4.15 Número de nodos vs. Flecha la esquina de la placa

4.3 PROBLEMA DE ELEMENTOS DE SOLIDOS.

4.3.1 VIGA EMPOTRADA CON CARGA DISTRIBUIDA EN UN EXTREMO.

Los resultados generales son listados en las tablas 4.14 a la 4.18. En la Tabla 4.14 se encuentran tabulados, el número de nodos en cada discretización en función de la longitud característica; En la Tabla 4.15, los valores correspondientes al desplazamiento del punto A y los valores extrapolados en cada discretización, y en la Tabla 4.16 el error relativo cometido con respecto a la solución exacta. El valor exacto para las condiciones de la viga y una carga de 1000 kg/cm² es $w = 0.1888$ cm. En la Figura 4.16, se aprecia la curva de convergencia de los resultados a medida que la longitud característica se hace más pequeña. Se puede observar en la Tabla 4.16 que al extrapolar las primeras dos discretizaciones se obtiene un error de -4.04% para h^2 , y al considerar la tercera discretización se obtiene un resultado de -0.907% de error en h^2 y -0.699% en h^4 . Al tomar en cuenta la quinta discretización el error cometido es: -0.145% en h^2 , -0.117% en h^4 , -0.113% en h^6 y -0.112 en h^8 . La Figura 4.16 muestra la curva de convergencia de los resultados de la deflexión del punto A y se puede observar que tiende hacia la solución exacta por arriba (upper-bound solution). Empleando el polinomio de interpolación el error cometido en el cálculo del desplazamiento del punto A es 0.159%

Malla	Longitud característica	Número de nodos
1	1.000	12
2	0,500	45
3	0,250	225
4	0,125	1377
5	0.025	9537

Tabla 4.14 Número de nodos en función de la longitud característica

Desplazamiento del punto A	Valor extrapolado utilizando dos mallas consecutivas (h^2)	Valor extrapolado utilizando tres mallas consecutivas (h^4)	Valor extrapolado utilizando cuatro mallas consecutivas (h^6)	Valor extrapolado utilizando cinco mallas consecutivas (h^8)
-0.1900				
-0.1775	-0.17333			
-0.1846	-0.18697	-0,187876		
-0.1873	-0.1882	-0,188282	-0,188289	
-0.1883	-0,18863	-0,188662	-0,188668	-0,1886697
-0,1888				

Tabla 4.15 Resultados del desplazamiento del punto A obtenidos en cada discretización y en cada extrapolación

Error cometido cada malla respecto a la solución exacta	Error cometido en la extrapolación (h^2)	Error cometido en la extrapolación (h^4)	Error cometido en la extrapolación (h^6)	Error cometido en la extrapolación (h^8)
-9,239				
-5,341	-4,041			
-2,015	-0,907	-0,699		
-0,718	-0,285	-0,244	-0,236	
-0,512	-0,145	-0,117	-0,113	-0,112

Tabla 4.16 Error cometido en el desplazamiento del punto A en cada discretización y en cada extrapolación.

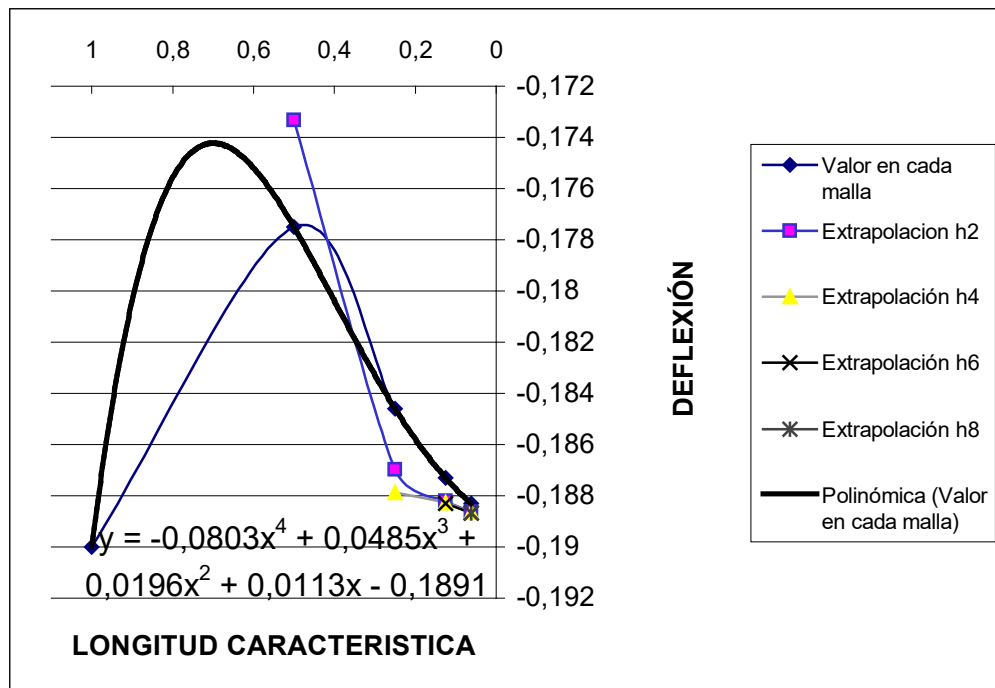


Figura. 4.16 Longitud característica vs. Desplazamiento del punto A

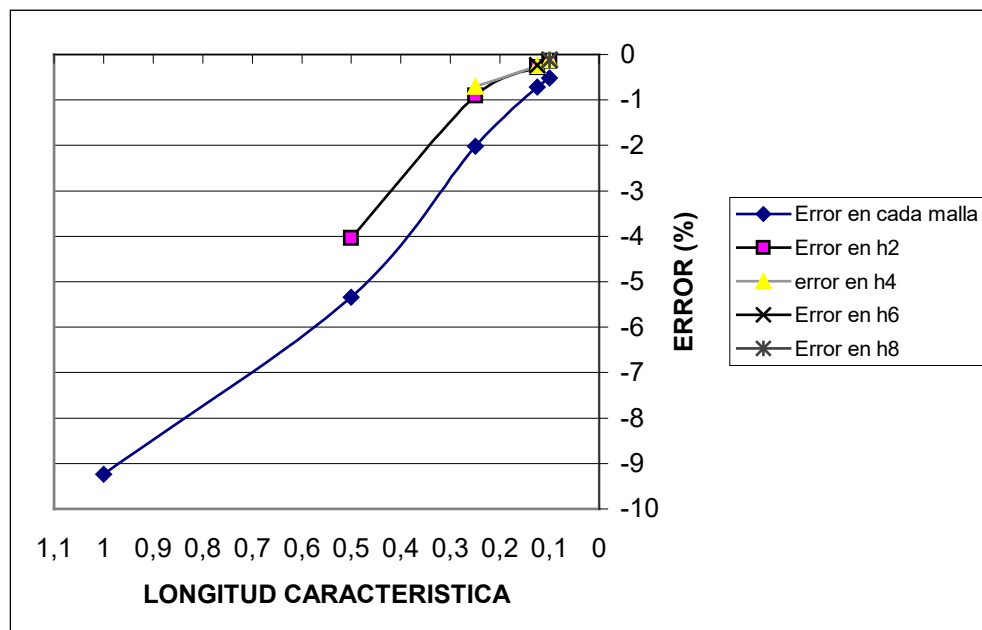


Figura. 4.17 Curvas de convergencia del error relativo cometido en el cálculo de desplazamiento del punto A.

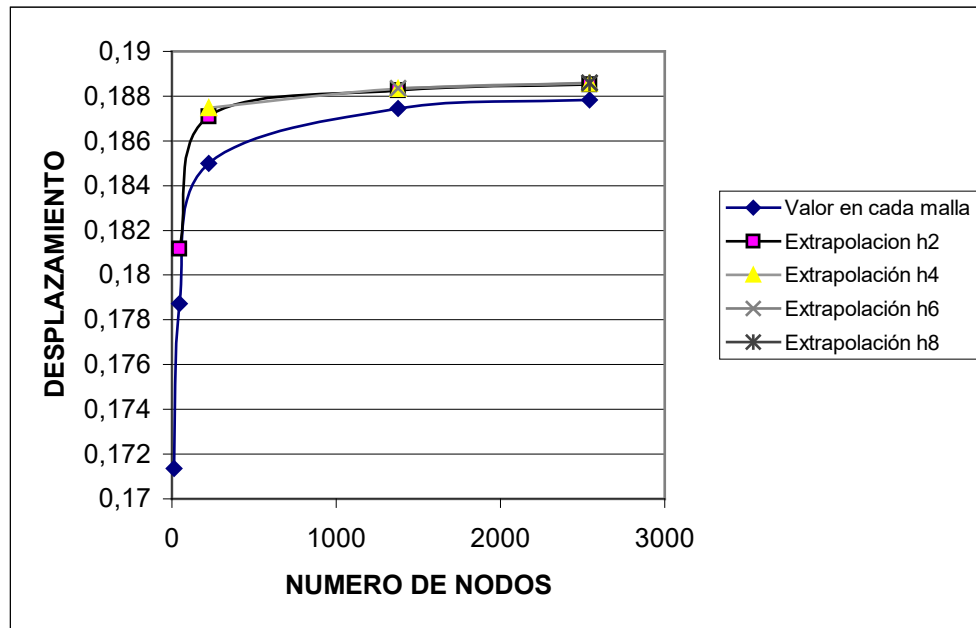


Figura. 4.18 Número de nodos vs. Desplazamiento del punto A

Para el análisis del esfuerzo máximo en el punto B el resultado “exacto” se tomará el correspondiente a la última malla, debido a que esta es una viga corta y el esfuerzo cortante es muy importante y no es posible aplicar la teoría de viga [12]. En la Tabla 4.17 se muestran los valores correspondientes al esfuerzo máximo y los valores extrapolados en cada discretización, y en la Tabla 4.18 el error relativo cometido con respecto a la solución exacta. En la Figura 4.19, se aprecia la curva de convergencia de los resultados a medida que la longitud característica se hace más pequeña. Se puede observar en la Tabla 4.18 que al extrapolar las primeras dos discretizaciones se obtiene un error de -22.94% para h^2 , y al considerar la tercera discretización se obtiene un resultado de -10.65% de error en h^2 y -9.83% en h^4 . Al tomar en cuenta la cuarta discretización el error cometido es: 3.94% en h^2 , 4.90% en h^4 y 5.14% en h^6 . La Figura 4.19 muestra la curva de convergencia de los resultados de esfuerzo máximo y se puede observar que tiende hacia la solución exacta por debajo (lower-bound solution). Empleando el polinomio de interpolación el error cometido en el cálculo del esfuerzo máximo en B es 3.368%

Esfuerzo Máximo	Valor extrapolado utilizando dos mallas consecutivas	Valor extrapolado utilizando tres mallas consecutivas	Valor extrapolado utilizando cuatro mallas consecutivas
5460			
7860	11097		
10000	12867	12984	
12000	14967	15106	15140
14400			

Tabla 4.17 Resultados del esfuerzo máximo en el punto B obtenidos en cada discretización y en cada extrapolación

Error cometido cada malla respecto a la solución exacta	Error cometido en la extrapolación (h^2)	Error cometido en la extrapolación (h^4)	Error cometido en la extrapolación (h^6)
-62,083			
-45,417	-22,9375		
-30,556	-10,6458	-9,8333	
-16,667	3,9375	4,9078	5,1389

Tabla 4.18 Error cometido en el cálculo del esfuerzo máximo en B en cada discretización y en cada extrapolación.

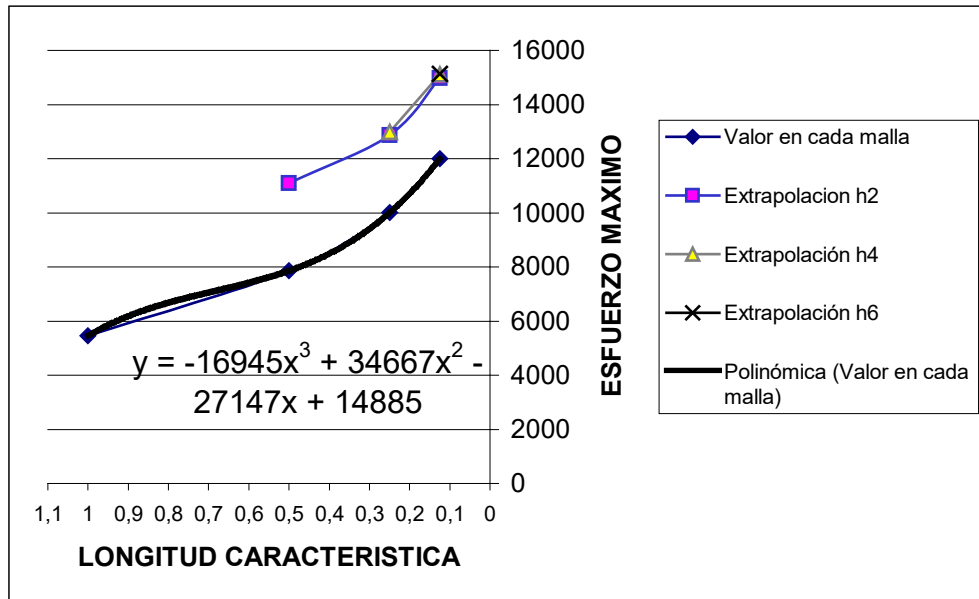


Figura. 4.19 Longitud característica vs. Esfuerzo máximo en B

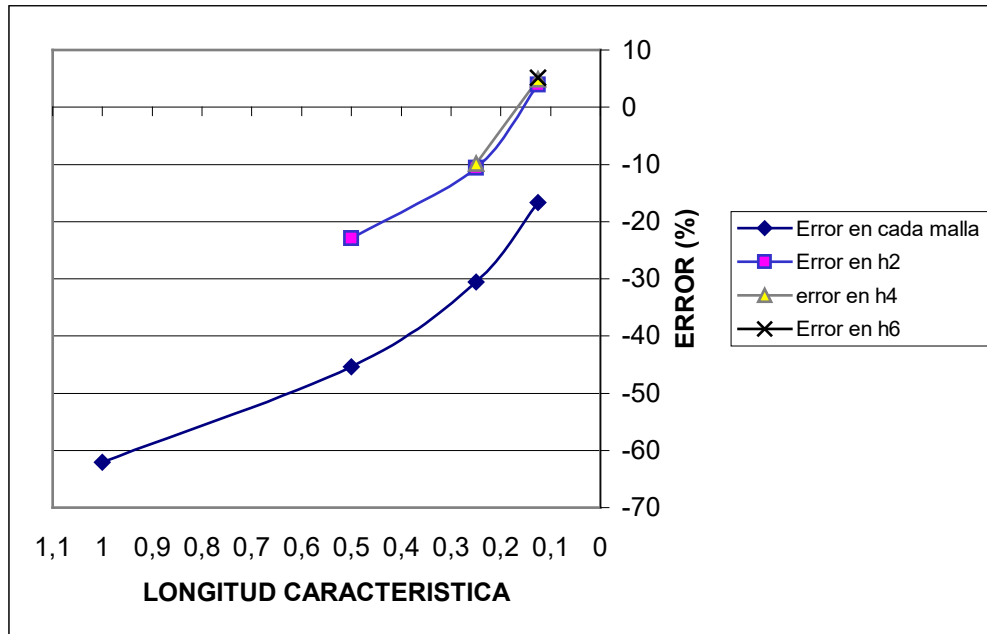


Figura. 4.20 Curvas de convergencia del error relativo cometido en el cálculo del esfuerzo máximo en B.

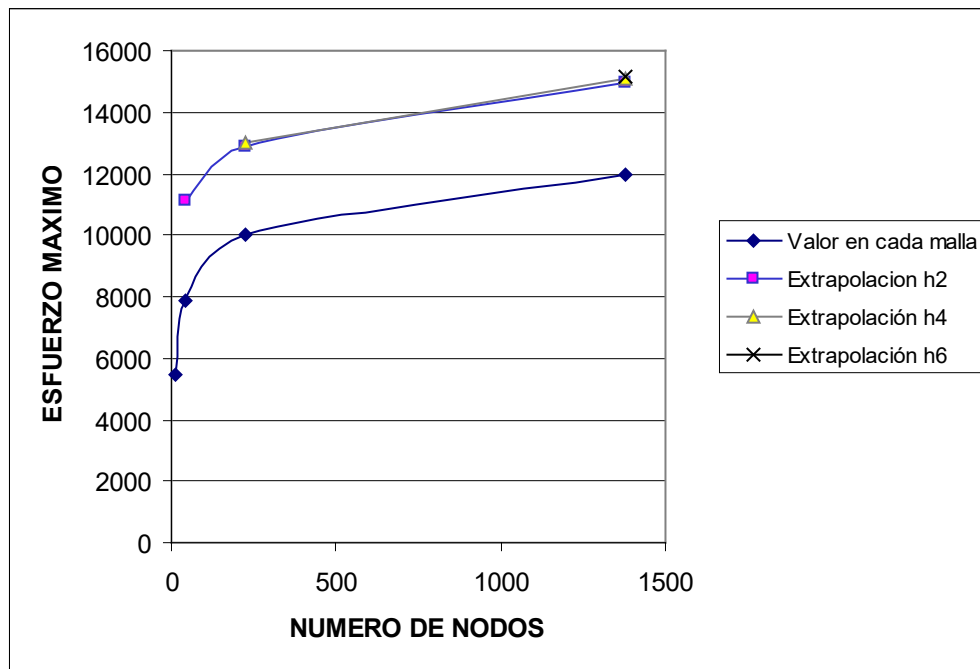


Figura. 4.21 Número de nodos vs. Esfuerzo máximo en B

4.3.2 VIGA CON EMPOTRAMIENTO DEFECTUOSO SOMETIDA A CARGA UNIFORME.

De manera análoga al problema anterior, los resultados generales son listados en las tablas 4.19 a la 4.21. En la Tabla 4.19 se encuentran tabulados el número de nodos en cada discretización en función de la longitud característica; En la Tabla 4.20, los valores correspondientes al desplazamiento del punto A y los valores extrapolados en cada discretización, y en la Tabla 4.21 el error relativo cometido con respecto a la solución exacta. El valor exacto para las condiciones de la viga es desconocido y solo considerando una malla muy fina se puede conocer el valor exacto aproximado, en este caso se considera que el resultado de la quinta malla ofrece este valor. En la Figura 4.22, se aprecia la curva de convergencia de los resultados a medida que la longitud característica se hace más pequeña. Se puede observar en la Tabla 4.21 que al extrapolar las primeras dos discretizaciones se obtiene un error de -23.27% para h^2 , y al considerar la tercera discretización se obtiene un resultado de -1.317% de error en h^2 y 0.16% en h^4 . Al tomar en cuenta la cuarta discretización el error cometido es: 0.37% en h^2 , 0.478% en h^4 y 0.484% en h^6 . La Figura 4.22 muestra la curva de convergencia de los resultados de la deflexión en A y se puede observar que tiende hacia la solución exacta por arriba (upper-bound solution). Empleando el polinomio de interpolación el error cometido en el cálculo del desplazamiento del punto A es -0.169% .

Malla	Longitud característica	Número de nodos
1	1.000	12
2	0,500	45
3	0,250	225
4	0,125	1377
5	0,100	2541

Tabla 4.19 Número de nodos en función de la longitud característica

Malla	Desplazamiento vertical	Valor extrapolado utilizando dos mallas consecutivas	Valor extrapolado utilizando tres mallas consecutivas	Valor extrapolado utilizando cuatro mallas consecutivas
1	-0,229128			
2	-0,154876	-0,130125		
3	-0,164245	-0,167368	-0,169851	
4	-0,168717	-0,170208	-0,170397	-0,170406
5	-0,169586			

Tabla 4.20 Resultados del desplazamiento del punto A obtenidos en cada discretización y en cada extrapolación

Malla	Error cometido cada malla respecto a la solución exacta	Error cometido en la extrapolación (h^2)	Error cometido en la extrapolación (h^4)	Error cometido en la extrapolación (h^6)
1	35,1102			
2	-8,6741	-23,2690		
3	-3,14943	-1,3079	0,1563	
4	-0,5124	0,3668	0,4782	0,4835

Tabla 4.21 Error cometido en el desplazamiento del punto A en cada discretización y en cada extrapolación.

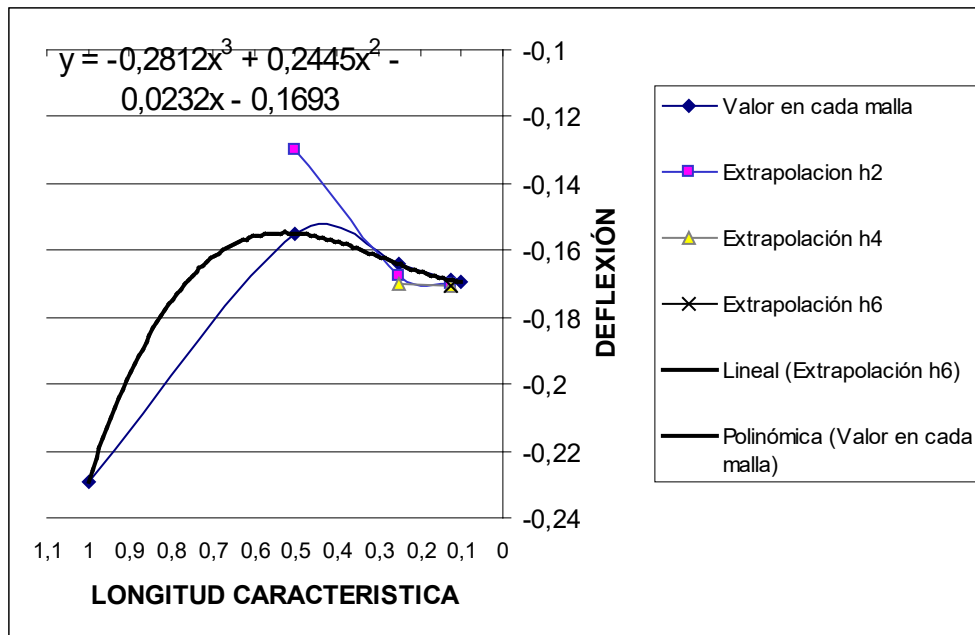


Figura. 4.22 Longitud característica vs. Desplazamiento del punto A

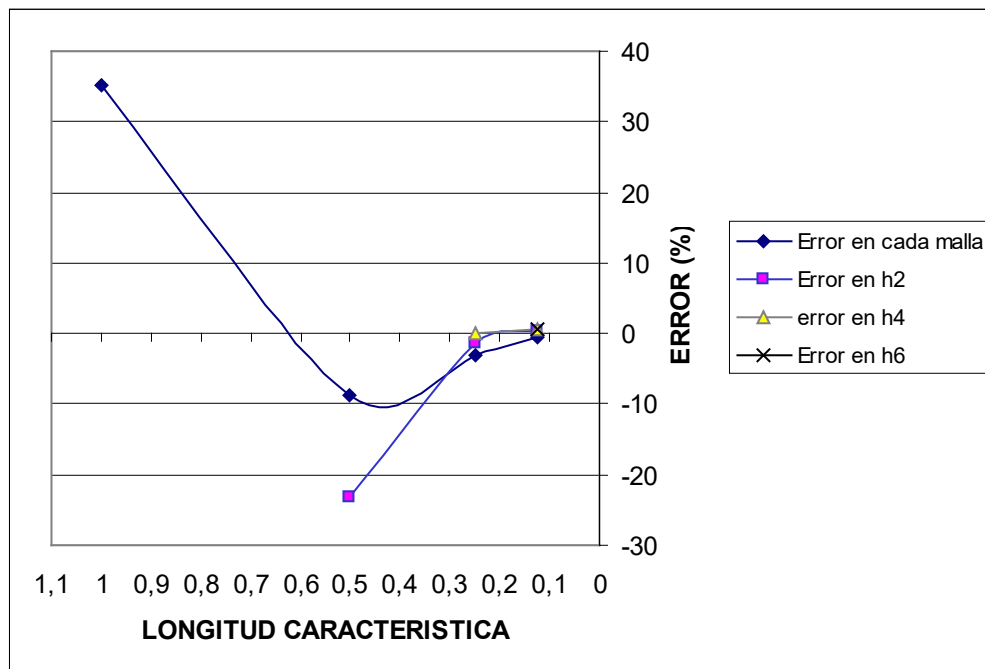


Figura. 4.23 Curvas de convergencia del error relativo cometido en el cálculo de desplazamiento del punto A

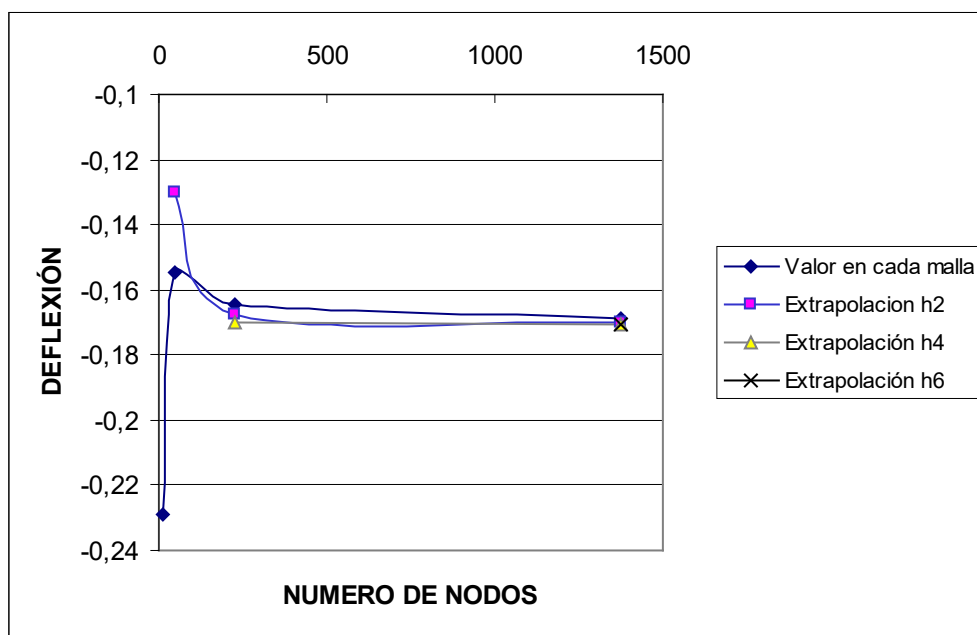


Figura. 4.24 Número de nodos vs. Desplazamiento del punto A

4.3.3 FUNDACIÓN AISLADA SOMETIDA A CARGAS COMBINADAS.

El último problema analizado tiene una mayor dificultad por los entrantes que forman la unión entre la base de la columna y el pedestal, donde se crean líneas de singularidad. Los resultados generales son listados en las tablas 4.22 a la 4.24. En la Tabla 4.22 se encuentran tabulados el número de nodos en cada discretización en función de la longitud característica; En la Tabla 4.23 los valores correspondientes al desplazamiento del punto A y los valores extrapolados en cada discretización, y en la Tabla 4.24 el error relativo cometido con respecto a la solución exacta. El valor exacto para las condiciones de la viga es desconocido, y al igual como se consideró en los problemas anteriores solo considerando una malla muy fina se puede conocer el valor exacto aproximado, en este caso se considera que el resultado de la quinta malla ofrece este valor. En la Figura 4.25, se aprecia la curva de convergencia de los resultados a medida que la longitud característica se hace más pequeña. Se puede observar en la Tabla 4.24 que al extrapolar las primeras dos discretizaciones se obtiene un error de -12.32% para h^2 , y al considerar la tercera discretización se obtiene un resultado de 1.68% de error en h^2 y 2.61% en h^4 . Al tomar en cuenta la cuarta discretización el error cometido es: 2.43% en h^2 , 2.57% en h^4 y 2.57% en h^6 . La Figura 4.25 muestra la curva de convergencia de los resultados del desplazamiento horizontal en A y puede observar que tiende hacia la solución exacta por debajo (lower-bound solution). Empleando el polinomio de interpolación el error cometido en el cálculo del desplazamiento del punto A es 1.234%

Malla	Longitud característica	Número de nodos
1	1.000	34
2	0,500	165
3	0,250	945
4	0,200	1716
5	0,167	2821

Tabla 4.22 Número de nodos en función de la longitud característica

Malla	Desplazamiento horizontal u_x del punto A	Valor extrapolado utilizando dos mallas consecutivas	Valor extrapolado utilizando tres mallas consecutivas	Valor extrapolado utilizando cuatro mallas consecutivas
1	0,073947			
2	0,090719	0,0963097		
3	0,106444	0,1116857	0,1127107	
4	0,108629	0,1125134	0,1126711	0,11266947
5	0,109844			

Tabla 4.23 Resultados del desplazamiento del punto A obtenidos en cada discretización y en cada extrapolación

Malla	Error cometido cada malla respecto a la solución exacta	Error cometido en la extrapolación (h^2)	Error cometido en la extrapolación (h^4)	Error cometido en la extrapolación (h^6)
1	-32,6800			
2	-17,4111	-12,3214		
3	-3,0953	1,6767	2,6098	
4	-1,10611	2,4302	2,5737	2,5723

Tabla 4.24 Error cometido en el desplazamiento del punto A en cada discretización y en cada extrapolación.

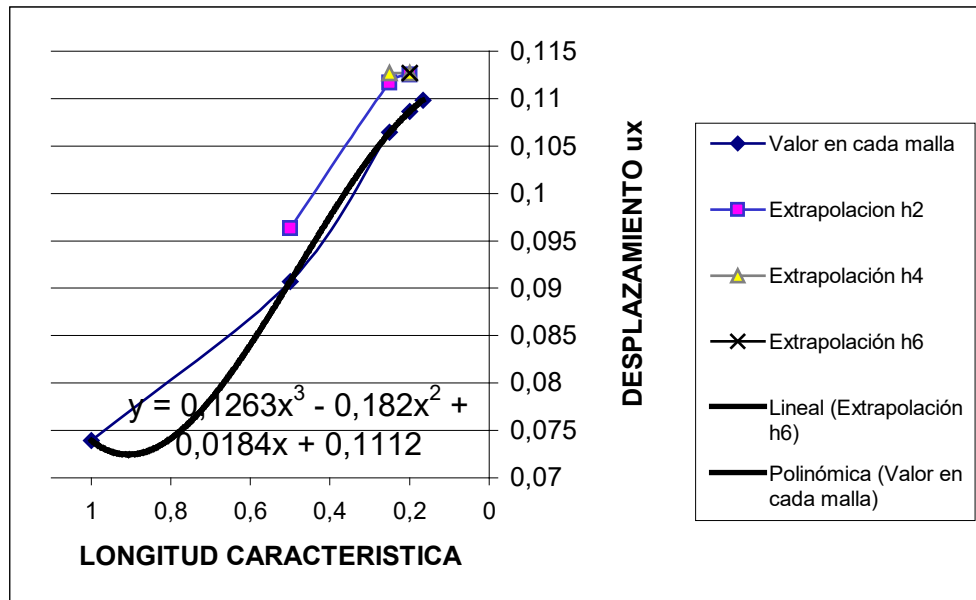


Figura. 4.25 Curvas de convergencia del error relativo cometido en el cálculo de desplazamiento del punto A

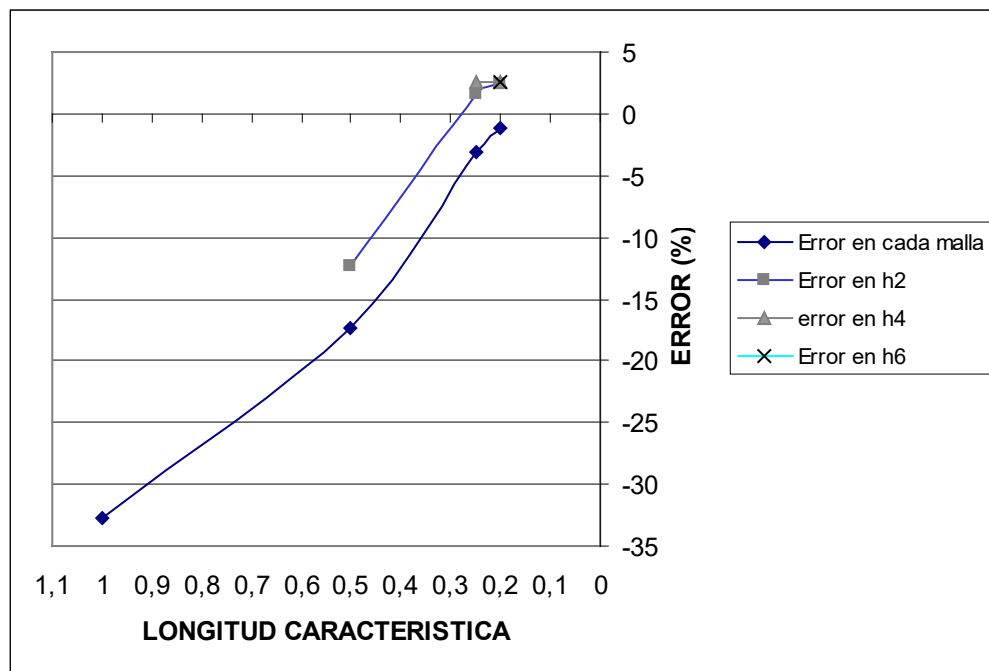


Figura. 4.26 Curvas de convergencia del error relativo cometido en el cálculo de desplazamiento del punto A

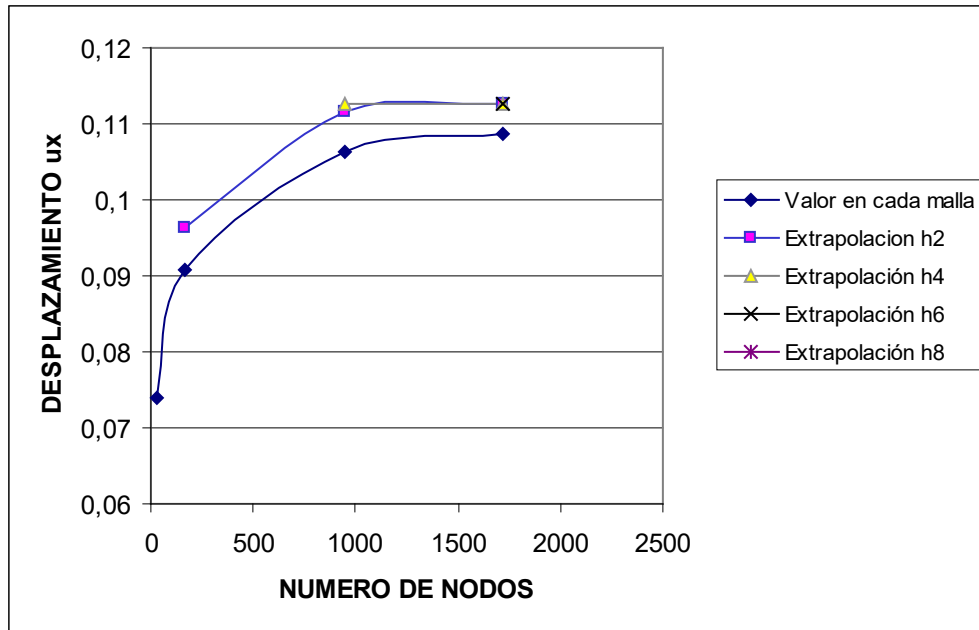


Figura. 4.27 Número de nodos vs. Desplazamiento del punto A

CONCLUSIONES

En los problemas estudiados es posible la aplicación del proceso de extrapolación con una suficiente aproximación a la solución exacta, considerando que el error cometido es inversamente proporcional al número de elementos.

Las curvas de convergencia de los desplazamientos presentan una tendencia monótonica de tipo parabólico hacia la solución exacta con pendientes cada vez menores, por lo que los polinomios interpolantes arrojan buenos resultados cuando h tiende a 0.

En los casos donde se conoce la solución exacta y no se tienen singularidades geométricas, como los problemas de la placa cargada en el centro y el cálculo de la deflexión del punto A del problema de la viga en voladizo, se obtienen valores extrapolados con un error menor a 0.2% respecto a la solución exacta.

Al extrapolar resultados que se encuentran en la zona de representación impropia se obtienen valores que se alejan de la solución “exacta” como se observa en el problema de la viga con empotramiento defectuoso.

Extrapolar valores con las ecuaciones h^6 y h^8 arrojan resultados que difieren muy poco de los obtenidos con la ecuación h^4 .

Con el uso de la ecuación h^4 se obtienen, en la mayoría de los casos, mejores resultados que al emplear la ecuación h^2 .

REFERENCIAS

1. O. C. Zienkiewicz y R. L. Taylor, **El Método de los Elementos Finitos**, Volumen 1, 4ta edición. McGraw Hill, 1994.
2. R. D. Cook, D. S. Malkus y M. E. Plesha, **Concepts and Application of Finite Element Analysis**, Third edition, John Wiley & Sons, 1989.
3. Weaver, W. y Johnston, P., **Finite Elements For Structural Analysis**, Prentice Hall, 1984.
4. C. K. Lee y S.H. Lo., **Automatic Adaptive 3-D Finite Element Refinement Using Different Order Tetrahedral Elements**, International Journal For Numerical Methods in Engineering, Vol. 40, pp 2195-2226, 1997.
- A. Umar, H. Qadder y D.K. Sehgal, **Prediction of Error in Finite Elements Results**, Computer and Structures, Vol. 60, No 3, pp 471-480, 1996.
5. Buenaño, A., **Proceso Adaptativo Basado en Indices de Energia de Deformación Aplicado al Problema de Flexión en Placas**, Tesis de Maestría en Ingeniería Estructural, Universidad de Los Andes, 1996.
6. Bolkhir, A., **Extrapolation in Finite Element Analysis**, Tesis doctoral en filosofía. Universidad de Duke. 1984.
7. Nakamura, S., **Métodos Numéricos Aplicados con Software**, 1ra edición, Prentice Hall, 1992.
8. Mogollon, J., **Cálculo Numerico, Aproximacion Numerica e Interpolación**, Universidad de Los Andes, 1992.
9. Bickford, W., **Mecánica de Sólidos, Conceptos y Aplicaciones**, 1ra edición, Ediciones Irwin, 1995

10. Timoshenko, S. Woinowsky, K., **Teoría de Placas y Laminas**, Ediciones Urmo, 1975.
11. Popov E.,. **Introducción a la Mecánica de los Sólidos**, 1ra edición, Editorial Limusa, 1984.